ПРОГРАММНО-
ТЕХНИЧЕСКИЕ
КОМПЛЕКСЫ

О.В. ВЕРЁВКА, И.Н. ПАРАСЮК

УДК 519.9:681.3

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В НЕЧЕТКИХ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЯХ С НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

Ключевые слова: *байесовские сети, недетерминированные состояния, нечеткие оценки вероятностей, распространение вероятностей, нечеткая линейная интерполяция.*

ВВЕДЕНИЕ

Байесовская сеть (БС) — это абстрактная формальная модель, позволяющая описывать причинно-следственные связи исследуемых объектов и систем. В качестве причин и следствий выступают величины, природа которых, как правило, случайна, их количество — значительно, а взаимосвязи — многообразны. Установлено, что алгоритмы анализа таких моделей имеют экспоненциальную временную сложность. Это во многом определяет необходимость компьютеризации вычислительных процессов, а также целесообразность разработки новых типов моделей и эффективных алгоритмических средств их анализа.

Взаимосвязи причин и следствий оцениваются априори условными вероятностями (правдоподобиями) в общем случае или безусловными вероятностями, если оцениваемые величины — маргиналы, не являющиеся следствиями. Оценки вероятностей могут быть объективными, опирающимися на статистические данные экспериментов, либо субъективными, полученными экспертно. Суть задач, решаемых в процессе моделирования на БС, — осуществить апостериорное оценивание вероятностей целевых случайных величин модели, если известно, что некоторые величины, выступающие в роли свидетельств или симптомов, находятся в определенных состояниях. Процесс последовательного восстановления распределения вероятностей переменных всей БС называют распространением вероятностей. Методы распространения вероятностей во многом сходны с методами дедуктивного вывода в пространстве состояний с той лишь особенностью, что на каждом шаге распространения производится оценивание вероятностей, значения которых могут учитываться в процессе вывода. Наиболее строгое теоретическое обоснование для осуществления таких оценок дает теорема гипотез, более известная как теорема Байеса.

Формально БС — это граф $G=(X,S,P)$, состоящий из множества X вершин (случайных переменных) и множества ориентированных связей (дуг) S, нагруженный распределением вероятностей P для маргинальных вершин из X и связей S. Орграф G является ациклическим, что принципиально. Кроме того, для каждой случайной величины $x \in X$ определено множество $\psi_x = (\psi_x^1, \ldots, \psi_x^{n_x})$ ее состояний, образующих полную группу событий. В общем случае эти состояния могут быть дискретными или непрерывными, иметь детерминированный (вполне обусловленный) либо недетерминированный (например, стохастический или размытый) характер. В процессе анализа БС внимание уделяется прямым первородным связям типа отец — сын.

Решению принципиально важных вопросов алгоритмизации и компьютеризации БС с детерминированными состояниями в четком информационном пространстве посвящено значительное число работ, к которым, в первую очередь, следует отнести [1–3]. Исследованы и проверены временем также результаты компьютеризации простейших БС с недетерминированными состояниями и независимыми переменными [4].

Подход для оценивания вероятностей, основанный на органическом сочетании стохастической и лингвистической неопределенностей, позволяет комплексно учитывать факторы случайности и размытости и повышает достоверность результатов практического моделирования с помощью БС. Интересными и практически важными являются нечеткие БС с недетерминированными состояниями. Допустимые состояния переменных таких сетей покрывают диапазон изменений между двумя полярными опорными состояниями. Факт нахождения случайной величины в некотором допустимом состоянии характеризуется показателем определенности (фактором уверенности). Обычно это оценка некоторой величины, принимающей значения в рамках шкалы с началом в точке, соответствующей левому опорному состоянию (значению НЕТ, если показатель определенности связан с проявлением некоторого признака или свойства), и с концом в точке, соответствующей правому опорному состоянию (значению ДА). Оценка показателя определенности для опорных состояний является четкой, а для промежуточных — нечеткой. Оценки вероятностей для опорных состояний вычисляются в соответствии с соотношениями теории вероятностей, а для промежуточных состояний оценки вероятностей являются результатом интерполяции по вычисленным опорным величинам в соответствии со значением фактора определенности.

Неотъемлемой составляющей данного подхода является теоретическое обоснование базовых концептуальных понятий и соответствующих математических процедур нечеткого оценивания. Именно этим вопросам посвящается настоящая статья, которая опирается как на собственный опыт авторов [8, 9], так и на результаты других публикаций [5, 6, 10–13].

НЕЧЕТКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Напомним некоторые используемые ниже определения нечеткой математики [10–12]. Нечетким k-арным отношением Q, заданным на множествах (универсумах) $X_1, X_2, \ldots, X_k$, называется нечеткое множество на декартовом произведении этих универсумов: $Q = \{< x_1, x_2, \ldots, x_k >,\ \mu_Q(< x_1, x_2, \ldots, x_k >)\}$, где $\mu_Q(< x_1, x_2, \ldots, x_k >)$ — функция принадлежности (в дальнейшем — ф.п.) данного нечеткого отношения, $\mu_Q\colon X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \to [0,1]$, а $< x_1, x_2, \ldots, x_k >$ — кортеж из k элементов $x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2, \ldots,\ x_k \in X_k$. В случае $k=2$ отношение называется бинарным, а при $k=3$ — тернарным.

Бинарное нечеткое отношение $Q = \{< x_1, x_2 >,\ \mu_{Q(}\ < x_1, x_2 >)\}$, заданное на декартовом произведении $X_1 \times X_2$, называется нечетким отображением, если $\forall x_1 \in X_1$ существует не более одного $x_2 \in X_2$ с отличным от нуля значением функции принадлежности $\mu_Q(< x_1, x_2 >)$ [11].

Проекция (тень) нечеткого отношения $Q = \{< x_1, x_2 >, \mu_Q(< x_1, x_2 >)\}$, заданного на декартовом произведении $X_1 \times X_2$, на первый универсум X_1 (т.е. первая проекция) — это нечеткое множество $proj_{X_2}(Q) \equiv Q_{X_1} \subset X_1$ с функцией принадлежности $\mu_{Q_{X_1}}(x) = \sup\{\mu_Q(< x_1, x_2 >)\colon x_2 \in X_2\}$. Аналогично можно ввести понятие второй проекции на универсум X_2, а также проекций для k-арных отношений.

Выбор операций с нечеткими множествами [10–15] зависит от природы нечеткой информации. Для байесовских расчетов идеально подходят операции с очевидными вероятностными ассоциациями [13]: пусть $\oplus$ — знак одной из арифметических операций (+, −, × или /). Для нечетких величин X и Y, заданных на R^1 ф.п. $M_X(x)$ и $M_Y(y)$, результат $M_\oplus(z)$ соответствующей арифметической операции (сумма, разность, произведение или частное) определяется соотношением

$$M_\oplus(z) = \sup\{M_X(x) \times M_Y(y)\colon\ x \oplus y = z\}. \tag{1}$$

Для проведения вычислений более удобной является модификация указанного соотношения

$$M_{\oplus}(z) = \sup\{M_X(z \oplus^{-1} y) \times M_Y(y)\}, \tag{2}$$

где $\oplus^{-1}$ — операция, обратная $\oplus$.

Простейшие унарные операции определяются соотношением (1), когда одна из ф.п. ($M_X(x)$ или $M_Y(y)$) равна единице на точечном носителе, т.е. соответствующая величина является нормальной константой. Более сложные функциональные преобразования выполнимы в соответствии с принципом обобщения, суть которого состоит в следующем [10].

Пусть A — нечеткое множество на универсуме U и f: $U \to V$ — четкая функция $y = f(x)$. Согласно принципу обобщения образ нечеткого множества A под действием четкой функции f является нечетким множеством $f(A)$ на универсуме V с ф.п.

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup\{\mu_A(x) \mid y = f(x),\ x \in U\},\ y \in V \tag{3}$$

(естественно, если не существует такого $x \in U$, что $y = f(x)$, то $\mu_{f(A)}(y) = 0$).

Таким образом, окончательный результат — преобразование $f(x)$ можно получить двумя способами: в соответствии с (3) или как вторую проекцию нечеткого отношения $\{<x, f(x)>,\ \mu(x)\}$.

При выполнении вероятностных преобразований конструктивной является следующая модификация интерпретации нечеткой (размытой) величины Y: ф.п. $\mu_Y(x)$ является мерой того, что Y принимает значение $x \in R^1$; носитель размытой величины Y — множество $S_Y = \{x \in R^1\colon\ \mu_Y(x) \neq 0\}$. Приведенный подход предоставляет возможность перейти от рассуждений относительно множеств к манипуляциям с числовыми значениями, которые могут считаться величинами с субъективной мерой уверенности, задаваемой функцией принадлежности.

НЕЧЕТКИЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ИХ ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

При определении нечеткой оценки вероятности принципиально важным является обеспечение вероятностной корректности. Именно это обусловливает необходимость введения универсумов со структурой декартова произведения и определения нечеткой оценки вероятности как нечеткого отношения специального вида. Арифметические операции с нечеткими оценками вероятностей соответственно определяются как действия с компонентами нечетких отношений, специфические для декартовых произведений. В частности, предлагаемый подход позволяет манипулировать обратными и противоположными величинами нечетких оценок вероятностей, не нарушая вероятностных законов.

