УДК 517.95+518.517

К.В. МАКСИМЕНКО-ШЕЙКО, Т.И. ШЕЙКО

R-ФУНКЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ОБЛАДАЮЩИХ СИММЕТРИЕЙ

Ключевые слова: *типы симметрии, R-функции, нормализованные уравнения границ, правильные многоугольники, трансляция*.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Феномен симметрии, наблюдаемый в природе, начиная с молекул, кристаллов, растительного и животного мира, был позаимствован и перенесен человеком в архитектуру, строительство, машиностроение не только исходя из эстетики, но и для достижения рациональности, равновесности, устойчивости, надежности, облегченности и удешевления зданий, сооружений, машин, механизмов и других конструкций и изделий. Все это нашло отражение в геометрии, алгебре, анализе, других разделах математики и стимулировало изучение законов симметрии, методов их описания и применения, постановку новых проблем. С древнейших времен существовало представление о симметрии в широком смысле — как эквиваленте уравновешенности и гармонии. Теории, основанные на законах симметрии в естественных науках, могут иметь существенное значение, а способы применения симметрии — отличаться тонкостью замысла и тщательной продуманностью в деталях [1]. «Насколько я могу судить, — писал Вейль, — все априорные утверждения физики имеют своим источником симметрию» [2].

Отражение — наиболее известная и часто встречающаяся в природе разновидность симметрии (рис. 1, *а*). Понятие зеркальной симметрии имеет фундаментальное значение для математической теории симметрии, но роль ее в науке несравненно шире. В качестве примера можно привести открытую Пастером связь между вращением плоскости поляризованного света, растворами некоторых химических веществ и отсутствием зеркальной симметрии в формах кристаллов, выпадающих из этих растворов. Объяснение наблюдаемого Пастером эффекта состоит в том, что если и кристалл, и раствор вращают плоскость поляризации света, то отдельные молекулы исследуемого вещества не могут обладать зеркальной симметрией.

Неограниченное повторение любого геометрического объекта (ГО) в пространстве через определенное расстояние позволяет получить симметрию, известную под названием трансляции, или параллельного переноса (рис 1, *б*).

В калейдоскопе симметрия образуется с помощью двух зеркал, пересекающихся под надлежаще выбранным углом. При этом можно создать конфигурацию, обладающую поворотной и зеркальной симметрией (рис. 1, *в*). Это означает, что внешний вид узора не изменится, если его повернуть на определенный угол вокруг оси, проходящей через центр. Если угол поворота равен 90°, то для совершения полного оборота на 360° необходимо совершить один за другим четыре поворота. В этом случае ось называется осью симметрии четвертого порядка. Если угол поворота равен 60°, то ось называется осью симметрии шестого порядка и т.д.

Существуют также геометрические объекты с поворотной симметрией, не обладающие плоскостями зеркальной симметрии. Детская вертушка (рис. 1, *г*) может служить примером фигуры с поворотной симметрией, но не обладающей плоскостями симметрии, так как фигура основана на вращательных движениях лишь в одну сторону (без отражения).

Метод *R*-функций [3] позволяет строить для сложных ГО нормализованные уравнения их границ вида $\omega(x, y, z) = 0$, где $\{\omega(x, y, z)\}$ — элементарные функции, представленные единым аналитическим выражением. При этом существенно важно, насколько простыми с вычислительной точки зрения оказываются формулы

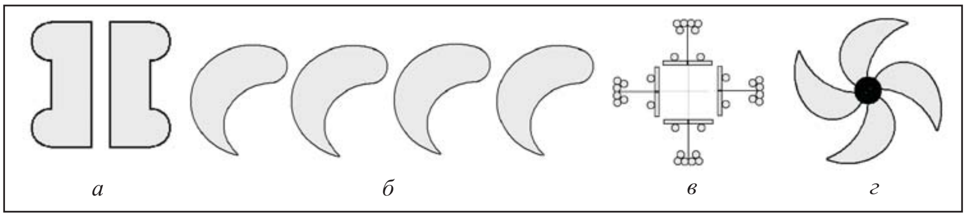

Рис. 1. Различные типы симметрии

$\omega(x, y, z)$. Интересными в этом аспекте являются ГО, обладающие симметрией. Так, в обратной задаче аналитической геометрии возникла проблема построения уравнений сложных ГО, состоящих из элементов, многократно повторяющихся по тем или иным законам симметрии.

