УДК 519.927:519.25

К.Р. АЙДА-ЗАДЕ, С.З. КУЛИЕВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ[1]

Ключевые слова: *обратная задача, параметрическая идентификация, система обыкновенных дифференциальных уравнений, численные методы, разрывные динамические процессы.*

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе исследован класс параметрических обратных задач относительно динамических процессов, описываемых системами дифференциальных уравнений с обыкновенными производными, вид которых, как и значения кусочно-постоянных параметров, меняется в зависимости от принадлежности состояния самого процесса той или иной подобласти пространства состояний. В рассматриваемой задаче идентифицируемыми являются как значения кусочно-постоянных параметров, участвующих в дифференциальных уравнениях, так и поверхности, определяющие границы подобластей неизменности вида дифференциальных уравнений и постоянства значений параметров. Такие задачи возникают в медицине (компьютерной томографии), геофизике, при управлении техническими объектами и технологическими процессами с учетом влияния на процесс изменяющейся окружающей среды. Задачи оптимального управления подобными процессами исследовались, например, в [1–6], и рассматриваемую ниже задачу можно было бы исследовать, применеяя результаты этих работ, если они не идентифицировались, а были заданы поверхности переключения (разрыва) системы дифференциальных уравнений. В настоящей работе относительно конечно-разностной задачи, аппроксимирующей исходную задачу, получены формулы для компонент градиента по идентифицируемым параметрам для выбранного критерия идентификации. Полученные формулы градиента функционала позволяют использовать для численного решения рассматриваемых задач эффективные методы конечномерной оптимизации первого порядка в пространстве идентифицируемых параметров. Приводятся результаты численных экспериментов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть динамика идентифицируемого процесса описывается в общем случае разрывной системой нелинейных дифференциальных уравнений (с переменной структурой) следующего типа:

$$x(t)=\begin{cases} f_1(x(t),p^1), \text{ если } x(t)\in X^1(t), \\ f_2(x(t),p^2), \text{ если } x(t)\in X^2(t),\ t\in(0,T], \\ \ldots\ldots \\ f_L(x(t),p^L), \text{ если } x(t)\in X^L(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-мерная вектор-функция, определяющая состояние процесса; $p^l \in E^{r_l}$ — значения параметров, когда состояние процесса принадлежит $\mathrm{X}^l(t)$-подобласти (зоны) фазового пространства всевозможных состояний процесса X, т.е. $\mathrm{X}^l(t)\subset \mathrm{X}\subseteq E^n$, $l=1,\ldots,L$. Заданные с точностью до параметров p^l вектор-функции $f_l(.,.)$, $l=1,\ldots,L$, являются непрерывно-дифференцируемыми по всем своим аргументам. Подобласти

$$\begin{gathered} \mathrm{X}^l(t)=\{x\in E^n: g^{l-1}(x,t)>0,\ g^l(x,t)\le 0\},\ l=2,3,\ldots,L-1,\ t\in[0,T], \\ \mathrm{X}^1(t)=\{x\in E^n: g^1(x,t)\le 0\},\ X^L(t)=\{x\in E^n: g^{L-1}(x,t)>0\},\ t\in[0,T], \end{gathered} \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке INTAS (проект № 06-1000017-8909).

задаются своими границами, определенными непрерывно-дифференцируемыми скалярными функциями $g^l(x,t)$, $l=1,2,\ldots,L-1$, причем должны быть выполнены следующие очевидные условия:

$$\mathrm{X}^{l_1}(t)\cap\mathrm{X}^{l_2}(t)=0,\ \ l_1\neq l_2,\, l_1,l_2=1,2,\ldots,L,\ \ \bigcup_{l=1}^{L}\mathrm{X}^l(t)=X\subseteq E^n,\ t\in[0,T]. \quad (3)$$

Вектор-функция $x(t)$ — решение системы (1), предполагается всюду непрерывно-дифференцируемой, кроме моментов времени $\overline{t_l}$ попадания траектории на поверхность разрыва правых частей $g_l(x(\overline{t_l}))=0,\ l=1,2,\ldots,L-1$. В этих точках для некоторых координат $x_\xi(t), 1\le\xi\le n$, траектории вместо гладкости удовлетворяются некоторые другие условия, следующие из естественных физических соображений, выражающиеся в выполнении для этих координат вектора $x(t)$ условий скачка, например вида

$$x_\xi(\overline{t_l}+0)=\theta_\xi^l x_\xi(\overline{t_l}-0)+\eta_\xi^l, \quad (4)$$

где θ_ξ^l, η_ξ^l определяются, как правило, параметрами p^{l-1} и p^l. Отметим, что при численных расчетах учет этого скачка не вызывает особых проблем, более сложным является определение самих моментов времени $\overline{t_l}, l=1,2,\ldots,L-1$.

Введем обозначения:

$$g(x,t)=(g^1(x,t),\ldots,g^{L-1}(x,t)),$$
$$p=(p^1,\ldots,p^L)=(p_1^1,\ldots,p_{r_1}^1,\ldots,p_{r_L}^L)\in E^r,\ \ r=\sum_{l=1}^{L}r_l.$$

Как правило, идентифицируемые значения p^l в реальных задачах должны удовлетворять каким-либо ограничениям, исходящим из технических и технологических соображений. Обозначим множества допустимых зональных значений параметров p^l через $P^l\subset E^{r_l}, l=1,\ldots,L$, которые предполагаются замкнутыми и ограниченными, $P=P^1\times P^2\times\ldots\times P^L$.