Рассмотрим общий случай. Пусть система находится в одном из N допустимых альтернативных состояний $A_1, A_2, \ldots, A_N$, образующих полную группу, т.е.

$$\sum_{n=1}^{N} P(A_n) = 1. \tag{4}$$

Тогда нечеткую вероятность текущей ситуации целесообразно определить как нечеткое N-арное отношение

$$\widetilde{P} = \{<x_1, x_2, \ldots, x_N>,\ \ \mu'(x_1, x_2, \ldots, x_N)\}, \tag{5}$$

$$\mu'\colon\ \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{N\ \text{множителей}} \to [0,1],$$

причем носитель ф.п. μ' в декартовой системе координат принадлежит «диагонали» единичного куба $[0,1] \times \ldots \times [0,1]$ (N множителей) на гиперплоскости $x_1 + x_2 + \ldots + x_N = 1$, проходящей через единицы на осях, которые соответствуют вероятностям каждого из возможных состояний (переменная по оси x_n соответствует значению $P(A_n), n = \overline{1, N}$). Содержательно ф.п. $\mu'(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in [0,1]$ — это субъективная мера уверенности в возможности варианта $P(A_n) = x_n$, $n = \overline{1, N}$.

Если значение по одному из измерений является четким и известно, например, что $P(A_N)=x_N^*$, то остальные величины образуют $(N-1)$-арное отношение и

$$\sum_{n=1}^{N-1} P(A_n)=1-x_N^* .$$

Четкие вероятности $P(A_1)$, $P(A_2),\ldots,P(A_N)$ актуальности некоторого состояния можно графически представить точкой с координатами $P(A_1),P(A_2),\ldots$ $\ldots,P(A_N)$ на «диагонали» куба $[0,1]\times\ldots\times[0,1]$ (N множителей) в N-мерном пространстве, причем отмеченные размерности являются областью исключительно законов теории вероятностей.

Нечеткость вероятностей $\widetilde{P}(A_1),\widetilde{P}(A_2),\ldots,\widetilde{P}(A_N)$ означает переход в $(N+1)$-мерное пространство, т.е. добавление еще одного измерения для значений ф.п. к N-мерному пространству, где рассматриваются классические, четкие оценки вероятностей. Возможные значения оценок вероятностей являются точками носителя; все вероятностные соотношения относятся исключительно к точкам носителя и выполняются с учетом специальной формы поверхности, содержащей носитель (условие (4)), всегда независимо от соответствующих значений ф.п.

Классическая (точечная) оценка вероятности является, таким образом, специальным вырожденным (дегенерированным) случаем нечеткости, когда ф.п. равна единице (что отображает меру субъективной уверенности в том, что заданная точкой носителя ситуация имеет место) на единственной точке носителя нечеткого отношения.

В качестве примера рассмотрим бинарный случай.

Пусть система находится в одном из двух состояний: A или $\overline{A}$. Точечные оценки вероятностей $P(A)$ и $P(\overline{A})$, $P(A)+P(\overline{A})=1$, являются компонентами бинарного нечеткого отображения $P=\{<x_1,x_2>, \mu(<x_1,x_2>)\}$ с соответствующим точечным носителем $(P(A),P(\overline{A}))$, принадлежащим замкнутому интервалу между точками (0, 1) и (1, 0) в декартовой системе координат и функцией принадлежности $\mu(<P(A),P(\overline{A})>)=1$ (рис. 1, *а*). Вероятность $P(A)$ можно также рассматривать как вырожденное нечеткое бинарное отношение $P=\{<x, 1-x>, \mu(x)\}$, которое определяется отображением $\mu\colon[0,1]\to[0,1]$, с носителем–точкой на диагонали $x+y=1$ квадрата $[0,1]\times[0,1]$, причем функция принадлежности $\mu(x)=\delta(x-P(A))$, где $\delta(0)=1$ и $\delta(z)=0$ при $z\neq 0$.

Нечеткую оценку $\widetilde{P}(A)$ вероятности $P(A)$ (далее — бинарная нечеткая вероятность) логично определить как нечеткое отображение

$$\widetilde{P}=\{<x, y>, \mu'(x, y)\}, \qquad \mu'\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1] .$$

Носитель ф.п. μ' принадлежит диагонали $x+y=1$ квадрата $[0,1]\times[0,1]$ в декартовой системе координат, что обеспечивает вероятностную корректность в каждой точке (на рис. 1, *б* по оси абсцисс (x) ориентировано значение $P(A)$, по оси ординат (y) — значение $P(\overline{A})$, по оси аппликат (z) — ф.п.).

