УДК 519.21

Б.В. НОРКИН

СТОХАСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ РИСКА НЕПЛАТЕЖЕСПОСОБНОСТИ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Ключевые слова: *процесс риска, вероятность разорения, обрывающийся процесс восстановления, интегральное уравнение восстановления, метод последовательных приближений, метод Монте-Карло*.

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена аналитико-статистическим оценкам (модификациям метода Монте-Карло) вероятности разорения (обрыва) так называемого процесса риска [1–8], который описывает стохастическую эволюцию капитала страховой компании. В прямом методе Монте-Карло моделируются траектории процесса риска и подсчитывается доля траекторий, приводящих к разорению [2]. Этот метод является общим, но не обладает достаточной точностью для случая малых вероятностей разорения. Аналитические методы и оценки [1–8] вероятности разорения дают точные или хорошие приближенные значения, но применимы для весьма ограниченного числа случаев.

Аналитико-статистические методы комбинируют метод Монте-Карло с использованием той или иной аналитической (формульной) информацией о процессе [9–11]. В настоящей статье в основном рассматриваются два таких подхода. Первый основан на формуле Полачека–Хинчина для вероятности разорения [1, 5, 6], когда вероятность разорения как функция начального капитала представляется в виде бесконечной суммы с убывающими коэффициентами сверток некоторой вспомогательной функции распределения. В данном методе статистически оцениваются свертки, которые затем суммируются с коэффициентами аналитического представления. Для точечной оценки вероятности разорения (при фиксированном начальном капитале) подобный метод был применен в [12–15], а ранее в статье [16] он использовался для оценок надежности. Отметим, что в отличие от [13] в работах [12–15] не использовался явный вид распределения требований, а применялась его непараметрическая (эмпирическая) оценка. При точечном оценивании (для фиксированных значений начального капитала) сходимость метода с вероятностью единица следует из закона больших чисел. Естественно, это справедливо и для совокупности любого конечного числа точек оценивания. В настоящей статье этот результат несколько усиливается, а именно доказывается равномерная (для континуума значений начального капитала) сходимость метода с вероятностью единица. Для доказательства сходимости привлекается теорема Гливенко–Кантелли [17] о равномерной сходимости эмпирических функций распределения, а в общем случае используется обобщенная теорема Гливенко–Кантелли [17, Приложение 1] о равномерном законе больших чисел на классе выпуклых множеств.

Второй рассматриваемый подход является стохастической модификацией метода последовательных приближений [18, 19] для решения основного интегрального уравнения страховой математики, которому удовлетворяет вероятность разорения как функция начального капитала. Таким образом, этот подход также использует аналитические знания об искомом объекте, т.е. уравнение с аналитически заданной функцией распределения требований, которому удовлетворяет вероятность разорения, при этом статистически оцениваются интегралы, входящие в уравнение. Следует отметить, что сама формула Полачека–Хинчина может быть получена методом последовательных приближений при специальном выборе начального приближения (в виде начальной функции, тождественно равной нулю). Однако в методе последовательных приближений могут использоваться и другие начальные приближения, например известные аналитические аппроксимации для функции вероятности разорения. Кроме того, метод последовательных приближений применим и в случае более общих процессов риска [20–22]. В настоящей статье доказывается равномерная сходимость с вероятностью единица стохастического метода последовательных приближений, в котором на каждой итерации интегралы аппроксимируются методом Монте-Карло.

Таким образом, можно считать, что в первом рассматриваемом подходе сначала методом последовательных приближений находится аналитическое решение, а затем для его численной оценки используется метод Монте-Карло. При втором подходе в самом методе последовательных приближений на каждой итерации используются оценки Монте-Карло для интегралов. В обоих подходах вместо аналитически заданной функции распределения требований можно использовать ее непараметрическую (эмпирическую) оценку. В статье проведено численное сравнение двух подходов. На примере показано, что второй подход является более точным и экономным.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Классический процесс риска, описывающий эволюцию капитала страховой компании, задается соотношением [1–8]

$$\xi_t = u + ct - S_t, \tag{1}$$

где t — время, u — начальный капитал страховой компании, c — интенсивность поступления премий, S_t — агрегированные выплаты к моменту t, $S_t = \sum_{k=1}^{N_t} x_k$, x_k — независимые одинаково распределенные случайные величины (требования) с функцией распределения $F(\cdot)$ и средним значением

$$\mu = \int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx,$$

N_t — число выплат к моменту t (пуассоновский процесс с интенсивностью α). Теория таких процессов детально изучена в [1–4]. Как известно, функция вероятности небанкротства $\varphi(u) = \Pr\{\xi_t \geq 0 \ \forall t \geq 0\}$ при начальном капитале u удовлетворяет (несобственному) интегральному уравнению восстановления:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c} \int_0^u \varphi(u - z)(1 - F(z))\, dz. \tag{2}$$

Запишем это уравнение в операторной форме. Введем оператор

$$A\varphi(u) = 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c} \int_0^u \varphi(u - z)(1 - F(z))\, dz. \tag{3}$$

Тогда уравнение (2) принимает вид $\varphi(u) = A\varphi(u)$. Это уравнение решается, как правило, с помощью преобразования Лапласа. Таким способом получены точные решения в случаях экспоненциальных и фиксированных требований. При условии $q = (\alpha\mu / c) < 1$ известно аналитическое решение уравнения (2) в виде бесконечного ряда (формула Полачека–Хинчина [1, 3, 6])

$$\varphi(u) = (1 - q) \sum_{k=0}^\infty q^k G^{k*}(u), \tag{4}$$

где $G^{k*}(u)$ — k-кратная свертка вспомогательной функции распределения

$$G(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^u (1 - F(x))\, dx. \tag{5}$$

Нетрудно показать, что для $\varphi(u)$ из (4) справедливо $\lim\limits_{u\to+\infty}\varphi(u)=1$. Если существует положительное решение R (коэффициент Лундберга) уравнения

$$\frac{\alpha}{c}\int\limits_0^{+\infty} e^{Rx}[1-F(x)]dx=1, \qquad (6)$$

что имеет место для распределений с «легкими хвостами», когда обратная функция распределения $\overline{F}(x)=1-F(x)$ убывает с ростом x быстрее, чем некоторая экспонента, то для решения $\varphi(u)$ уравнения (2) справедлива оценка Крамера–Лундберга

$$\varphi(u)\ge 1-e^{-Ru},\ u\ge 0. \qquad (7)$$

Известен также ряд экспоненциальных аппроксимаций $\varphi(u)$ для больших u (см., например, [3–6]). Для функций распределения $F(x)$ с «тяжелыми хвостами» уравнение (6) не имеет положительного решения, однако при условии $q=(\alpha\mu/c)<1$ формула (4) по-прежнему справедлива.