Суть этой проблемы заключается в том, что для задания геометрического объекта, в формировании которого многократно тиражируется один и тот же ГО, достаточно располагать лишь уравнением этого ГО и информацией о типе симметрии. Это означает, что для построения уравнения ГО, обладающего симметрией, вовсе не обязательно строить уравнения всех элементов рассматриваемого объекта, а затем с помощью R-функций осуществлять их компоновку. Возможен другой путь: располагая уравнением трансляционного элемента, выполнить в нем такое преобразование координат, которое позволило бы получить единое уравнение без применения R-операций, требующих значительных вычислительных затрат. Первая попытка в этом направлении была предпринята в работе [3] для ГО с симметрией трансляционного типа, при этом многие другие типы симметрии не были затронуты.

В работах [4–6] предложены новые подходы, раскрывающие возможности применения R-функций к построению нормализованных уравнений сложных ГО, обладающих симметрией, с ориентацией как на их использование при решении краевых задач для уравнений с частными производными, моделирующими поля различной физической природы (естественно, что при включении геометрической информации в структуры решений необходимо строить функции $\omega(x, y, z)$ таким образом, чтобы они обладали необходимой симметрией), так и для других приложений, связанных с геометрическим дизайном.

Цель настоящей статьи — совершенствование конструктивных средств теории R-функций, основанных на преобразованиях координат, для построения нормализованных уравнений правильных многоугольников с последующей их трансляцией, в том числе на конечных интервалах.

В большинстве случаев для построения функций ω используется система R-функций

$$\begin{cases} x \wedge_\alpha y = \dfrac{1}{1+\alpha}\left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha x y}\right), \\ x \vee_\alpha y = \dfrac{1}{1+\alpha}\left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha x y}\right), \\ \bar{x} = -x, \end{cases}$$

где $\alpha = \alpha(x, y)$, $-1 < \alpha \le 1$. Наиболее часто выбирают $\alpha = 0$; 1; 0,9 или $\alpha(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^{-1}$. При необходимости дополнительно может быть реализовано условие нормализованности [3] $\left.\dfrac{\partial \omega}{\partial v}\right|_{\omega=0} = 1$, где $\vec{v}$ — внутренняя нормаль.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

При рассмотрении ГО, обладающих симметрией, построение осуществляется путем использования некоторого ГО $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \ge 0]$, принимаемого за образец. Уравнение $\sigma_0(x, y) = 0$ называют каноническим и (если это необходимо) строят его в нормализованном виде.

Введем преобразование координат для построения уравнений, соответствующих ГО с симметрией трансляции (бесконечного тиражирования) вдоль прямой. Впервые этот вопрос был рассмотрен в [3] для случая трансляционной симметрии вдоль оси в предположении, что транслируемые области могут быть отделены одна от другой некоторой периодической системой полос, перпендикулярных оси трансляции.

Утверждение 1. Пусть $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$, $\sigma_0 \in C^m(R^2)$, есть ГО, симметричный относительно оси ординат, который может быть заключен в вертикальную полосу $-a < x < a$, а $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi,\ y) \geq 0]$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, — ГО, полученные смещением Σ_0 вдоль оси абсцисс на величины, кратные $h > 2a$ (рис. 2, *а*), где h — шаг трансляции и функция $\sigma_0(x, y)$ нормализована. Тогда граница $\partial\Omega$ области $\Omega = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} \overline{\Sigma}_i$ может быть задана уравнением

$$\omega(x, y) \equiv -\sigma_0(\mu(x, h), y) = 0, \tag{1}$$

где $\mu(x, h) = \dfrac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin\dfrac{(2i-1)x\pi}{h}$, при этом функция $\omega(x, y)$ также будет нормализована. Однако отметим, что использование этих частичных сумм Фурье может привести к значительным погрешностям при малом числе слагаемых. Хотя формулы (1) достаточно сложны для вычислений, они при построении уравнения $\omega(x, y) = 0$ используются лишь один раз, в то время как при применении обычной методики *R*-операцию $\wedge_\alpha$ приходится применять тем большее количество раз, чем больше число транслируемых элементов m.