Учитывая, что ф.п. является плоской кривой, рассмотрим удобную геометрическую интерпретацию, изображенную на рис. 1, *в*, где график ф.п. $\mu'(x, y)$ построен на диагонали $x+y=1$ единичного квадрата и значение ф.п. для $P(A)=x$ определяется как расстояние по перпендикуляру к диагонали квадрата до соответствующей точки графика кривой $\mu'(x, y)$.

При проведении расчетов по выражениям, содержащим лишь одну компоненту нечеткого отношения: $\widetilde{P}(A)$ или $\widetilde{P}(\overline{A})$. Ф.п. для $\widetilde{P}(A)$ удобно рассматривать как функцию одного аргумента: $\mu(x)=\mu'(x, 1-x)$ для точки носителя $(x, 1-x)$, а отображение рассматривать как заданное на $X=[0,1]$ (рис. 1, *г*). Аналогично для $\widetilde{P}(\overline{A})$ функцией принадлежности является $1-\mu(x)$. Содержательная интерпретация оценки $\widetilde{P}(A)$: ф. п. $\mu(x)\in[0,1]$ — это субъективная мера уверенности в возможности варианта $P(A)=x$, $P(\overline{A})=1-x$, так что $\forall x\in[0,1]$ справедливо соотношение

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \tag{6}$$

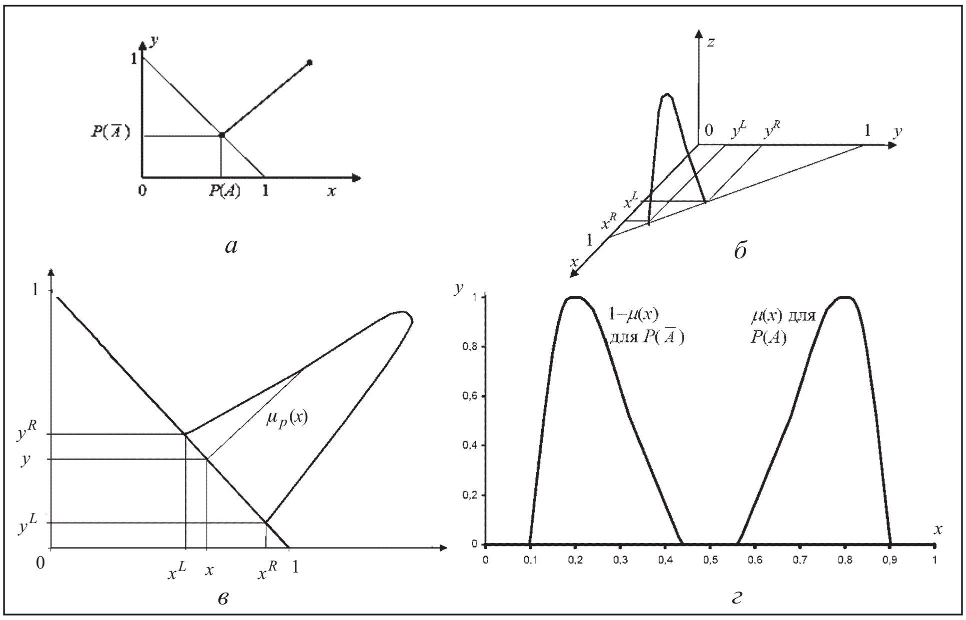

Рис. 1. Графическая интерпретация нечеткой бинарной оценки вероятности: случай точечной вероятности (*а*), трехмерный вариант (*б*), плоский вариант для двух компонент (*в*), ф.п. для одной компоненты (*г*)

ФУНКЦИИ НЕЧЕТКИХ ОЦЕНОК ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассматривая принципиальные аспекты вычислений с нечеткими оценками вероятностей, следует отметить два существенных момента.

Во-первых, арифметические действия с нечеткими аргументами являются существенно более сложным обобщением соответствующих четких операций. Они включают не только определение носителя результата (в четком случае — результат операции), но и вычисление значений ф.п. на точках носителя (в четком случае этот этап отсутствует) с отслеживанием границ и зоны максимума ф.п. результата.