Определение 1 [3, 5]. Функция распределения $G(\cdot)$ называется субэкспоненциальной, если для всех $n\ge 2$

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1-G^{n*}(u)}{1-G(u)}=n.$$

Для субэкспоненциальной функции распределения $G(\cdot)$ имеет место $\lim\limits_{x\to\infty}(1-G(x))/e^{-\varepsilon x}=+\infty$ при любом $\varepsilon>0$. Разнообразные достаточные условия для субэкспоненциальности распределений содержатся в [3, 5, 6]. В частности, достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{G(tx)}{G(x)}=1$ для любого $t>0$ или

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{1-G^{2*}(u)}{1-G(u)}\le 2.$$

Если вспомогательное распределение (5) субэкспоненциально, то справедлива асимптотическая аппроксимация

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1-\varphi(u)}{\dfrac{\alpha}{c-\alpha\mu}\displaystyle\int\limits_u^{+\infty}(1-F(x))\,dx}=1. \qquad (8)$$

В частности, (8) имеет место, когда $F(x)$ является логнормальным распределением или распределением Парето.

В работе [23] получен аналог уравнения (2) для процесса риска с постоянным темпом δ увеличения капитала между требованиями

$$\varphi(u)=\frac{c}{c+\delta u}\varphi(0)+\frac{1}{c+\delta u}\int\limits_0^u\varphi(u-z)(\delta+\alpha(1-F(z))\,dz, \qquad (9)$$

где $\varphi(0)$ — неизвестная константа (вероятность неразорения при нулевом начальном капитале). В [24] предлагается находить эту константу путем решения (9) относительно $\widetilde{\varphi}(u)=\varphi(u)/\varphi(0)$ и соотношения

$$\varphi(0)=\lim_{u\to\infty}(\varphi(u)/\widetilde{\varphi}(u))=\lim_{u\to\infty}\varphi(u)/\lim_{u\to\infty}\widetilde{\varphi}(u)=1/\widetilde{\varphi}(+\infty).$$

Уравнение (2) вытекает из (9) при $\delta=0$. Исследование и решение уравнений (2), (9) проводится аналогично.

Аналитические выражения и аппроксимации решения уравнения (2) не снимают проблемы его численного решения. Эта задача продолжает привлекать внимание исследователей [5–8, 11–16, 18–33]. В частности, в работе [13] на основе представления (4) построена точечная оценка вероятности разорения типа Монте-Карло. Одним из результатов настоящей статьи является усиление этого результата, а именно доказательство равномерной сходимости оценки с вероятностью единица.

Заметим, что (2) заменой переменных $x = u - z$ сводится к интегральному уравнению Вольтерра (с ядром, зависящим от разности аргументов). Как известно [34], правая часть уравнения Вольтерра (2) является оператором сжатия (в общем случае сжатие имеет место только после нескольких применений оператора), поэтому оно имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений. В частности, решение (4) может быть получено этим методом. Метод последовательных приближений позволяет уточнить и численно проверить различные аппроксимации решения уравнения (2), используя их в качестве начального приближения. Однако уравнение (2) является уравнением Вольтерра специального вида, поэтому его решение и последовательные приближения к решению обладают специфическими свойствами. Метод последовательных приближений для решения интегральных уравнений страховой математики с целью нахождения вероятности банкротства на бесконечном временном интервале изучался в [18–20], а для конечного временного интервала — в [21, 22]. В частности, в [19] показано, что оператор (3) является равномерно сжимающим в первой степени и обладает определенной монотонностью. Это гарантирует высокую скорость равномерной сходимости метода. Основная трудность в расчетах по формуле (4) и по методу последовательных приближений состоит в многократном вычислении интегралов с бесконечными пределами интегрирования. Поэтому в настоящей статье предлагается и обосновывается метод последовательных приближений с приближенным вычислением интегралов, а также стохастический метод последовательных приближений, в котором аналогично [21, 22] на каждой итерации используются стохастические оценки Монте-Карло для интегралов. При этом доказывается равномерная по u сходимость с вероятностью единица получаемых стохастических последовательных приближений.

Отметим, что наряду с непрерывным классическим процессом риска (1) можно рассмотреть его дискретный аналог (аппроксимацию), в котором время и распределение требований дискретны. В работе [25] получен аналог уравнения (2) для дискретного процесса риска и на его основе предложен рекуррентный метод оценки вероятности разорения дискретного процесса, который является дискретным вариантом метода последовательных приближений. Использовалось также специальное (нулевое) начальное приближение и получены двусторонние оценки для приближений, однако не исследована скорость сходимости метода. Идеи работы [25] получили дальнейшее развитие в [26–33]. В отличие от работ [25–33] в настоящей статье метод последовательных приближений [19] применяется непосредственно к уравнению (2) для вероятности неразорения исходного процесса риска, доказывается его равномерная сходимость и получены оценки равномерной скорости сходимости при любом начальном приближении. Кроме того, в настоящей статье эти результаты обобщаются на метод последовательных приближений с ошибками, а также на его стохастический вариант, когда интегралы оцениваются методом Монте-Карло.

РАВНОМЕРНАЯ ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗОРЕНИЯ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Представление (4) является источником многочисленных подходов для оценивания вероятности неразорения $\varphi(u)$ [12–16]. Например, в силу теоремы Б. Леви [34, с. 305] ряд (4) можно переписать в виде

$$\varphi(u) = (1-q) E_x \sum_{k=0}^{\infty} q^k I\{u - \sum_{i=1}^{k} x_i\} = (1-q) E_x \sum_{k=0}^{\nu(u)} q^k I\{u - \sum_{i=1}^{k} x_i\}, \qquad (10)$$

где $\{x_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения (5); случайная величина $\nu(u)$ такова, что $x_1 + \ldots + x_{\nu(u)-1} \le u < x_1 + \ldots + x_{\nu(u)}$ (очевидно, при каждом u с вероятностью единица $\nu(u) < +\infty$); E_x— знак математического ожидания; $I(x) = 1$ при $x \ge 0$ и $I(x) = 0$ в противном случае; по определению $\sum_{i=1}^{0} (\cdot)_i = 0$. Если в (10) в каждом слагаемом взять условное математическое ожидание по x_k при фиксированных, $x_1, \ldots, x_{k-1}$, то получим формулу [13]

$$\varphi(u)=(1-q)(1+E_x\sum_{k=1}^{\infty}q^k G(u-\sum_{i=1}^{k-1}x_i))=(1-q)(1+E_x\sum_{k=1}^{\nu(u)}q^k G(u-\sum_{i=1}^{k-1}x_i)). \quad (11)$$

Представления (10), (11) могут использоваться для оценивания $\varphi(u)$ методом Монте-Карло. Если задать точность ε вычисления величины $\varphi(u)$, то в (10), (11) можно ограничиться слагаемыми до $k(\varepsilon)\geq(\ln\varepsilon)/q$.