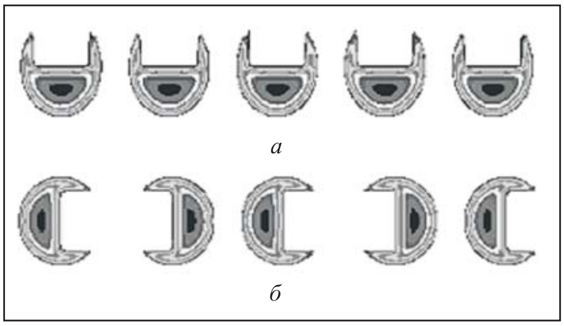

Рис. 2. Линии уровня функции $\omega(x, y)$, построенной по формуле (1), когда трансляционный элемент симметричен (*а*) и несимметричен (*б*) относительно оси ординат

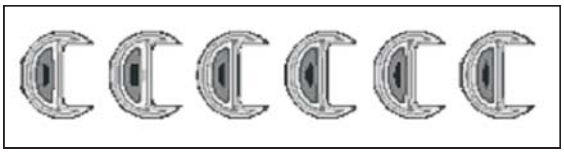

Рис. 3. Линии уровня функции $\omega(x, y)$, построенной по формуле (2)

Рассмотренное выше утверждение 1 было выведено в предположении, что ГО Σ_0 симметричен относительно оси ординат. В противном случае задача несколько усложняется, так как применение формулы (1) к несимметричному относительно оси ординат ГО даст картину, изображенную на рис. 2, *б*, где видна зеркальная симметрия.

Утверждение 2. Пусть $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$, $\sigma_0 \in C^m(R^2)$ — геометрический объект, несимметричный относительно оси ординат (рис. 3), который может быть заключен в вертикальную полосу $-a < x < a$, а $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi, y) \geq 0]$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — геометрические объекты, полученные смещением Σ_0 вдоль оси абсцисс на величины, кратные $h > 2a$, где h — шаг трансляции и функция $\sigma_0(x, y)$ нормализована. Тогда граница $\partial\Omega$ области $\Omega = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} \overline{\Sigma}_i$ может быть задана уравнением

$$\omega(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \equiv \left\{ \sigma_0(\mu(\mathrm{x}, \mathrm{h}), \mathrm{y}) \wedge_\alpha \cos\frac{\mathrm{x}\pi}{\mathrm{h}} \right\} \vee_\alpha \left\{ \sigma_0(\mu(\mathrm{x} - \mathrm{h}, \mathrm{h}), \mathrm{y}) \wedge_\alpha \cos\frac{(\mathrm{x} - \mathrm{h})\pi}{\mathrm{h}} \right\} = 0, \tag{2}$$

при этом функция $\omega(x, y)$ также будет нормализована.

Рассмотрим преобразование координат для построения уравнений, соответствующих геометрическому объекту с точечной симметрией циклического типа (поворотная симметрия). Пусть $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ — некоторый ГО. Тогда $\Sigma_1 = [\sigma_1(x, y) \equiv \sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ — результат смещения Σ_0 на расстояние r_0 вдоль оси абсцисс. Построим уравнение $\omega(x, y) = 0$ границы области $\Omega = \bigcup_{k=1}^{k=n} \Sigma_k$, полученной в результате поворота области Σ_1 вокруг начала координат на углы $\frac{2\pi k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Утверждение 3. Пусть указанная выше функция $\sigma_0 \in C^m(R^2)$ нормализована, а геометрический объект $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ симметричен относительно оси абсцисс (рис. 4, *а*) и может быть размещен внутри сектора $-\beta \leq \theta \leq \beta$, $0 < \beta < \frac{\pi}{n}$. Тогда нормализованное уравнение $\partial\Omega = [\omega(x, y) = 0]$, $\omega \in C^m(R^2)$, имеет вид

$$\omega(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \equiv \sigma_0(\mathrm{r} \cos \mu(\mathrm{n}\,\theta) - \mathrm{r}_0, \ \mathrm{r} \sin \mu(\mathrm{n}\,\theta)) = 0, \tag{3}$$