Предположим, что для решения рассматриваемой задачи идентификации математической модели процесса (1) было проведено N независимых наблюдений за его динамикой при различных начальных состояниях

$$x^i(0)=x_0^i,\ i=1,2,\ \ldots,\ N. \quad (5)$$

При этом текущее состояние процесса будет зависеть как от его начального состояния x_0, так и от функций $g^l(x,t), l=1,2,\ldots,L-1$, определяющих области $\mathrm{X}^l(t), l=1,\ldots,L$, и соответствующих зональных значений параметров $p=(p^1,p^2,\ldots,p^L)$, т.е. $x(t)=x(t;x_0,p,g)$. Ясно, что начальные состояния объекта и зональные значения параметров независимы.

Результатами наблюдений могут быть какие-либо компоненты или весь вектор состояния в отдельные моменты времени

$$x^i(t_{ij};x_0^i,p,g)=x^{ij},\ t_{ij}\in(0,T],\ j=1,2,\ \ldots,\ N_i,\ i=1,2,\ \ldots,\ N, \quad (6)$$

в частности в конечный момент времени T

$$x^i(T;x_0^i,p,g)=x_T^i,\ i=1,2,\ldots,N, \quad (7)$$

где N_i — количество моментов времени, при которых за состоянием объекта с начальным условием x_0^i проводились наблюдения. Могут наблюдаться состояния объекта при различных начальных условиях в некоторых промежутках времени:

$$x^i(t;x_0^i,p,g)=y^{ij}(t),\ t\in[\tau_{ij-1},\tau_{ij}]\subset[0,T],\ \tau_{ij-1}\tau_{ij},\ \ j=1,2,\ldots,N_i,\ i=1,2,\ldots,N, \quad (8)$$

где N_i — количество временных интервалов при начальном состоянии x_0^i, при которых проводились наблюдения за объектом. Наблюдения могут быть также и смешанного типа, т.е. как точечные (6) или (7), так и интервальные (8).

Исследуемая задача идентификации заключается в определении $(L-1)$-мерной вектор-функции $g(x,t)$ и значений параметров $p \in E^r$ из условий (1)–(5) и дополнительных условий наблюдения (6), (7) или (8). Для каждого типа наблюдения (6)–(8) должен быть выбран соответствующий критерий качества идентификации. Например, в случае наблюдений вида (7), используя среднеквадратичный критерий качества, исследуемую задачу идентификации можно привести к задаче параметрического оптимального управления, заключающуюся в минимизации при условиях (1), (2), (5) функционала [1, 7]:

$$J(p,g) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_i(p,g) + R(p,g;\, p^0, g^0), \tag{9}$$

$$I_i(p,g) = \left\| x^i(T; x_0^i, p, g) - x_T^i \right\|_{E^n}^2,$$

$$R(p,g;\, p^0, g^0) = \varepsilon_1 \left\| p - p^0 \right\|_{E^r}^2 + \varepsilon_2 \left\| g(x,t) - g^0(x,t) \right\|_{L^2}^2.$$

Второе слагаемое в (9) введено для регуляризации функционала, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — параметры регуляризации; $p^0 \in E^r$ и $g^0(.,.) \in E^{L-1}$ — заданные желаемые значения идентифицируемых векторов параметров и функции.

Учитывая, что поскольку идентифицируемыми, кроме неизвестного конечномерного вектора параметров p, являются также функции $g^l(x,t)$, $l = 1, 2, \ldots, L-1$, то поставленная задача идентификации в общем случае не имеет единственного решения при любом конечном числе наблюдений N. Поэтому в данной работе предлагается параметризировать неизвестные идентифицируемые функции $g^l(x,t)$, $l = 1, 2, \ldots, L-1$, с помощью какой-либо известной конечной системы линейно-независимых функций $\{\varphi_i(x,t)\}$, $i = 1, \ldots, \bar{\nu}$, используя представления функций $g^l(x,t)$, $l = 1, 2, \ldots, L-1$, в виде

$$g^l(x,t) = g^l(x,t,\alpha) = \sum_{i=1}^{\nu_l} \alpha_i^l \varphi_i(x,t),\; l = 1, \ldots, L-1,\; \nu = \sum_{l=1}^{L-1} \nu_l,\; \bar{\nu} = \max_{1 \le l \le L-1} \nu_l, \tag{10}$$

где $\alpha = (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{\nu_1}^1, \ldots, \alpha_{\nu_{L-1}}^{L-1}) \in E^\nu$. В этом случае задача идентификации функций $g^l(x,t)$, $l = 1, 2, \ldots, L-1$, заменяется идентификацией коэффициентов α. При этом решение задачи Коши (1), (5), как и функционал (9), зависит от параметров $z = (p, \alpha)$, т.е. $x(t) = x(t; x_0, z)$.

Для обеспечения единственности решения полученной задачи параметрической идентификации необходимо соблюдение определенных соотношений между числом наблюдений и числом идентифицируемых параметров. Например, в случае N наблюдений за полным вектором начальных и конечных состояний объекта необходимо, чтобы выполнялось неравенство $N \ge (\nu + r)/n$.

В случае возможности наблюдений за траекторией в промежуточные моменты времени число наблюдений может быть меньшим. И наоборот, если не все координаты начальных и конечных состояний наблюдаемы, т.е. имеются, например, наблюдения

$$x_j^i(0) = x_{0j}^i,\; j = 1, 2, \ldots, n_{0i},\; n_{0i} \le n,$$

$$x_j^i(T) = x_{Tj}^i,\; j = 1, 2, \ldots, n_{Ti},\; n_{Ti} \le n,$$

то, учитывая наличие неизвестных параметров, для возможности решения двухточечной задачи относительно (1) должно быть выполнено условие $n_{0i} + n_{Ti} \ge n$, $i = 1, 2, \ldots, N$, а общее число наблюдений N, как несложно подсчитать, должно удовлетворять неравенству $\sum_{i=1}^{N} (n_{0i} + n_{Ti} - n) \ge (\nu + r)$.