Оценка вероятности неразорения методом Монте-Карло имеет вид

$$\varphi^N(u)=(1/N)\sum_{n=1}^{N}\xi_n(u), \quad (12)$$

где

$$\xi_n(u)=(1-q)(1+\sum_{k=1}^{\infty}q^k I\{u-\sum_{i=1}^{k}x_{nk}\})=(1-q)(1+\sum_{k=1}^{\nu_n(u)}q^k I\{u-\sum_{i=1}^{k}x_{nk}\}) \quad (13)$$

или

$$\xi_n(u)=(1-q)(1+\sum_{k=1}^{\infty}q^k G(u-\sum_{i=1}^{k-1}x_{nk}))=(1-q)(1+\sum_{k=1}^{\nu_n(u)}q^k G(u-\sum_{i=1}^{k-1}x_{nk})) \quad (14)$$

(оценка (14) была предложена в [13]), где $\{x_{nk}\}$ — независимые одинаково распределенные при всех $n=1,\ldots,N$ и $k=1,2,\ldots$ случайные величины с функцией распределения (5); конечная с вероятностью единица при каждом u случайная величина $\nu_n(u)$ определяется условием $x_{n1}+\ldots+x_{n(\nu_n(u)-1)}\leq u<x_{n1}+\ldots+x_{n\nu_n(u)}$. Вследствие усиленного закона больших чисел для каждого фиксированного u с вероятностью единица имеем $\lim_{N\to\infty}\varphi^N(u)=\varphi(u)$. В теореме 1 мы усилим результат [13], доказав, что здесь имеет место равномерная по $u\geq0$ сходимость с вероятностью единица.

Можно использовать и бернулиевскую схему для оценки вероятности неразорения с помощью формул (10), (11). Для $k=1,\ldots,K$ моделируется бернулиевская случайная величина n_k момента первого успеха с вероятностью успеха на каждом шаге $p=1-\alpha\mu/c$ и затем наблюдаются независимые одинаково распределенные случайные величины $x_{k1},\ldots,x_{kn_k}$ с функцией распределения (5). Тогда в силу закона больших чисел оценка вероятности неразорения имеет вид $\varphi^K(u)=(1/K)\sum_{k=1}^{K}\xi_k(u)$, где $\xi_k=I(u-\sum_{i=1}^{n_k}x_{ki})$ или $\xi_k=G(u-\sum_{i=1}^{n_k-1}x_{ki})$ (по определению $\sum_{i=1}^{0}x_{ki}=0$).

Теорема 1 (о равномерной сходимости оценок Монте-Карло). С вероятностью единица для оценок (12)–(14) выполнено

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\varphi-\varphi^N\right\|=\lim_{N\to\infty}\sup_{u\geq0}|\varphi(u)-\varphi^N(u)|=0.$$

Доказательство. Пусть $\xi_n(u)$ задаются формулой (13), тогда для любых наборов $\{x_{nk}\}$ оценку (12) можно переписать в виде

$$\varphi^N(u)=(1/N)\sum_{n=1}^{N}\xi_n(u)=(1/N)\sum_{n=1}^{N}(1-q)(1+\sum_{k=1}^{\infty}q^k I\{u-x_{n1}-\ldots-x_{nk}\})=$$

$$=(1-q)(1+\sum_{k=1}^{\infty}q^k(1/N)\sum_{n=1}^{N}I\{u-x_{n1}-\ldots-x_{nk}\}).$$

В силу (10) и тождества $1=(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}q^k$ справедливо неравенство

$$\sup_{u\geq0}|\varphi^N(u)-\varphi(u)|\leq$$

$$\leq(1-q)\sum_{k=1}^{\infty}q^k\sup_{u\geq0}\left|(1/N)\sum_{n=1}^{N}I\{u-x_{n1}-\ldots-x_{nk}\}-E_x I\{u-x_1-\ldots-x_k\}\right|. \quad (15)$$

В силу теоремы Гливенко–Кантелли [17] с вероятностью единица эмпирические функции распределения равномерно сходятся к истинной функции распределения, поэтому для каждого k с вероятностью единица

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{u\ge 0}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} I(u-x_{1n}-\ldots-x_{kn})-E_x I(u-x_1-\ldots-x_k)\right|=0. \qquad (16)$$

Вероятность того, что (16) имеет место для совокупности $k=1,2,\ldots$, очевидно также равна единице. Переходя к пределу в (15) по $N\to\infty$ и внося предел под знак суммы (что допустимо, так как ряд в (15) сходится равномерно по N), с учетом (16) получаем, что с вероятностью единица

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{u\ge 0}|\varphi^N(u)-\varphi(u)|=0.$$

Пусть теперь $\xi_n(u)$ задаются формулой (14). Тогда оценка (12) может быть переписана в виде

$$\varphi^N(u)=(1/N)\sum_{n=1}^{N}\xi_n(u)=(1/N)\sum_{n=1}^{N}(1-q)(1+\sum_{k=1}^{\infty}q^k G(u-x_{n1}-\ldots-x_{n(k-1)}))=$$
$$=(1-q)(1+\sum_{k=1}^{\infty}q^k(1/N)\sum_{n=1}^{N}G(u-x_{n1}-\ldots-x_{n(k-1)})). \qquad (17)$$

Аналогично (15) в силу (11) справедливо неравенство

$$\sup_{u\ge 0}|\varphi^N(u)-\varphi(u)|\le$$

$$\le(1-q)\sum_{k=1}^{\infty}q^k\sup_{u\ge 0}\left|(1/N)\sum_{n=1}^{N}G(u-x_{n1}-\ldots-x_{n(k-1)})-E_x G(u-x_1-\ldots-x_{(k-1)})\right|. \qquad (18)$$

Аналогично [35, Lemma 29.1]

$$\sup_{u\ge 0}\left|(1/N)\sum_{n=1}^{N}G(u-x_{n1}-\ldots-x_{n(k-1)})-E_x G(u-x_1-\ldots-x_{(k-1)})\right|\le$$

$$\le\sup_{u\ge 0,\, w\ge 0}\left|(1/N)\sum_{n=1}^{N}I_{\{G(u-x_{n1}-\ldots-x_{n(k-1)})>w\}}-P_x\{G(u-x_1-\ldots-x_{(k-1)})>w\}\right|, \qquad (19)$$

где $I_{\{\cdot\}}$ и $P_x\{\cdot\}$— соответственно индикатор и вероятность события $\{\}$. В силу монотонности функции распределения G для каждого фиксированного w множества $\{x^{k-1}=(x_1,\ldots,x_{(k-1)}):G(u-x_1-\ldots-x_{(k-1)})>w\}$ выпуклы. Обозначим C_{k-1} класс выпуклых множеств в евклидовом пространстве R^{k-1}. Из (19) следует, что

$$\sup_{u\ge 0}\left|(1/N)\sum_{n=1}^{N}G(u-x_{n1}-\ldots-x_{n(k-1)})-E_x G(u-x_1-\ldots-x_{(k-1)})\right|\le$$

$$\le\sup_{S\in C_{k-1}}\left|(1/N)\sum_{n=1}^{N}I_{\{(x_{n1},\ldots,x_{n(k-1)})\in S\}}-P_x\{S\}\right|\to 0, \qquad (20)$$

где правая часть в (20) стремится к нулю с вероятностью единица при $N\to\infty$ для каждого k в силу равномерного на классе выпуклых множеств закона больших чисел [17, Приложение 1]. Очевидно, это имеет место и для совокупности $k=2,3,\ldots$ Теперь переходя в (18) к пределу по $N\to\infty$ и внося предел под знак суммы, с учетом (20) получаем утверждение теоремы для оценок (14). Теорема доказана.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Решение уравнения (2) можно найти методом последовательных приближений

$$\varphi^{k+1}(u) = 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \varphi^k(u-z)[1-F(z)]dz, \text{ k} = 0,1, \ldots, \tag{21}$$

где $\varphi^0(u)$ — некоторая начальная функция. Все функции $\varphi^k(u)$ считаются определенными на интервале $[0, +\infty)$. Заметим, что для нахождения $\varphi^{k+1}(u)$ достаточно знать $\varphi^k(u)$ на интервале $[0, u]$. Для ограниченных на интервале $[0, \infty)$ функций $f(u)$ определим норму $\|f\| = \sup_{u \geq 0} |f(u)|$.