где $\mu(n\theta) = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Если геометрический объект Σ_0 несимметричен относительно оси абсцисс, то применение формулы (3) даст картину, изображенную на рис. 4, *б*, где просматривается зеркальная симметрия.

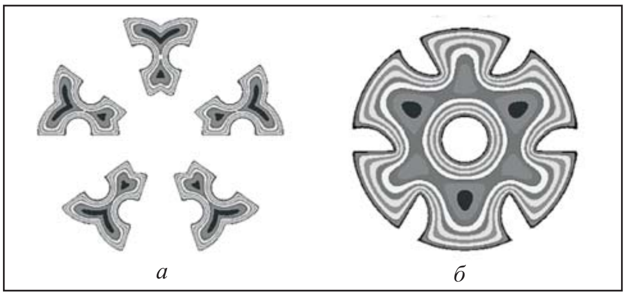

Рис. 4. Линии уровня функции $\omega(x, y)$, построенной по формуле (3), когда движущийся элемент симметричен (*а*) и несимметричен (*б*) относительно оси абсцисс

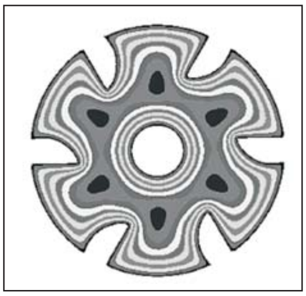

Рис. 5. Линии уровня функции $\omega(x, y)$, построенной по формуле (4)

Утверждение 4. Пусть функция $\sigma_0 \in C^m(R^2)$ нормализована, а геометрический объект $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ несимметричен относительно оси абсцисс (рис. 5) и может быть размещен внутри сектора $-\beta \leq \theta \leq \beta$, $0 < \beta < \frac{\pi}{n}$. Тогда нормализованное уравнение $\partial\Omega = [\omega(x, y) = 0]$, $\omega \in C^m(R^2)$ имеет вид

$$\omega(x, y) \equiv \left[\sigma_0(r \cos \mu(n\theta) - r_0, r \sin \mu(n\theta)) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right] \vee_\alpha$$

$$\vee_\alpha \left[\sigma_0\left(\mathrm{r} \cos \mu\left(\mathrm{n}\left(\theta - \frac{2\pi}{\mathrm{n}}\right)\right) - \mathrm{r}_0, \mathrm{r} \sin \mu\left(\mathrm{n}\left(\theta - \frac{2\pi}{\mathrm{n}}\right)\right)\right) \wedge_\alpha \cos\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\left(\theta - \frac{2\pi}{\mathrm{n}}\right)\right)\right] = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда правильные n_o-угольники транслируются с поворотной симметрией в правильном n_b-угольнике n_d раз (рис. 6). При этом все построения выполним с помощью двух функций: $\sigma_1 \equiv x - R_1$ и $\sigma_2 \equiv R_v - x$ (рис. 7, *а*).