Таким образом, далее в работе будет рассматриваться задача параметрической идентификации относительно конечномерного вектора $z=(p,\alpha)\in E^{r+\nu}$, представляющая собой, с одной стороны, задачу параметрического оптимального управления, а с другой стороны, ее можно считать задачей конечномерной оптимизации специального вида (класса). Далее в работе будут получены формулы для компонент градиента функционала (9): $\nabla J(z)=(\nabla_p J(z)),\nabla_\alpha J(z))$, которые позволяют формулировать необходимые условия оптимальности первого порядка, а также использовать для решения задачи идентификации (1), (2), (5), (7), (9) известные эффективные численные методы первого порядка и готовые программные средства [7].

2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Пусть $z=(p,\alpha)$ — произвольный допустимый вектор значений идентифицируемых параметров. Получим формулы компонент градиента целевого функционала соответствующей конечномерной аппроксимированной задачи. Из независимости значений наблюдаемых начальных условий x_0^i, $i=1, 2, \ldots, N$, ясно, что

$$\nabla_z J(z)=\sum_{i=1}^{N}\nabla_z I_i(z)+\nabla_z R(z;z^0), \tag{11}$$

поэтому получим формулы для одного какого-либо начального значения (5), опустив при этом индекс *i*.

Разобьем интервал $[0,T]$ на равномерные отрезки M точками $t_j=jh$, $j=0,1,\ldots,M$, $h=T/M$. Для решения задачи Коши относительно системы (1) для начальных условий (5) при различных $i=1,2,\ldots,N$ для простоты изложения и во избежание громоздких формул используем явную схему метода Эйлера с равномерным шагом, за исключением состояний, когда траектория системы приближается к очередной поверхности переключения [8–10].

Итак, пусть траектория находится в s-й зоне. Тогда по методу Эйлера имеем

$$x^{j+1}=x^j+hf_s(x^j,p_s),\ j=\mu_{s-1}+1,\ldots,\mu_s, \tag{12}$$

где μ_s — номер шага метода Эйлера, при котором траектория приближается непосредственно к s-й поверхности переключения, т.е.

$$g^s(x^{\mu_s},t_{\mu_s})<0,\ g^s(x^{\mu_s+1},t_{\mu_s+1})\ge 0,\quad s=1,2,\ldots,L-1. \tag{13}$$

Возможны случаи неоднократного прохождения траектории через некоторые зоны. Предлагаемые ниже подход и формулы могут использоваться и в этом случае.

Не умаляя общности, предполагается, что порядок расположения зон $X^1,X^2,\ldots,X^L$ соответствует движению по траектории с какой-либо начальной точкой $x(0)=x_0$. Тогда $\mu_0=0$, $\mu_{s-1}<\mu_s$, $s=1,2,\ldots,L$, $\mu_L=M$.

На μ_s-м шаге метода Эйлера разделим h на две части: h_1^s,h_2^{s+1} так, что $h=h_1^s+h_2^{s+1}$ и точка

$$x^{\mu_s+1}=x^{\mu_s}+h_1^s(x^{\mu_s},p_s,\alpha^s)\cdot f_s(x^{\mu_s},p_s) \tag{14}$$

лежит на s-й поверхности переключения, т.е.

$$g^s(\bar{x}^{\mu_s+1},\bar{t}_{\mu_s+1},\alpha)=0,\ \bar{t}_{\mu_s+1}=\bar{t}_s,\ s=1,2,\ldots,L-1. \tag{15}$$

Далее, для

$$h_2^{s+1}=h-h_1^s(x^{\mu_s},p_s,\alpha^s) \tag{16}$$

имеет место

$$x^{\mu_s+1}=\bar{x}^{\mu_s+1}+h_2 f_{s+1}(\bar{x}^{\mu_s+1},p_{s+1}). \tag{17}$$

У переменных h_1^s, h_2^{s+1} иногда будем опускать верхние индексы и аргументы, где их значения очевидны. Отметим, что определение значения шага h_1^s, зависящее от состояния траектории x^{μ_s} и параметров p_s, α^s, с заданной точностью из условий (14), (15) после выполнения условия (13) можно выполнить с помощью метода золотого сечения или деления отрезка пополам.

Если для некоторой координаты $x_\xi(t)$, $1 \le \xi \le n$, вектора-функции $x(t)$ на поверхности $g_s(\bar{x}(\bar{t}_s)) = 0$ имеет место условие скачка (4), то ясно, что для этой координаты вместо (17) должно использоваться соотношение

$$x_\xi^{\mu_s+1} = \theta_\xi^s \bar{x}_\xi^{\mu_s+1} + \eta_\xi^s + h_2 f_{s+1,\xi}(\bar{x}_1^{\mu_s+1}, \ldots, \theta_\xi^s \bar{x}_\xi^{\mu_s+1} + \eta_\xi^s, \ldots, \bar{x}_n^{\mu_s+1}, p_{s+1}). \quad (18)$$

Таким образом, при заданных значениях идентифицируемых параметров траектория системы определяется формулами (12), (14), (17). С учетом параметризации неизвестной функции $g(x,t,\alpha)$ по формуле (10) для получения формулы для градиента функционала

$$J(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left\| x^{iM} - x_T^i \right\|_{E^n}^2 + \varepsilon_1 \left\| p - p^0 \right\|_{E^r}^2 + \varepsilon_2 \left\| \alpha - \alpha^0 \right\|_{E^\nu}^2 \quad (19)$$

дискретизированной задачи, точнее, для $I_i(z) = \left\| x^{iM} - x_T^i \right\|_{E^n}^2$ (далее индекс i, где его значение не принципиально, будем опускать) используем подход, предложенный в [8–10].