Теорема 2 (о сходимости метода последовательных приближений). Если $\mu = \int_0^{+\infty} (1-F(z))dz < \infty$, $\alpha\mu / c < 1$, функция $\varphi^0(u)$, $u \in [0, +\infty)$, не убывает с ростом u и удовлетворяет условию $0 \leq \varphi^0(u) \leq 1$, то:

1) все $\varphi^k(u)$ непрерывны и не убывают на интервале $[0, +\infty)$, $1 - \alpha\mu / c \leq \varphi^k(u) \leq 1$, $k \geq 1$;

2) последовательность $\{\varphi^k(u)\}$ равномерно сходится к решению φ исходного уравнения (2) со скоростью геометрической прогрессии, а именно $\|\varphi^k - \varphi\| \leq q^{k-1}$, $q = \alpha\mu / c < 1$;

3) предельная функция $\varphi(u) = \lim_{k \to \infty} \varphi^k(u)$ непрерывна и не убывает, кроме того, $1 - \alpha\mu / c \leq \varphi(u) \leq 1$.

Доказательство. Уравнение Вольтерра (2) всегда имеет единственное решение. Докажем сходимость метода последовательных приближений к этому решению.

1. Функция $\varphi^0(u-z)[1-F(z)]$ монотонна (не возрастает) по z, поэтому интегрируема по Риману (см. [36]). Значит, $\varphi(u)$ непрерывна и монотонно не убывает. По индукции все $\varphi^k(u)$, $k \geq 1$, непрерывны и не убывают. Заметим, что $\mu = \int_0^{+\infty} (1-F(z))dz$. Если $0 \leq \varphi^k(u) \leq 1$, то справедливы неравенства

$$1 - \frac{\alpha\mu}{c} \leq \varphi^{k+1}(u) \leq 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \varphi^k(u-z)[1-F(z)]dz \leq 1.$$

Таким образом, по индукции следует, что $1 - \alpha\mu / c \leq \varphi^{k+1}(u) \leq 1$, $k \geq 1$.

2. Оценим скорость сходимости процесса последовательных приближений. Справедливо

$$\varphi^{k+1}(u) = 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \varphi^k\left(u-z\right)[1-F\left(z\right)]dz, \ k = 0,1,\ldots,$$

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \varphi\left(u-z\right)[1-F\left(z\right)]dz.$$

Отсюда

$$\varphi^{k+1}(u) - \varphi(u) = \frac{\alpha}{c}\int_0^u (\varphi^k\left(u-z\right) - \varphi(u))[1-F\left(z\right)]dz,$$

$$\left\|\varphi^{k+1} - \varphi\right\| \leq \frac{\alpha}{c}\int_0^u \left\|\varphi^k - \varphi\right\| [1-F\left(z\right)]dz \leq \frac{\alpha}{c}\int_0^{+\infty}[1-F\left(z\right)]dz \cdot \left\|\varphi^k - \varphi\right\| =$$

$$= \frac{\alpha\mu}{c} \cdot \left\|\varphi^k - \varphi\right\| = \left(\frac{\alpha\mu}{c}\right)^k \left\|\varphi^0 - \varphi\right\|.$$

3. Предельная функция $\varphi(u)$ непрерывна и монотонна, $1-\alpha\mu / c \le \varphi(u) \le 1$, как равномерный предел непрерывных и монотонных функций $\varphi^k(u)$ таких, что $1-\alpha\mu / c \le \varphi^k(u) \le 1$. Теорема доказана.

Лемма 1. Если:

1) $\varphi^0(u) \equiv \varphi(0) = 1-\alpha\mu / c$, тогда итерационная последовательность $\{\varphi^k(u)\}$ монотонно возрастает;

2) $\varphi^0(u) \equiv 1$, тогда последовательность $\{\varphi^k(u)\}$ монотонно убывает.

Доказательство. 1. Для $\varphi^0(u) = 1-\alpha\mu / c$ справедливо утверждение

$$\varphi^1(u) = 1-\frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \varphi^0(u-z)[1-F(z)]\,dz \ge 1-\frac{\alpha\mu}{c} = \varphi^0(u).$$

Имеет место

$$\varphi^{k+1}(u)-\varphi^k(u) = \frac{\alpha}{c}\int_0^u (\varphi^k(u-z)-\varphi^{k-1}(u-z))[1-F(z)]dz. \qquad (22)$$

Таким образом, очевидно, если $\varphi^k(u) \le \varphi^{k-1}(u)$ $\forall u \in [0,\infty)$, то $\varphi^{k+1}(u) \ge \varphi^k(u)$ $\forall u \in [0,\infty)$. Первое утверждение доказано.

2. Пусть $\varphi^0(u) \equiv 1$, тогда

$$\varphi^1(u) = 1-\frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \varphi^0(u-z)[1-F(z)]dz = 1-\frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u [1-F(z)]dz \le$$

$$\le 1-\frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^{+\infty} [1-F(z)]dz = 1 = \varphi^0(u).$$

По индукции из неравенства (22) следует, что $\varphi^k(u) \le \varphi^{k-1}(u)$ $\forall u \in [0,\infty)$, $k > 0$. Таким образом, при старте с начальной функции $\varphi^0(u) = 1$ или $\varphi^0(u) = 1-\alpha\mu / c$ итерационный процесс монотонно сходится к решению исходного интегрального уравнения.

Лемма 2. Если начальная функция $\varphi^0(u) = 1$, то для всех k имеет место $\lim\limits_{u\to\infty} \varphi^k(u) = 1$.

Доказательство. Представим $u = u_1 + u_2$, $u_1 \ge 0, u_2 \ge 0$. В силу теоремы 2 все $\varphi^k(u)$ не убывают по *u*, поэтому

$$\int_0^u \varphi^k(u-z)[1-F(z)]dz \ge \int_0^{u_1} \varphi^k(u_1+u_2-z)[1-F(z)]dz \ge$$

$$\ge \int_0^{u_1} \varphi^k(u_2)[1-F(z)]dz = \varphi^k(u_2)\int_0^{u_1}[1-F(z)]dz.$$

Предположим, что $\lim\limits_{u\to\infty} \varphi^k(u) = 1$. Пусть $u = u_1 + u_2 \to \infty$ и $u_1 \to \infty$, $u_2 \to \infty$. Тогда

$$1 \ge \lim_{u\to\infty} \varphi^{k+1}(u) = \lim_{u\to\infty}\left(1-\frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \varphi^k(u-z)[1-F(z)]dz\right) \ge$$

$$\ge 1-\frac{\alpha\mu}{c} + \lim_{u\to\infty}\varphi^k(u)\cdot \lim_{u\to\infty}\frac{\alpha}{c}\int_0^u [1-F(z)]\,dz = 1-\frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha\mu}{c} = 1,$$

отсюда по индукции следует, что $\lim\limits_{u\to\infty} \varphi^k(u) = 1$ для всех k.