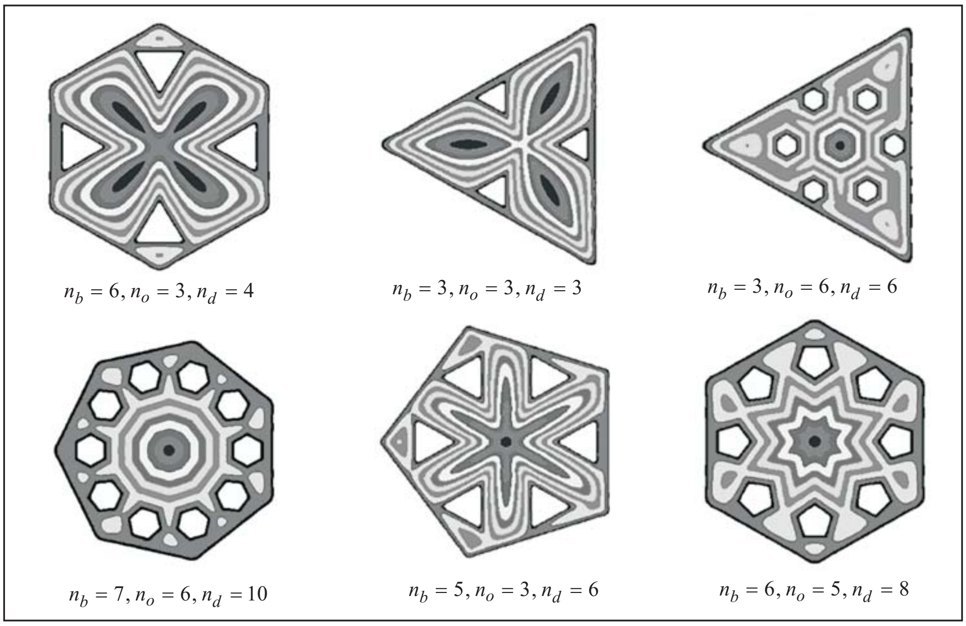

Рис. 6. Линии уровня функций $\omega(x, y)$, построенных с помощью двух прямых

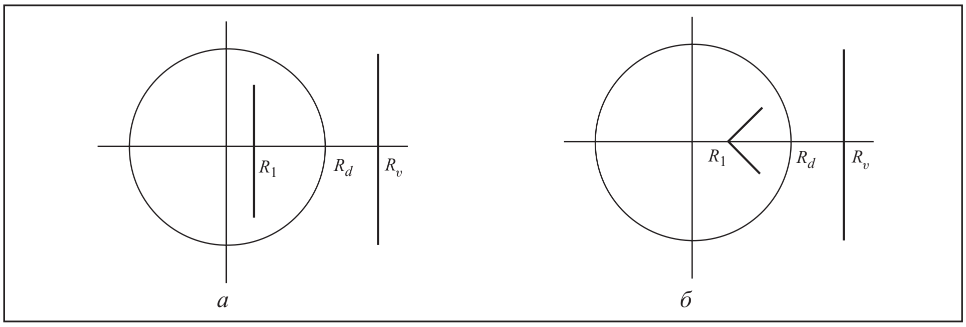

Рис. 7. Схема построения ГО, транслируемого в правильном n_b-угольнике n_d раз для правильного n_o-угольника (*а*) и для n_o-угольной звезды (*б*)

Для построения уравнения правильного n_o-угольника используем функцию $\sigma \equiv x - R_1$ и формулу (3), а затем, перенося начало координат в точку $(R_d, 0)$, транслируем с поворотной симметрией n_o-угольник n_d раз снова по формуле (3). В результате получим $\omega_t \equiv r_1 \cos \mu_1 - R_1 = 0$, где $r_1 = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}$, $\begin{cases} x_s = r \cos \mu_d - R_d, \\ y_s = r \sin \mu_d; \end{cases}$

$\mu_d = \dfrac{8}{n_d \pi} \sum\limits_k (-1)^{k+1} \dfrac{\sin\left[(2k-1)\dfrac{n_d \theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$ — преобразования переноса начала координат в точку $(R_d, 0)$ и трансляции с поворотной симметрией n_d раз по окружности радиуса R_d, $\mu_1 = \dfrac{8}{n_o \pi} \sum\limits_k (-1)^{k+1} \dfrac{\sin\left[(2k-1)\dfrac{n_o \theta_1}{2}\right]}{(2k-1)^2}$; $\theta_1 = \dfrac{1 - \operatorname{sign}(x_s)}{2} \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y_s}{x_s}$ — преобразования для правильного n_o-угольника.