Введем n-мерный вектор импульсов:

$$\psi^j = dI(z)/dx^j, \ j = 0,1,\ldots,M. \quad (20)$$

Здесь производная понимается как полная с учетом зависимостей (12), (14) и (17), т.е. влияние изменения состояния x^j на все последующие состояния траектории, в том числе и на значения моментов времени попадания на поверхности переключения, определяемые величинами шагов h_1, h_2.

Из (12) очевидно следует

$$\psi^M = \frac{dI(z)}{dx^M} = 2(x^M - x_T), \quad (21)$$

$$\psi^j = \frac{\partial x^{j+1}}{\partial x^j} \frac{dI(z)}{dx^{j+1}} = \left[E + h \frac{\partial f_s(x^j, p_s)}{\partial x^j} \right] \psi^{j+1}, \ \mu_{s-1} + 1 < j \le \mu_s, \ s = 1,\ldots,L. \quad (22)$$

Здесь вычисление значений импульсов проводится в обратном направлении по j от M до 1, а s — от L до 1. Вычислим значения импульсов в точках траектории в окрестности поверхностей переключения, т.е. определим

$$\bar{\psi}^{\mu_s+1} = \frac{dI(z)}{d\bar{x}^{\mu_s+1}}, \psi^{\mu_s} = \frac{dI(z)}{dx^{\mu_s}}.$$

Пользуясь определением (20) и зависимостями (14)–(17), имеем:

$$\bar{\psi}^{\mu_s+1} = \frac{dI}{d\bar{x}^{\mu_s+1}} = \left[E + h_2(x^{\mu_s}, p_s, \alpha^s) \frac{\partial f_{s+1}(\bar{x}^{\mu_s+1}, p_{s+1})}{\partial \bar{x}^{\mu_s+1}} \right] \psi^{\mu_s+1}, \quad (23)$$

$$\psi^{\mu_s} = \frac{dI}{dx^{\mu_s}} = \frac{\partial \bar{x}^{\mu_s+1}}{\partial x^{\mu_s}} \bar{\psi}^{\mu_s+1} + \frac{\partial x^{\mu_s+1}}{\partial x^{\mu_s}} \psi^{\mu_s+1} =$$

$$= \left\{ E + \frac{\partial h_1(x^{\mu_s}, p_s, \alpha^s)}{\partial x^{\mu_s}} [f_s(x^{\mu_s}, p_s)]^T + h_1(x^{\mu_s}, p_s, \alpha^s) \frac{\partial f_s(x^{\mu_s}, p_s)}{\partial x^{\mu_s}} \right\} \bar{\psi}^{\mu_s+1} +$$

$$+ \frac{\partial h_2(x^{\mu_s}, p_s, \alpha^s)}{\partial x^{\mu_s}} \left[f_{s+1}(\bar{x}^{\mu_s+1}, p_{s+1}) \right]^T \psi^{\mu_s+1}. \quad (24)$$

При выполнении условия скачка (4) для какой-либо ξ-й координаты вектора $x(t)$ на поверхности $g_s(x(\overline{t_s}))=0$ из соотношения (18) вместо (23) для этой координаты будем иметь

$$\overline{\psi}_{\xi}^{\mu_s+1}=\left[\theta_{\xi}^{s}+h_2(x^{\mu_s},p_s,\alpha_s)\frac{\partial f_{s+1,\xi}(\overline{x}^{\mu_s+1},p_{s+1})}{\partial\overline{x}_{\xi}^{\mu_s+1}}\right]\psi_{\xi}^{\mu_s+1}.$$

Получим формулы для $\partial h_1(x^{\mu_s},p_s,\alpha^s)/\partial x^{\mu_s}$. Линеаризуем поверхность переключения $g^s(x,t)$ в окрестности точки $(\overline{x}^{\mu_s+1},\overline{t}_{\mu_s+1})$ такой, что выполняется (15):

$$g^s(x,t,\alpha)=g^s(\overline{x}^{\mu_s+1},\overline{t}_{\mu_s+1},\alpha)+$$

$$+\left[\frac{\partial g^s(\overline{x}^{\mu_s+1},\overline{t}_{\mu_s+1},\alpha)}{\partial x}\right]^T(x-\overline{x}^{\mu_s+1})+\frac{\partial g^s(\overline{x}^{\mu_s+1},\overline{t}_{\mu_s+1},\alpha)}{\partial t}(t-\overline{t}_{\mu_s+1})=$$

$$=\sum_{j=1}^{\nu}\alpha_j^s\left\{\varphi_j(\overline{x}^{\mu_s+1},\overline{t}_{\mu_s+1})+\left[\frac{\partial\varphi_j(\overline{x}^{\mu_s+1},\overline{t}_{\mu_s+1})}{\partial x}\right]^T(x-\overline{x}^{\mu_s+1})+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\varphi_j(\overline{x}^{\mu_s+1},\overline{t}_{\mu_s+1})}{\partial t}(t-\overline{t}_{\mu_s+1})\right\}.$$