Следствие 1. Если $\varphi^0(u) \equiv 1$, то для всех k приближения $\varphi^k(u)$ являются монотонными (не убывающими) непрерывными функциями такими, что $1 - \alpha\mu / c = \varphi^k(0) \le \varphi^k(u) \le 1$ и $\lim\limits_{u \to \infty} \varphi^k(u) = 1$.

Лемма 3. Если $\varphi^k(u) \ge 1 - e^{-Ru}$ для всех $u \ge 0$, то и $\varphi^{k+1}(u) \ge 1 - e^{-Ru}$ для любого $u \ge 0$, где R – константа Лундберга, являющаяся корнем уравнения (6).

Доказательство. Пусть $\varphi^k(u) \ge 1 - e^{-Ru}$, тогда

$$\varphi^{k+1}(u) \ge 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u (1 - e^{-R(u-z)})(1 - F(z))dz =$$

$$= 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \big(1 - F(z)\big)dz - e^{-Ru}\,\frac{\alpha}{c}\int_0^u e^{Rz}\big(1 - F(z)\big)dz =$$

$$= 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \big(1 - F(z)\big)dz + \frac{\alpha}{c}\int_u^{+\infty} e^{R(z-u)}\big(1 - F(z)\big)dz - e^{-Ru}\,\frac{\alpha}{c}\int_0^{+\infty} e^{Rz}\big(1 - F(z)\big)dz \ge$$

$$\ge 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \big(1 - F(z)\big)dz + \frac{\alpha}{c}\int_u^{+\infty} \big(1 - F(z)\big)dz - e^{-Ru} =$$

$$= 1 - e^{-Ru} - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^{+\infty} \big(1 - F(z)\big)dz = 1 - e^{-Ru}\,.$$

Следствие 2. Если $\varphi^0(u) \equiv 1$, то $\varphi^k(u) \ge 1 - e^{-Ru}$ для всех $u \ge 0$, $k \ge 1$.

Следствие 3. Если $\varphi^0(u) = 1 - e^{-Ru}$, то последовательность функций $\{\varphi^k(u)\}$ монотонно возрастает и сходится снизу к решению $\varphi(u)$ уравнения (2).

Замечание 1. Отметим, что аналитическое решение (4) находится методом последовательных приближений (21) при начальной функции $\varphi^0(u) \equiv 0$.

Замечание 2. Метод последовательных приближений применим не только для оценки риска разорения, но и для решения многочисленных задач оценки надежности [1, 9–11], сводящихся к решению интегрального уравнения восстановления вида

$$Z(u) = z(u) + \int_0^u Z(u - z)dP(z),\ \ u \ge 0, \tag{23}$$

где $Z(u)$ – неизвестная функция, $z(u) \ge 0$ – заданная функция, $P(\cdot)$ – известная (возможно, несобственная) функция распределения, $P(z) = 0$ при $z < 0$. Уравнение (2) является частным случаем (23) при $P(z) = \frac{\alpha}{c}\int_0^z (1 - F(x))dx$, $z(u) = 1 - \frac{\alpha\mu}{c}$.

Аналогично (21) метод последовательных приближений для решения уравнения (23) имеет вид

$$Z^{k+1}(u) = z(u) + \int_0^u Z^k(u - z)dP(z),\ k = 0, 1, \ldots, \tag{24}$$

где $Z^0(u)$ – некоторое начальное приближение, например $Z^0(u) \equiv 0$ или $Z^0(u) \equiv 1$. При условии $z(u) + P(u) \le 1$ аналогично лемме 1 последовательность $\{Z^k(u)\}$, стартующая с $Z^0(u) \equiv 0$, монотонно возрастает, а стартующая с $Z^0(u) \equiv 1$, монотонно убывает и поточечно сходится к решению уравнения (23). Для несобственного уравнения восстановления имеем $P(+\infty) < 1$, поэтому правая часть уравнения (23) является оператором сжатия с коэффициентом $P(+\infty)$. В этом случае аналогично теореме 2 метод (24) при $z(u) \le Z^0(u) \le 1$ равномерно по $u \ge 0$ сходится к решению уравнения (23) с геометрической скоростью сходимости с показателем $q = P(+\infty) < 1$.

В [19] численная реализация метода (21) основывалась на высокоточном численном нахождении интеграла (3) функции $\varphi(u)$, заданной значениями в узлах неравномерной сетки и вычисляемой путем интерполяции для других точек.

Рассмотрим более общий, чем (21) метод последовательных приближений, в котором оператор в правой части изменяется от одной итерации к другой

$$\varphi^{k+1}(u) = A_k \varphi^k(u),\ 0 \le \varphi^0(u) \le 1,\ k = 0, 1, \dots, \tag{25}$$

где линейные операторы A_k различны, но в некотором смысле близки к оператору A, а именно выполнены следующие предположения. Пусть Φ — множество ограниченных на $[0,\infty)$ монотонных функций f с нормой $\|f\| = \sup_{x\ge 0} |f(x)|$.

Предположение 1. Операторы A_k в уравнении (25) удовлетворяют условиям:

а) $A_k : \Phi \to \Phi$;

б) существует оператор A такой, что $A_k \varphi^k(u) = A\varphi^k(u) + \delta_k(u)$, где $\lim\sup_{k\to\infty} \|\delta_k\| = \lim\sup_{k\to\infty} \sup_{u\ge 0} |\delta_k(u)| = \delta \ge 0$;

в) предельный оператор A линейный, нерастягивающий, монотонный и является сжатием в следующем смысле:

существует число q, $0 \le q < 1$, такое, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ выполнено неравенство $\|A\varphi\| \le q\|\varphi\|$.

Ввиду предположения 1б, допускающего ошибки при численном интегрировании, метод последовательных приближений (25) уже может быть немонотонным.

Теорема 3 (о равномерной сходимости метода последовательных приближений). Если выполнено предположение 1, то метод последовательных приближений (25), стартующий с начального монотонного приближения $\varphi^0(u)$ такого, что $0 \le \varphi^0(u) \le 1$, равномерно сходится к решению $\varphi(u)$ задачи (2), т.е.

$$\lim\sup_{k\to\infty} \rho(\varphi^k, \varphi) = \lim\sup_{k\to\infty} \sup_{u\ge 0} \left| \varphi^k(u) - \varphi(u) \right| \le \delta/(1-q).$$

Доказательство. Согласно теореме 1 решение $\varphi(u)$ задачи (2) существует и единственно. В силу предположения 1а все последовательные приближения являются монотонными функциями. Обозначим $\rho(\varphi,\psi) = \sup_{u\ge 0} |\varphi(u) - \psi(u)|$, $\varepsilon_k = \rho(\varphi^k, \varphi)$.