Для построения уравнения внешнего правильного n_b-угольника воспользуемся функцией $\sigma \equiv R_v - x$ и формулой (3). В результате получим $\omega_v \equiv R_v - r \cos \mu_v = 0$,

Рис. 8. Линии уровня функций $\omega(x, y)$, построенных с помощью трех прямых

где $\mu_v = \dfrac{8}{n_b \pi} \sum_k (-1)^{k+1} \dfrac{\sin\left[(2k-1)\dfrac{n_b \theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Таким образом, нормализованное уравнение границы правильного n_o-угольника, транслированного с поворотной симметрией в правильном n_b-угольнике n_d раз, имеет вид $\omega \equiv \omega_v \wedge_0 \omega_t = 0$ и является шестипараметрическим $(n_o, n_b, n_d, R_1, R_d, R_v)$ семейством кривых. При этом следует отметить, что R-операция использовалась лишь один раз. Для сравнения рассмотрим простейший случай, когда $n_b = 3$, $n_o = 3$, $n_d = 3$. Применяя классический подход для построения функции ω, необходимо задать шесть функций (шесть прямых) и применить семь R-операций.

Рассмотрим пример, когда правильные n_o-угольные звезды транслируются с поворотной симметрией в правильном n_b-угольнике n_d раз (рис. 8). При этом все построения выполним с помощью трех функций: $\sigma_1 \equiv \dfrac{(-y + k(x - R_1))}{\sqrt{1+k^2}}$, $\sigma_2 \equiv \dfrac{(y - k(-x + R_1))}{\sqrt{1+k^2}}$, где $k = \dfrac{10\sin(\pi / n_o)}{10\cos(\pi / n_o) - 4}$, и $\sigma_3 \equiv R_v - x$ (рис. 7, *б*).

Для построения уравнения n_o-угольной звезды конъюнктируем функции $\omega_t \equiv \sigma_1 \wedge_0 \sigma_2 = 0$ и воспользуемся формулой (3). Затем, перенося начало координат в точку $(R_d, 0)$, транслируем с поворотной симметрией звезду n_d раз снова по формуле (3). В результате получим

$$\omega_t \equiv \left(\frac{(-r_1 \sin\mu_1 + k(r_1 \cos\mu_1 - R_1))}{\sqrt{1+k^2}}\right) \wedge_0 \left(\frac{(r_1 \sin\mu_1 - k(-r_1 \cos\mu_1 + R_1))}{\sqrt{1+k^2}}\right) = 0,$$

где $r_1 = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}$; $\begin{cases} x_s = r\cos\mu_d - R_d, \\ y_s = r\sin\mu_d; \end{cases}$ $\mu_d = \dfrac{8}{n_d \pi} \sum_k (-1)^{k+1} \dfrac{\sin\left[(2k-1)\dfrac{n_d \theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$ — преобразования переноса начала координат в точку $(R_d, 0)$ и трансляции с поворотной симметрией звезды n_d раз по окружности радиуса R_d, $\mu_1 = \dfrac{8}{n_o \pi} \times$ $\times \sum_k (-1)^{k+1} \dfrac{\sin\left[(2k-1)\dfrac{n_o \theta_1}{2}\right]}{(2k-1)^2}$; $\theta_1 = \dfrac{1 - \operatorname{sign}(x_s)}{2}\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y_s}{x_s}$ — преобразования для построения n_o-угольной звезды.

Для построения уравнения правильного n_b-угольника воспользуемся, как и в предыдущем случае, функцией $\sigma \equiv R_v - x \ge 0$ и формулой (3). В результате получим

$$\omega_v \equiv R_v - r\cos\mu_v = 0, \text{ где } \quad \mu_v = \frac{8}{n_b\pi}\sum_k (-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_b\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Окончательно нормализованное уравнение границы области, полученной в результате трансляции с поворотной симметрией n_o-угольной звезды в правильном n_b-угольнике n_d раз, имеет вид $\omega \equiv \omega_v \wedge_0 \omega_t = 0$ и также является шестипараметрическим $(n_o, n_b, n_d, R_1, R_d, R_v)$ семейством кривых. Отметим, что в данном случае *R*-операция использовалась дважды.