Введя обозначения

$$A_i=\sum_{j=1}^{\nu_s}\alpha_j^s\frac{\partial\varphi_j(\overline{x}^{\mu_{s+1}},\overline{t}_{\mu_s+1})}{\partial x_i},\ i=1,2,\ldots,n,\ A_{n+1}=\sum_{j=1}^{\nu_s}\alpha_j^s\frac{\partial\varphi_j(\overline{x}^{\mu_s+1},\overline{t}_{\mu_s+1})}{\partial t},$$

$$A_{n+2}=\sum_{j=1}^{\nu_s}\alpha_j\left\{\varphi_j(\overline{x}^{\mu_s+1},\overline{t}_{\mu_s+1})-\left[\frac{\partial\varphi_j(\overline{x}^{\mu_s+1},\overline{t}_{\mu_s+1})}{\partial x}\right]^T\overline{x}^{\mu_s+1}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\varphi_j(\overline{x}^{\mu_s+1},\overline{t}_{\mu_s+1})}{\partial t}\overline{t}_{\mu_s+1}\right\},$$

будем иметь $g^s(x,t;\alpha)=\sum_{i=1}^{n}A_ix_i+A_{n+1}t+A_{n+2}$. Ясно, что $g^s(\overline{x}^{\mu_s+1},\overline{t}_{\mu_s+1};\alpha)=$ $=(A,\overline{x}^{\mu_s+1})+A_{n+1}\overline{t}_{\mu_s+1}+A_{n+2}=0$, где $A=(A_1,A_2,\ldots,A_n)^T$, $h_1=\overline{t}_{\mu_s+1}-t_{\mu_s}$, $h_2=t_{\mu_s+1}-\overline{t}_{\mu_s+1}$. Подставляя формулу (14), получаем

$$(A,x^{\mu_s})+(A,h_1(x^{\mu_s},p_s,\alpha^s)f_s(x^{\mu_s},p_s))+A_{n+1}\overline{t}_{\mu_s+1}+A_{n+2}=0. \qquad (25)$$

Дифференцируя (25) по x^{μ_s} и учитывая, что $\dfrac{\partial h_1}{\partial x^{\mu_s}}=\dfrac{\partial\overline{t}_{\mu_s+1}}{\partial x^{\mu_s}}$, имеем

$$\left\{E+\frac{\partial h_1(x^{\mu_s},p_s,\alpha^s)}{\partial x^{\mu_s}}[f_s(x^{\mu_s},p_s)]^T+h_1(x^{\mu_s},p_s,\alpha^s)\frac{\partial f_s(x^{\mu_s},p_s)}{\partial x^{\mu_s}}\right\}A+$$

$$+A_{n+1}\frac{\partial h_1(x^{\mu_s},p_s,\alpha^s)}{\partial x^{\mu_s}}=0,$$

$$\frac{\partial h_1(x^{\mu_s},p_s,\alpha^s)}{\partial x^{\mu_s}}=-\frac{\left(E+h_1(x^{\mu_s},p_s,\alpha^s)\dfrac{\partial f_s(x^{\mu_s},p_s)}{\partial x^{\mu_s}}\right)}{(A,f_s(x^{\mu_s},p_s))+A_{n+1}}A. \qquad (26)$$

Здесь предполагается, что в точке $\bar{x}^{\mu_s+1}$ в момент времени $\bar{t}_{\mu_s+1}=t_s$ пересечения траекторией системы поверхности $g^s(x,t)=0$ выполнено условие

$$(A, f_s(\bar{x}^{\mu_s}, p_s))+A_{n+1}=(\Delta_x g(\bar{x}^{\mu_s}, \bar{t}_{\mu_s+1}), f_s(\bar{x}^{\mu_s+1}, p_s))+\frac{\partial g(\bar{x}^{\mu_s+1}, \bar{t}_{\mu_s+1})}{\partial t}\neq 0,$$

$$s=1,2,\ \ldots,\ L-1,$$

т.е. траектория системы $x(t)$ нигде и никогда «не скользит» по поверхности переключения $g^s(x,t)=0, s=1,2,\ \ldots,\ L-1$. Рассмотрение случая, когда часть траектории системы $[\bar{x}_{\mu_s+1}, \tilde{x}_{\mu_s+1}]$ на интервале времени $[\bar{t}_s, \tilde{t}_s]=[\bar{t}_{\mu_s+1}, \tilde{t}_{\mu_s+1}]$ лежит на поверхности $g_s(x,t)=0$, потребовало бы дополнительных исследований и усложнения приводимых ниже формул, не представляющих принципиальных сложностей.

Подставляя (26) в (24), учитывая (16) и то, что

$$\frac{\partial h_2(x^{\mu_s}, p_s, \alpha^s)}{\partial x^{\mu_s}}=-\frac{\partial h_1(x^{\mu_s}, p_s, \alpha^s)}{\partial x^{\mu_s}},$$

имеем значение для импульса ψ^{μ_s} в последний момент времени до пересечения траектории $x(t)$ с s-й поверхностью переключения:

$$\psi^{\mu_s}=\left\{E+h_1(x^{\mu_s}, p_s, \alpha^s)\frac{\partial f_s(x^{\mu_s}, p_s)}{\partial x^{\mu_s}}\right\}\times$$

$$\times\left\{\bar{\psi}^{\mu_s+1}+\frac{A[(f_s(x^{\mu_s}, p_s), \bar{\psi}^{\mu_s+1})-(f_{s+1}(x^{\mu_s+1}, p_{s+1}), \psi^{\mu_s+1})]}{(A, f_s(x^{\mu_s}, p_s))+A_{n+1}}\right\}. \qquad (27)$$

Обратим внимание на следующее. Если в формуле (22) перейти к пределу при $h\to 0$, то для всех $j=\mu_{s-1}+1,\ldots,\mu_s$ имеет место $\lim\limits_{h\to 0}\left|\psi^j-\psi^{j+1}\right|=0$.