Справедливы оценки

$$\begin{aligned} \rho(\varphi^{k+1}, \varphi) &= \rho(A_k\varphi^k, \varphi) = \rho(A\varphi^k + \delta_k, \varphi) \le \\ &\le \rho(A\varphi^k, \varphi) + \rho(A\varphi^k, A\varphi^k + \delta_k) \le \rho(A\varphi^k, \varphi) + \|\delta_k\|. \end{aligned} \tag{26}$$

Вследствие предположения 1в справедливо $\rho(A\varphi^k, \varphi) \le q \cdot \rho(\varphi^k, \varphi)$; следовательно, неравенство (26) можно переписать в виде

$$\varepsilon_{k+1} \le q\varepsilon_k + \|\delta_k\|, \quad k \ge 0, \tag{27}$$

где $0 \le q < 1$ и $\lim\sup_{k\to\infty} \|\delta_k\| = \delta$. Из неравенства (27) следует, что для любого $k \ge k_0 \ge 0$

$$\varepsilon_{k+1} \le q^{k-k_0} \varepsilon_{k_0} + \sum_{i=k_0}^{k-1} q^{k-i-1} \|\delta_k\| \le q^{k-k_0} \varepsilon_{k_0} + \sup_{k\ge k_0} \|\delta_k\| / (1-q).$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\{\varepsilon_k\}$ ограничена, $\sup_k \varepsilon_k \le C$ и

$$\varepsilon_{k+1} \le q^{k-k_0} C + \sup_{k\ge k_0} \|\delta_k\| / (1-q). \tag{28}$$

Переходя к пределу в (28), получаем

$$\lim\sup_{k\to\infty} \varepsilon_k \le \sup_{k\ge k_0} \|\delta_k\| / (1-q).$$

Так как k_0 можно взять как угодно большим и $\lim\limits_{k_0\to\infty}\ \sup\limits_{k\ge k_0}\|\delta_k\|\le\delta$, то $\limsup\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k\le\delta/(1-q)$. Теорема доказана .

СТОХАСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

В [21, 22] рассмотрен процесс риска с дивидендным барьером, а для нахождения вероятности разорения на конечном интервале времени применен метод последовательных приближений с использованием различных методик приближенного вычисления интегралов, в частности метода Монте-Карло (без обоснования). В данном разделе для вычисления интегралов в итеративной схеме используется метод Монте-Карло. Для доказательства сходимости метода последовательных приближений в данном виде используется равномерный функциональный закон больших чисел. В отличие от [21, 22] в настоящей статье используется неравномерная адаптированная к задаче плотность вероятности испытаний в методе Монте-Карло.

В случае аппроксимации интегралов методом Монте-Карло метод последовательных приближений (уже стохастический) имеет вид

$$\varphi^{k+1}(u)=1-q+\frac{q}{N_k}\sum_{n=1}^{N_k}\varphi^k(u-z_n^k), \tag{29}$$

где $q=(\alpha\mu)/c$; N_k – возрастающая последовательность целых положительных чисел; случайные величины $\{z_n^k,\ n=1,\ldots,N_k,\ k=0,1,\ldots\}$ независимы и одинаково распределены с функцией распределения (5). Обозначим $A_k\varphi(u)=1-\dfrac{\alpha\mu}{c}+\dfrac{\alpha\mu}{cN_k}\sum\limits_{n=1}^{N_k}\varphi^k(u-z_n^k)$,

$$\delta_k(u)=\frac{\alpha\mu}{cN_k}\sum_{n=1}^{N_k}\varphi^k(u-z_n^k)-\frac{\alpha\mu}{c}\int_0^\infty\varphi^k(u-z)\,dG(z)=A_k\varphi^k(u)-A\varphi^k(u). \tag{30}$$

Лемма 4. Если $\lim\limits_{k\to\infty}N_k/\ln k=+\infty$, то с вероятностью единица

$$\lim_{k\to\infty}\|\delta_k\|=\lim_{k\to\infty}\sup_{u\ge0}|\delta_k(u)|=0.$$

Доказательство. Обозначим $q=\alpha\mu/c$, $P_G\{\varphi^k(u-z)>w\}=$ $=\int\limits_0^\infty I_{\{z\ge0:\,\varphi^k(u-z)>w\}}dG(z)$. Аналогично работе [35, Lemma 29.1] оценим

$$\left|\delta_k(u)\right|=q\left|\frac{1}{N_k}\sum_{n=1}^{N_k}\varphi^k(u-z_n^k)-\int_0^\infty\varphi^k(u-z)\,dG(z)\right|=$$

$$=q\left|\int_0^\infty\left(\frac{1}{N_k}\sum_{n=1}^{N_k}I_{\{z\ge0:\,\varphi^k(u-z_n^k)>w\}}-P_G\{\varphi^k(u-z)>w\}\right)dw\right|\le$$

$$\le q\sup_{w>0}\left|\frac{1}{N_k}\sum_{n=1}^{N_k}I_{\{z\ge0:\,\varphi^k(u-z_n^k)>w\}}-P_G\{\varphi^k(u-z)>w\}\right|.$$

Отсюда

$$\|\delta_k\|=\sup_{u\ge0}\left|\delta_k(u)\right|\le q\sup_{u\ge0,\,w>0}\left|\frac{1}{N_k}\sum_{n=1}^{N_k}I_{\{z\ge0:\,\varphi^k(u-z_n^k)>w\}}-P_G\{\varphi^k(u-z)>w\}\right|.$$

Обозначим $F_k=\sigma\{z_n^i,\ 1\le n\le N_i,\ 1\le i\le k\}$ σ-алгебру, порожденную случайными величинами $\{z_n^i,1\le n\le N_i,1\le i\le k\}$. Оценим вероятность

$$P\left\{\|\delta_k\|\ge\varepsilon\right\}\le P\left\{q\sup_{u\ge0,\,w>0}\left|\frac{1}{N_k}\sum_{n=1}^{N_k}I_{\{z\ge0:\,\varphi^k(u-z_n^k)>w\}}-P_G\{\varphi^k(u-z)>w\}\right|\ge\varepsilon\right\}=$$

$$=EP\left\{\sup_{u\ge0,\,w>0}\left|\frac{1}{N_k}\sum_{n=1}^{N_k}I_{\{z\ge0:\,\varphi^k(u-z_n^k)>w\}}-P_G\{\varphi^k(u-z)>w\}\right|\ge\frac{\varepsilon}{q}\middle|F_{k-1}\right\},$$

где E — знак математического ожидания, $P\{\}$ и $P\{\cdot|F_{k-1}\}$ — знаки вероятности и условной вероятности. Функция $\varphi^k(u-z)$ убывает по z, поэтому множества $S_{u,w}^k=\{z\ge0:\ \varphi^k(u-z)>w\}$ являются конечными интервалами с нулевой левой границей. Согласно [37, Гл. 10, §3] множество интервалов $S^k=\{S_{u,w}^k,\ u\ge0,\ 0\le w\le1\}$ имеет функцию роста $m^{S^k}(l)=l+1$, поэтому [35, Theorem 10.2]

$$P\left\{\sup_{u\ge0,\,w>0}\left|\frac{1}{N_k}\sum_{n=1}^{N_k}I_{\{z\ge0:\,\varphi^k(u-z_n^k)>w\}}-P_G\{\varphi^k(u-z)>w\}\right|\ge\frac{\varepsilon}{q}\middle|F_{k-1}\right\}\le$$

$$\le6m^{S^k}(2N_k)\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(N_k-1)}{4q^2}\right\}\le12(N_k+1)\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(N_k-1)}{4q^2}\right\}.$$

Таким образом,

$$P\left\{\|\delta_k\|\ge\varepsilon\right\}\le12(N_k+1)\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(N_k-1)}{4q^2}\right\}.$$

В предположениях леммы 4 выполнен критерий сходимости к нулю с вероятностью единица последовательности $\left\{\|\delta_k\|\right\}$, а именно для любого $\varepsilon>0$

$$\sum_{k=0}^{\infty}P\left\{\|\delta_k\|\ge\varepsilon\right\}\le12\sum_{k=0}^{\infty}(N_k+1)\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(N_k-1)}{4q^2}\right\}<+\infty.$$

Лемма доказана.