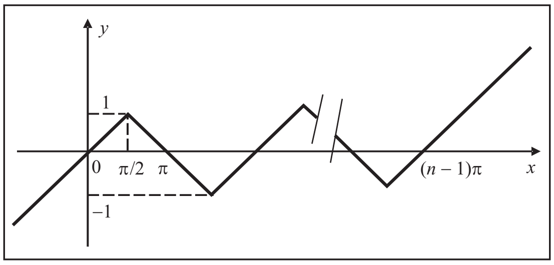

Рис. 9. График функции $\mu^*(x,h)$

Рассмотрим преобразование координат для построения уравнений границ областей, соответствующих геометрическим объектам, транслированным конечное число раз вдоль прямой. Преобразования координат (1) и (2) позволяют по заданным уравнению геометрического объекта $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \ge 0]$ и шагу *h* получить уравнение границы области, представляющей собой бесконечную трансляцию Σ_0 вдоль оси абсцисс. Используя преобразование поворота осей координат, легко получить аналогичное уравнение для произвольной прямой. Однако часто возникает необходимость построить уравнение границы области, полученной в результате трансляции Σ_0 на некотором отрезке прямой конечное число раз.

Рассмотрим преобразование координат (рис. 9) с заранее определенным числом $n < \frac{l}{a} + 1$ транслируемых геометрических объектов, каждый из которых может быть заключен в вертикальную полосу шириной *a*, на отрезке длиной *l*

$$\mu^*(\mathrm{x}, \mathrm{h}) = (\mathrm{x} \wedge_1 \mu(\mathrm{x}, \mathrm{h})) \wedge_1^{\mathrm{n}} ((\mathrm{x}-1)(-1)^{\mathrm{n}-1}), \qquad (5)$$

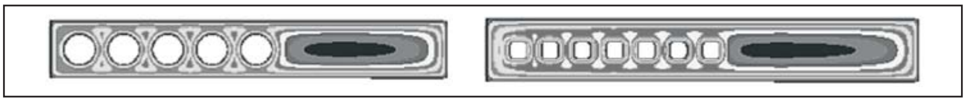

Рис. 10. Линии уровня функций $\omega(x, y)$, построенных с использованием преобразования (5)

где $\wedge_1^n = \frac{1}{2}(u + v + (-1)^{n-1}|u - v|)$.

В результате получим $\omega(x, y) = -\sigma_0(\mu^*(x, h), y) = 0$. На рис. 10 приведены примеры перфорации в виде кругов и прямоугольников с функцией $\omega(x, y)$, построенной с использованием преобразования координат (5).

Рассмотрим преобразование координат для построения уравнений границ областей, соответствующих геометрическим объектам, транслированным с поворотной симметрией вдоль дуги конечное число раз.

Преобразования координат (3), (4) позволяют по заданному уравнению геометрического объекта $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \ge 0]$ найти уравнение $\omega(x, y) = 0$ границы области $\Omega = \bigcup_{k=1}^{k=n} \Sigma_k$, полученной в результате поворота геометрического объекта Σ_1 вокруг начала координат на углы $\frac{2\pi k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Однако часто возникает необходимость построить уравнение, полученное в результате трансляции Σ_1 с поворотной симметрией на некоторой дуге конечное число раз.