Если же перейти к пределу при $h\to 0$ в точках траектории системы, находящихся в непосредственной близости от поверхности переключения, т.е. в формулах (23), (27) для $j=\mu_s+1, s=1,2,\ldots,L-1$, то будем иметь

$$\lim_{h\to 0}\left|\psi^{\mu_s}-\bar{\psi}^{\mu_s+1}\right|=\frac{A\left\lfloor(f_s(x^{\mu_s}, p_s)-f_{s+1}(x^{\mu_s+1}, p_{s+1}), \bar{\psi}^{\mu_s+1})\right\rfloor}{(A, f_s(\bar{x}^{\mu_s+1}, p_s))+A_{n+1}}.$$

Отсюда видно, что в общем случае, когда или f_s отличается от f_{s+1}, или при их совпадении, если $p_s\neq p_{s+1}$, то импульсные переменные терпят разрыв при $j=\mu_s+1, s=1,2,\ldots,L-1$, т.е. в моменты времени перечесения траекторий $x(t)$ поверхностей $g^l(x,t)=0$, $l=1,2,\ldots,L-1$. Этот факт относительно свойства решения сопряженной системы для задач оптимального управления разрывными системами известен [1–6] и величина скачка значения сопряженной переменной определялась посредством множителей Лагранжа, т.е. введением дополнительных переменных. В предлагаемом выше подходе величина скачка определялась формулой (27) и дополнительные переменные не понадобились.

Искомые компоненты градиента функционала по параметрам p_s, как несложно понять, определяются формулой [11, 12]:

$$\frac{dI}{dp_s}=\sum_{j=\mu_{s-1}}^{\mu_s+1}\frac{\partial x^j}{\partial p_s}\frac{dI}{dx^j}=\sum_{j=\mu_{s-1}}^{\mu_s+1}\frac{\partial x^j}{\partial p_s}\psi^j. \qquad (28)$$

Ясно, что для $j=\mu_{s-1}+2,\ldots,\mu_s$ непосредственно из (12) имеем $\dfrac{\partial x^j}{\partial p_s}=h\dfrac{\partial f_s(x^{j-1},p_s)}{\partial p_s}$, для $\dfrac{\partial \bar{x}^{\mu_s+1}}{\partial p_s}$ из (14) имеем

$$\frac{\partial \bar{x}^{\mu_s+1}}{\partial p_s}=\frac{\partial h_1(x^{\mu_s},p_s,\alpha_s)}{\partial p_s}[f_s(x^{\mu_s},p_s)]^T+h_1(x^{\mu_s},p_s,\alpha_s)\frac{\partial f_s(x^{\mu_s},p_s)}{\partial p_s}. \quad (29)$$

Производную $\dfrac{\partial h_1}{\partial p_s}$ определим из условия (15) аналогично (26). Для этого продифференцируем (25) по p_s:

$$\left\{\frac{\partial h_1(x^{\mu_s},p_s,\alpha_s)}{\partial p_s}[f_s(x^{\mu_s},p_s)]^T+h_1(x^{\mu_s},p_s,\alpha_s)\frac{\partial f_s(x^{\mu_s},p_s)}{\partial p_s}\right\}A=0,$$

откуда имеем

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_s}=-\frac{\partial h_2}{\partial p_s}=-h_1^s\frac{\partial f_s(x^{\mu_s},p_s)}{\partial p_s}A/(A^T f_s(x^{\mu_s},p_s)+A_{n+1}). \quad (30)$$

Из (17) следует

$$\frac{\partial x^{\mu_s+1}}{\partial p_s}=-\frac{\partial h_1}{\partial p_s}[f_{s+1}(\bar{x}^{\mu_s+1},p_{s+1})]^T,\ \ \frac{\partial \bar{x}^{\mu_{s-1}+1}}{\partial p_s}=h_2^s\frac{\partial f_s(\bar{x}^{\mu_{s-1}+1},p_s)}{\partial p_s}. \quad (31)$$

Подставляя (29)–(31) в (28), получаем

$$\frac{dI}{dp_s}=h\sum_{j=\mu_{s-1}+2}^{\mu_s}\frac{\partial f_s(x^j,p_s)}{\partial p_s}\psi^j+h_2^s\frac{\partial f_s(\bar{x}^{\mu_{s-1}+1},p_s)}{\partial p_s}\psi^{\mu_{s-1}+1}+$$

$$+h_1^s\frac{\partial f_s(x^{\mu_s},p_s)}{\partial p_s}\bar{\psi}^{\mu_s+1}+h_1^s\frac{\partial f_s(x^{\mu_s},p_s)}{\partial p_s}A[f_{s+1}(\bar{x}^{\mu_s+1},p_{s+1})\psi^{\mu_s+1}-$$

$$-f_s(x^{\mu_s},p_s)\bar{\psi}^{\mu_s+1}]/(A^T f_s(x^{\mu_s},p_s)+A_{n+1}). \quad (32)$$

Замечание. Если траектория системы (1) при текущих значениях идентифицируемых параметров $z=(p,\alpha)$ неоднократно попадает в какую-либо зону, то полученные выше формулы изменятся несущественно, а именно, соотношения относительно импульсных переменных (21)–(27) останутся прежними. Пусть число прохождений траектории через зону X^s равно K, а номера шагов метода Эйлера при этом будут $\mu_{s-1}^k,\ldots,\mu_s^k$, $k=1,2,\ldots,K$. Тогда формула (28) примет следующий вид:

$$\frac{dI}{dp_s}=\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=\mu_{s-1}^k}^{\mu_s^k}\frac{\partial x^j}{\partial p_s}\psi^j. \quad (33)$$

Следовательно, формула (32) примет вид, в котором также будет участвовать двойная сумма, соответствующая (33).