Теорема 4 (сходимость стохастического метода последовательных приближений). Пусть $\alpha\mu/c<1$. Тогда при условии $\lim\limits_{k\to\infty}N_k/\ln k=+\infty$ метод последовательных приближений (29) с начальной функцией $0\le\varphi^0(u)\le1$ равномерно сходится с вероятностью единица к решению $\varphi(u)$ задачи (2).

Доказательство. При условии $\alpha\mu/c<1$ уравнение (2) имеет единственное решение. Очевидно, что все операторы A_k являются монотонными и $A_k:\Phi\to\Phi$. Определим $\delta_k(u)$ согласно (30). В силу леммы 4 $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\delta_k\right\|=0$ с вероятностью единица. Теперь сходимость метода с вероятностью единица следует из теоремы 4. Теорема доказана.

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Пример 1. Пусть $F(z)=\varepsilon(1-\exp(-\varepsilon z))+(1-\varepsilon)(1-\exp(-z))$, $\mu=\int\limits_0^{+\infty}\left(1-F(z)\right)dz=$ $=2-\varepsilon$. Обозначим $q=\alpha\mu/c$, тогда $\alpha/c=q/\mu$, вероятность небанкроства $\varphi(u)$ зависит от начального капитала u и двух параметров: q и μ. Возьмем $\varepsilon=1-q=0{,}1$.

Метод последовательных приближений (21) для решения уравнения (2) можно записать в виде

$$\varphi^{k+1}(u)=1-q+\frac{q}{\mu}\int\limits_0^u\varphi^k\left(u-z\right)[1-F\left(z\right)]\,dz,\ k=0,1,\ldots \tag{31}$$

Если $\varphi^0(u) \equiv 1$, то согласно лемме 1 последовательность приближений монотонно убывает, а согласно лемме 2 $\lim_{u \to +\infty} \varphi^k(u) = 1$. Если $\varphi^0(u) \equiv \varphi(0) = 1 - q$, то согласно лемме 1 последовательность приближений монотонно возрастает и сходится к решению уравнения (2) снизу. Согласно теореме 2 априорная оценка точности приближений имеет вид

$$\max_{u \geq 0} \left| \varphi(u) - \varphi^k(u) \right| \leq q^{k-1} = \varepsilon_{k-1}.$$

Например, $\varepsilon_{45} \approx 0.0087$, $\varepsilon_{65} \approx 0.0011$.

На рис. 1 полученное решение $\varphi^{65}(u)$ изображено жирной штриховой линией. Стохастический метод последовательных приближений в данном примере имеет вид (29). Ход итераций метода, в котором $N_1 = 50$, $N_{2-10} = 10$, $N_{11} = 11, \ldots$ $\ldots, N_{50} = 50$, показан тонкими линиями; приближенное решение $\varphi^{50}(u)$ изображено жирной сплошной линией.

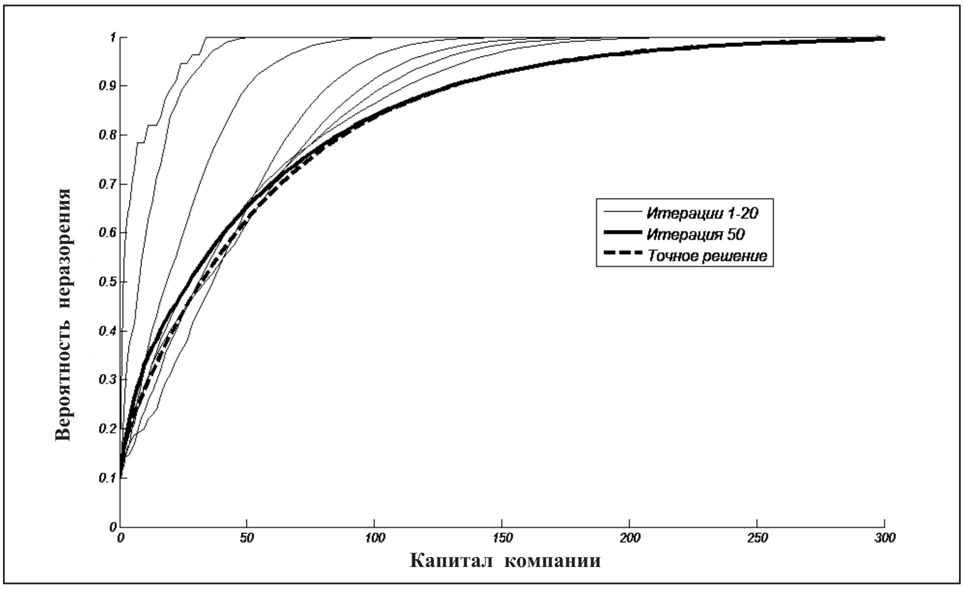

Рис. 1. Итерации метода стохастических последовательных приближений

В табл. 1 сравнивается точность детерминированного и стохастического методов последовательных приближений на примере 1. Следует отметить, что стандартное отклонение в стохастичском методе (29) получено при 100 прогонах метода.

Таблица 1

Приближенное решение / точность метода	Результаты расчетов при начальном капитале		
	$u = 50$	$u = 100$	$u = 200$
Приближенное решение $\varphi^{65}(u)$, найденное методом (31)	0.6272	0.8354	0.9680
Ошибка детерминированного метода (31), $\varepsilon_{65} \approx 0.0011$	0.0011	< 0.0011	< 0.0011
Стандартное отклонение для $\varphi^{50}(u)$ в стохастическом методе (29)	0.0152	0.0103	0.0038
Среднеквадратичная ошибка метода (12), (14) при $N = 100$ [13]	0.14	0.09	0.028