Преобразование координат осуществляется трансляцией элемента на интервале φ с шагом θ_h

$$\mu^*(\theta_1,\theta_\mathrm{h})=\left(\left(\theta_1-\frac{\theta_\mathrm{h}}{2}\right)\wedge_1 \mu(\theta_1,\theta_\mathrm{h})\right)\wedge_1\left(\varphi-\left(\theta_1+\frac{\theta_\mathrm{h}}{2}\right)\right), \qquad (6)$$

где $\mu(\theta_1,\theta_h)=\dfrac{4\theta_h}{\pi^2}\sum\limits_k(-1)^{k+1}\dfrac{\sin\left[(2k-1)\left(\theta_1-\dfrac{\theta_h}{2}\right)\dfrac{\pi}{\theta_h}\right]}{(2k-1)^2}$, $\theta_1=\theta-\pi+\dfrac{\varphi}{2}$. При этом

Рис. 11. Линии уровня функций $\omega(x, y)$, построенных с использованием преобразования (6)

$n_d=\dfrac{\varphi}{\theta_h}$ — количество элементов на дуге.

На рис. 11 приведены примеры перфорации в виде треугольников и прямоугольников с функцией $\omega(x, y)$, построенной при использовании преобразования координат (6).

Отметим, что нормализованное уравнение $\omega(x,y)=0$ границы правильного n_o-угольника, транслированного с поворотной симметрией в правильном n_b-угольнике n_d раз на интервале трансляции φ ($n_d=\dfrac{\varphi}{\theta_h}$ — количество элементов на интервале, θ_h — шаг трансляции), является семипараметрическим $(n_o, n_b, \varphi, \theta_h, R_1, R_d, R_v)$ семейством кривых. Заметим, что при построении преобразования (6) R-операция $\wedge_0$ использовалась один раз, а $\wedge_1$ — дважды.

ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

В отличие от классической схемы применения метода R-функций предлагаемый метод позволяет включать в вычислительные алгоритмы геометрическую информацию о геометрических объектах, сочетающих в себе различные типы симметрий. При этом построение нормализованных уравнений геометрических объектов не требует многократного использования R-операций, а осуществляется путем введения специальных преобразований координат, что позволяет существенно сократить вычислительные затраты во всех приложениях, требующих преобразования геометрической информации в аналитическую. Следует отметить новые преобразования координат, позволяющие осуществлять трансляцию геометрических объектов на конечных интервалах. Такие подходы особенно важны при решении проблемы автоматизации в задачах геометрического проектирования, твердотельного моделирования и при решении краевых задач математической физики. Большое количество научно-технических решений, опирающихся на исследования полей различной физической природы, связано с повышением прочности, надежности, устойчивости, долговечности, добротности изделий и конструкций при наличии симметрии. Здесь можно назвать перфорированные пластины и оболочки (фюзеляжи самолетов, корпуса судов и космических кораблей с иллюминаторами); пилы, фрезы, зубчатые передачи; решетки в технике сверхвысоких частот и гидродинамических конструкциях; роторы турбин и бланкеты тепловыделяющих элементов ядерных реакторов.

Новые методы построения нормализованных уравнений симметричных геометрических объектов и геометрических объектов, транслируемых на конечных интервалах, легко адаптируются к любому программному обеспечению и удобны при использовании метода стандартных примитивов [7]. Их численная реализация в системе ПОЛЕ подтвердила многократное сокращение временных затрат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Узоры симметрии / Под ред. М. Сенешаль, Дж. Флека. — М.: Мир, 1980. — 272 с.
2. Вейль Г. Симметрия. — М.: Наука, 1968. — 144 с.
3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 566 с.
4. Рвачев В.Л., Шапиро В., Шейко Т.И. Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрией // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 1998. — **41**, № 1. — С. 146–159.
5. Рвачев В.Л., Шапиро В., Шейко Т.И. Применение метода R-функций к построению уравнений локусов, обладающих симметрией // Электромагнитные волны и электронные системы. — 1999. — **4**, № 4. — С. 4–20.
6. Семерич Ю.С., Толок А.В., Шейко Т.И. Построение симметричных функций для симметричных чертежей // Вестник Запорож. гос. ун-та. — 2001. — № 2. — С. 83–98.
7. Максименко-Шейко К.В., Мацевитый А.М., Шейко Т.И. Автоматизация построения уравнений геометрических объектов в методе R-функций // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 2. — С. 148–157.

Поступила 09.11.2007