Получим формулы для компонент градиента функционала по параметрам поверхностей переключения: $\nabla_\alpha J(z)$. Учтем, что значения α^s непосредственно влияют на изменение состояния системы только в точках непосредственной близости к поверхностям переключения посредством влияния на значения h_1^s,h_2^{s+1}. Тогда из (14), (17) с учетом (15) будем иметь

$$\frac{dI}{d\alpha^s}=\frac{\partial \bar{x}^{\mu_s+1}}{\partial\alpha^s}\frac{dI}{d\bar{x}^{\mu_s+1}}+\frac{\partial x^{\mu_s+1}}{\partial\alpha^s}\frac{dI}{dx^{\mu_s+1}}=$$

$$=\frac{\partial h_1^s}{\partial\alpha^s}[(f_s(x^{\mu_s},p_s),\bar{\psi}^{\mu_s+1})-(f_{s+1}(\bar{x}^{\mu_s+1},p_{s+1}),\psi^{\mu_s+1})]. \quad (34)$$

Получим формулу для $\partial h_1^s / \partial \alpha^s$. Из (10), (14), (15) имеем

$$g^s(\bar{x}^{\mu_s+1}, \bar{t}_{\mu_s+1}; \alpha) = \sum_{j=1}^{\nu_s} \alpha_j^s \varphi_j(x^{\mu_s} + h_1 f(x^{\mu_s}, p_s), t_{\mu_s} + h_1) = 0.$$

Дифференцируя это равенство по идентифицируемым параметрам α_i^s, имеем

$$\frac{\partial g^s(\bar{x}^{\mu_s+1}, \bar{t}_{\mu_s+1}, \alpha)}{\partial \alpha_i^s} = \varphi_i(\bar{x}^{\mu_s+1}, \bar{t}_{\mu_s+1}) +$$

$$+\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_i^s} \sum_{j=1}^{\nu_s} \alpha_j^s \left[\left(\frac{\partial \varphi_j(\bar{x}^{\mu_s+1}, \bar{t}_{\mu_s+1})}{\partial x}, f_s(x^{\mu_s}, p_s) \right) + \frac{\partial \varphi_j(\bar{x}^{\mu_s+1}, \bar{t}_{\mu_s+1})}{\partial t} \right] = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{dh_1^s}{d\alpha_i^s} = -\frac{\varphi_i(\bar{x}^{\mu_s+1}, \bar{t}_{\mu_s+1})}{\sum_{j=1}^{\nu_s} \alpha_j^s \left[\left(\frac{\partial \varphi_j(\bar{x}^{\mu_s+1}, \bar{t}_{\mu_s+1})}{\partial x}, f_s(x^{\mu_s}, p_s) \right) + \frac{\partial \varphi_j(\bar{x}^{\mu_s+1}, \bar{t}_{\mu_s+1})}{\partial t} \right]}.$$

Подставляя эту формулу в (34), в векторной форме несложно получить формулу

$$\frac{dI}{d\alpha^s} = -\frac{\varphi(\bar{x}^{\mu_s+1}, \bar{t}_{\mu_s+1})[(f_s(x^{\mu_s}, p_s), \bar{\psi}^{\mu_s+1}) - (f_{s+1}(\bar{x}^{\mu_s+1}, p_{s+1}), \psi^{\mu_s+1})]}{\alpha^s \left[\frac{\partial \varphi(\bar{x}^{\mu_s+1}, \bar{t}_{\mu_s+1})}{\partial x} \right]^T f_s(x^{\mu_s}, p_s) + \frac{\partial \varphi(\bar{x}^{\mu_s+1}, \bar{t}_{\mu_s+1})}{\partial t}}. \quad (35)$$

В целом после сведения исходной непрерывной задачи параметрической идентификации разрывной системы (1), (5), (9) к ее конечно-разностной аппроксимации задачей (12), (14), (17), (19) можно использовать полученные выше формулы и методы оптимизации первого порядка с использованием процедур проекции направления поиска на допустимую область.

В реальных расчетах решение задачи Коши вместо метода Эйлера (12) можно проводить более точными методами, например Рунге-Кутта. Но для точек траектории, находящихся в непосредственной окрестности поверхностей переключения, можно использовать схему метода Эйлера, а следовательно, и все полученные выше формулы для компонент градиента функционала в пространстве идентифицируемых параметров. Это несущественно ухудшает точность решения задачи Коши в целом, учитывая, что число поверхностей переключения, как правило, в реальных задачах невелико.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИХ АНАЛИЗ

Рассмотрим задачу параметрической идентификации движущегося объекта в «неоднородной» плоскости, описываемую следующей разрывной системой дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x, p^1), g(x) \le 0, \ t \in (0, T], \\ f_2(x, p^2), g(x) > 0, \end{cases} \quad (36)$$

где $x(t) \in E^4$ — состояние объекта; четырехмерные вектор-функции

$$f_1(x, p^1) = (x_1;\, p_1^1 x_1 + p_2^1 x_2 + 1;\, x_4;\, p_1^1 x_3 + p_2^1 x_4 + 1)^T,$$

$$f_2(x, p^2) = (x_1;\, p_1^2 x_1 + p_2^2 x_2 + 1;\, x_4;\, p_1^2 x_3 + p_2^2 x_4 + 1)^T,$$

определяющие закон движения объекта, заданы с точностью до неизвестных параметров соответственно: $p^1, p^2 \in E^2$. Для идентификации значений параметров p^1, p^2 и поверхности границы разрыва $g(x)=0$ имеются результаты наблюдений за начальными и конечными состояниями объекта пятидесяти различных траекторий, имеющих в качестве начальных состояний значения

$$x_{0i} = \left[0;\, 0{,}1(i-1);\, 0{,}1(i-1); 0.1(i-1)\right]^T \in E^4, \qquad i=1,2,\ldots,50, \tag{37}$$

и в качестве конечных состояний — значения траектории системы (36) при $T=2$.