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известно, что вероятности банкротства $\psi(u)$ и небанкротства $\varphi(u)$ классического процесса риска, как функции начального капитала u, а также вероятность обрыва процесса восстановления удовлетворяют интегральным уравнениям восстановления (типа Вольтерра). Решение уравнения восстановления может быть выписано аналитически в виде бесконечной суммы сверток некоторой функции распределения (формула Полачека–Хинчина). Это представление может быть использовано для аналитико-статистических оценок решения уравнения. Однако уравнение восстановления является специальным уравнением Вольтерра, поэтому его решение может быть найдено методом последовательных приближений Пикара. Как известно, метод Пикара для интегральных уравнений Вольтерра сходится на каждом конечном интервале значений u в силу принципа сжимающих отображений. В общем случае сжатие имеет место только после нескольких итераций, поэтому гарантированная сходимость метода при больших u является медленной. Однако для рассматриваемого уравнения Вольтерра, которому удовлетворяет $\varphi(u)$, сжатие имеет место на каждой итерации с коэффициентом $q<1$ равномерно по всем $u \in [0, +\infty)$, что обеспечивает высокую скорость сходимости при всех u. В настоящей статье детально исследованы свойства последовательных приближений для нахождения вероятности небанкротства $\varphi(u)$ классического процесса риска. Метод последовательных приближений позволяет находить как численные, так и аналитические приближенные решения для вероятности φ как функции u и других параметров процесса, в частности формула Полачека-Хинчина получается методом последовательных приближений при старте с нулевой начальной функции. Показано, что при старте с начальных функций $\varphi^0(u) \equiv 1$ и $\varphi^0(u) \equiv \varphi(0) = 1-q$ последовательные приближения монотонно сходятся к решению $\varphi(u)$ соответственно сверху и снизу. При старте с начальной функции $\varphi^0(u) \equiv 1$ все последовательные приближения $\varphi^k(u)$ удовлетворяют условию $\varphi^k(u) \geq 1-e^{-Ru}$, где $R>0$ — константа Лундберга (если таковая имеется). Рассмотрены варианты метода последовательных приближений с приближенным вычислением интегралов. В этом случае метод перестает быть монотонным. При использовании оценок Монте-Карло для интегралов метод становится стохастическим. Для обоснования его сходимости используется равномерный функциональный закон больших чисел (являющийся обобщением теоремы Гливенко–Кантелли о равномерной сходимости эмпирических функций распределения). Все полученные результаты применимы для задач оценки надежности, сводящихся к решению несобственного уравнения восстановления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967. — Т. **2**. — 752 с.
2. Beard R.E., Pentikäinen T., Pesonen E. Risk theory. The stochastic basis of insurance. 3-rd edition. — London; New York: Chapman and Hall, 1984. — 408 p.
3. Эмбрехтс П., Клюппельберг К. Некоторые аспекты страховой математики // Теория вероятностей и ее применения. — 1991. — **38**, вып. 2. — С. 374–417.
4. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко Я.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. — К.: Інформтехніка, 1995. — 380 с.
5. Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T. Modelling extremal events for insurance and finance. — Berlin; Heidelberg: Springer, 1997. — 648 p.
6. Asmussen S. Ruin probabilities. — Singapore: World Scientific, 2000. — 385 p.
7. Bening V.E., Korolev V.Yu. Generalized Poisson models and their applications in insurance and finance. — Utrecht: VSP, 2002. — 434 p.
8. Бондарев Б.В. Математические модели в страховании. — Донецк: АПЕКС, 2002. — 116 с.
9. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Методы расчета высоконадежных систем. — М.: Радио и связь, 1988. — 176 с.
10. Калашников В. В. Количественные оценки в теории надежности. — М.: Знание, 1989. — 48 с.
11. Шпак В.Д. Аналитико-статистические оценки для обрывающихся процессов восстановления и их эффективность // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 1. — С. 138–156.

12. Croux K., Veraverbeke N. Nonparametric estimators for the probability of ruin // Insurance: Math. Econ. — 1990. — N 9. — P. 127–130.
13. Наконечный А.Н. Оценка Монте-Карло для вероятности разорения в сложной пуассоновской модели теории риска // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 6. — С. 160-162.
14. Shiu E.S.W. Calculation of the probability of eventual ruin by Beekman's convolution series // Insurance: Math. Econ. — 1988. — N 7. — P. 41–47.
15. Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Непараметрическое оценивание вероятности разорения для обобщенных процессов риска // Теория вероятностей и ее применение. — 2003. — **47**, вып. 1. — С. 1–16.
16. Brown M., Solomon H.. Stephens M.A. Monte Carlo simulation of the renewal function // J. Appl. Probab. — 1981. — **18.** — P. 426–434.
17. Боровков Л.Л. Математическая статистика. — М.: Наука, 1984. — 472 с.
18. Виноградов О.П. Об одном элементарном методе получения оценок вероятности разорения // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 1998. — **5**, вып. 1. — С. 134–140.
19. Норкин Б.В. О методе последовательных приближений для вычисления вероятности банкротства классического процесса риска // Теорія оптимальних рішень. — 2003. — № 2. — С. 10–18.
20. Норкин Б.В. Необходимые и достаточные условия существования и единственности решений интегральных уравнений страховой математики // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5. — С. 157–164.
21. Albrecher H., Kainhofer R. Risk theory with a non-linear dividend barrier // Computing. — 2002. — **68,** N 4. — P. 289–311.
22. Albrecher H., Kainhofer R., Tichy R.F. Simulation methods in ruin models with non-linear dividend barriers // Mathematics and Computers in Simulation. — 2003. — **62.** — P. 277–287.
23. Sundt B., Teugels J.L. Ruin estimates under interest force // Insurance: Math. Econ. — 1995. — **16.** — P. 7–22.
24. Dickson D.C.M., Waters H.R. Ruin probabilities with compounding assets // Ibid. — 1999. — **25.** — P. 49–62.
25. Panjer H.H. Recursive calculation of a family of compound distributions // ASTIN Bulletin. — 1981. — **12.** — P. 22–26.
26. Goovaerts M., De Vijylder F. A stable recursive algorithm for evaluation of ultimate ruin probabilities // Ibid. — 1984. — **14.** — P. 53–59.
27. Panjer H.H. Direct calculation of ruin probabilities // J. of Risk and Insurance. — 1986. — **53.** — P. 521–529.
28. Dickson D.C.M. Recursive calculation of the probability and severity of ruin // Insurance: Math. Econ. — 1989. — **8.** — P. 145–148.
29. Dickson D.C.M., Waters H.R. Recursive calculation of survival probabilities // ASTIN Bulletin. — 1991. — **21.** — P. 199–221.
30. Ramsay C.M. Improving Goovaerts' and De Vylder's stable recursive algorithm // Ibid. — 1992. — **22.** — P. 51–59.
31. Panjer H.H., Wang S. On the stability of recursive formulas // Ibid. — 1993. — **23.** — P. 227–258.
32. Dickson D.C.M., Egidio dos Reis A.D., Waters H.R. Some stable algorithms in ruin theory and their application // Ibid. — 1995. — **25.** — P. 153–175.
33. Ramsay C.M., Usábel M. Calculating ruin probabilities via product integration // Ibid. — 1997. — **27** (2). — P. 263–271.
34. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 544 с.
35. Devroye L., Gyorfi L., Lugosi G. A probabilistic theory of pattern recognition. — New York: Springer, 1996. — 634 p.
36. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
37. Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов. Статистические проблемы обучения. — М.: Наука, 1974. — 416 с.

Поступила 19.12.2007