Идентифицируемую поверхность разрыва правых частей системы дифференциальных уравнений будем искать в следующем виде:

$$g(x,t;\alpha)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\varphi_i(x)=0,\ \ \varphi_1(x)=x_1,\, \varphi_2(x)=x_3,\, \varphi_3(x)=1. \tag{38}$$

Для идентификации неизвестных параметров используем функционал

$$J(p,\alpha)=\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=1}^{4}[x_j^i(T)-x_{Tj}^i]^2+\varepsilon\,(|p|_{E^4}^2+|\alpha|_{E^2}^2), \tag{39}$$

где ε — параметр регуляризации, значение которого уменьшалось до 10^{-5}.

Значения траектории системы (36) в конечный момент времени получены решением задач Коши (36), (37) при следующих значениях параметров динамической системы (28): $z^*=(P^*,\alpha^*)=(1;-2;3;-4;1;0;-1{,}5)^T \in E^7$, которые, естественно, доставляют минимальное значение функционалу (39) при $\varepsilon \to 0$.

В табл. 1 приведены значения компонент градиента функционала в точке $z^0=(p^0,\alpha^0)=(0{,}8;-1{,}7;3{,}2;-4{,}3;1{,}4;0{,}2;-1{,}7)^T \in E^7$ пространства идентифицируемых параметров, вычисленные по предложенным в данной работе формулам, а также с применением разностной аппроксимации производных:

$$\frac{\partial J(z)}{\partial z_i}\approx\frac{J(z+\delta e_i)-J(z-\delta e_i)}{2\delta}, \tag{40}$$

где e_i — i-я координатная орта, $i=1,2,\ldots,7$. Значение δ существенно влияет на получаемые приближенные значения компонент градиента; в табл. 2 приведены результаты при наиболее хорошо подобранных значениях δ.

В табл. 1 приведены результаты минимизации функционала (39) с применением метода сопряженных градиентов с начальной точкой z^0, при этом полученное значение функционала $J^*=0.8676\cdot10^{-4}$ при точности метода сопряженных градиентов $\varepsilon_1=10^{-3}$, а точности одномерной минимизации $\varepsilon_2=10^{-4}$. Для решения прямой и сопряженной задач Коши для внутренних точек областей $X^1=\{x\in E^4:\ g(x)<0\}$ и $X^2=\{x\in E^4: g(x)>0\}$ использовался метод Рунге-Кутта четвертого порядка с шагом $h=0{,}01$, за исключением точек, близких к пересечению поверхности $g^l(x)=0,\ \ l=1,2,\ldots,L-1$.

Таблица 1

Параметры	Значения параметров		
	начальные	полученные	точные
p_1^1	0,8	1,00046	1
p_1^2	3,2	3,00001	3
p_2^1	–1,7	–1,9997	–2
p_2^2	–4,3	–4,00001	–4
α_1	1,4	1,00072	1
α_2	0,2	–0,0004	0
α_3	–1,7	–1,4997	–1,5

Таблица 2

Параметры	Значения производных		
	по формулам (32), (35)	по формуле (40) при $\delta = 10^{-6}$	по формуле (40) при $\delta = 10^{-8}$
p_1^1	84,97	86,59	85,45
p_2^1	16540,93	16712,52	16654,32
p_1^2	–56,98	–53,72	–55,13
p_2^2	3199,54	3231,77	3221,87
α_1	307,37	305,01	306,14
α_2	1592,56	1590,14	1591,31
α_3	440,49	442,02	439,99

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача конечномерной оптимизации, к которой приводится исходная задача, при наличии точных формул для вычисления компонент градиента целевого функционала по идентифицируемым параметрам не представляет сравнительно больших сложностей. Для ее решения имеются хорошо развитые стандартные программные средства, в частности пакеты прикладного программного обеспечения, такие как MatLab, MathCAD, Mapple и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961. — 391 с.
2. Троицкий В.А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями // ПММ. — 1962. — **26**, вып. 2.
3. Величенко В.В. О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями // Автоматика и телемеханика. — 1966. — № 7. — С. 20–29.
4. Brayson A., Yu-Chi Ho. Applied optimal control. — London, 1969. — 481 p.
5. Tadumadze T., Arsenashvili A. Optimal Control of delayed variable structure systems wit discontinues initial condition // The First Intern. Conf. on Control and Optimizat. with Industrial Appl. — Baku, 2005. — P. 92.
6. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. — Минск: Наука и техника, 1974. — 271 с.
7. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982. — 432 с.
8. Ермольев Б.М., Гуленко В.П. Конечно-разностный метод в задачах оптимального уравнения // Кибернетика. — 1967. — № 3. — С. 1–20.
9. Айда-заде К.Р. Исследование и численное решение конечно-разностных аппроксимаций задач оптимального управления распределенными системами // ЖВМ и МФ. — 1989. — № 3. — С. 346–354.
10. Айда-заде К.Р., Евтушенко Ю.Г. Быстрое автоматическое дифференцирование на ЭВМ // Математическое моделирование. — 1989. — № 1. — С. 121–139.
11. Айда-заде К.Р., Кулиев С.З. Об одной задаче синтеза управления для нелинейных систем // Автоматика и вычисл. техника. — 2005. — № 1. — С. 15–23.
12. Guliev S.Z. On a problem of parametrical identification of a dynamical system // 6-th Intern. ISAAC Congress. — Ankara, 2007. — 51 p.

Поступила 04.02.2008