Во-вторых, последовательность выполнения вычислений определяется не только «старшинством» операций (возведение в степень и элементарные функции, умножение и деление, сложение и вычитание), но и взаимосвязью аргументов. Если в исходном соотношении присутствуют разные компоненты одного отношения, их следует учитывать синхронно, поскольку проекция на универсум X_1 результата любой операции над нечеткими множествами, заданными на декартовом произведении $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$, может не совпадать с результатом выполнения операции над проекциями на тот же универсум X_1 этих нечетких множеств [10]. Таким образом, если выражение включает несколько преобразований $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x)$ нечеткой величины $\mathcal{P} = \{<x>, \mu(x)\}$, то операции следует проводить с компонентами нечеткого отношения

$$\mathcal{P}_\nu = \{<x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x)>, \mu(x)\}.$$

Вместо обычных математических знаков операций (плюс, минус и т.д.) можно было бы ввести соответствующие им специальные обозначения (например, $\widetilde{+}, \simeq$ и т.п.) для случая нечетких аргументов. Ниже знак ~ над идентификатором означает, что речь идет о нечеткой величине, а термин «независимые нечеткие отношения (вероятности)» означает, что соответствующие оценки относятся к независимым событиям или получены по группам оценок взаимно независимых событий.

Определение нечетких вероятностей как нечетких отношений обеспечивает вероятностную корректность результатов вычислений, но приводит к существенному усложнению вычислительных алгоритмов, обусловливая необходимость учета взаимной зависимости в соотношениях, которые содержат более одной компоненты. Все вычисления с носителями-вероятностями выполняются в соответствии с вероятностными законами. Иной является размерность функций принадлежности.

Пересчет их как функций от нечетких вероятностей базируется на правилах арифметики нечетких величин. Исходными являются формулы (1)–(3).

Начнем с простейшего и наиболее распространенного случая преобразования бинарных нечетких отношений. Пусть $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — действительнозначная функция без особенностей. Для функций принадлежности $\mu_1(x, y)$ и $\mu_2(x, y)$ двух независимых бинарных нечетких отношений $\mathcal{U}_1 = \{<x, y>, \mu_1(x, y)\}$ и $\mathcal{U}_2 = \{<x, y>, \mu_2(x, y)\}$ с носителями $S(\mathcal{U}_1)$ и $S(\mathcal{U}_2)$ определим (по аналогии с (1)) функцию принадлежности $\mu_f(z)$ результата $\mathcal{U}_f$ преобразования f отношений $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ выражением

$$\mu_f(z) = \sup\{\mu_1(x_1, y_1) \times \mu_2(x_2, y_2): z = f(x_1, y_1, x_2, y_2)\}$$

на носителе

$$S(\mathcal{U}_f) = [\inf\{f(x_1, y_1, x_2, y_2): (x_1, y_1) \in S(\mathcal{U}_1), (x_2, y_2) \in S(\mathcal{U}_2)\},$$
$$\sup\{f(x_1, y_1, x_2, y_2): (x_1, y_1) \in S(\mathcal{U}_1), (x_2, y_2) \in S(\mathcal{U}_2)\}].$$

В частности, для двух бинарных нечетких вероятностей $\mathcal{P}_1 = \{<x>, \mu_1(x)\}$ и $\mathcal{P}_2 = \{<x>, \mu_2(x)\}$ с носителями соответственно $S(\mathcal{P}_1) \in [0,1]$ и $S(\mathcal{P}_2) \in [0,1]$ определим ф.п. $\mu_f(z)$ результата $\mathcal{P}_f$ функционального преобразования $f(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ соотношением

$$\mu_f(z) = \sup\{\mu_1(x_1) \times \mu_2(x_2): z = f(x_1, 1-x_1, x_2, 1-x_2), x_1 \in S(\mathcal{P}_1), x_2 \in S(\mathcal{P}_2)\}$$

на носителе

$$S(\mathcal{P}_f) = [\inf\{f(x_1, 1-x_1, x_2, 1-x_2): x_1 \in S(\mathcal{P}_1), x_2 \in S(\mathcal{P}_2)\},$$
$$\sup\{f(x_1, 1-x_1, x_2, 1-x_2): x_1 \in S(\mathcal{P}_1), x_2 \in S(\mathcal{P}_2)\}].$$

Более удобной является следующая форма приведенного определения. Пусть $g(x_1, x_2)$ — действительнозначная функция, в частности

$$g(x_1, x_2) = f(x_1, 1-x_1, x_2, 1-x_2).$$

Тогда для бинарных нечетких вероятностей $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ определим ф.п. результата $\mathcal{P}_g$ преобразования $g(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$

$$\mu_g(z) = \sup\{\mu_1(x_1) \times \mu_2(x_2): z = g(x_1, x_2), x_1 \in S(\mathcal{P}_1), x_2 \in S(\mathcal{P}_2)\} \tag{7}$$

на носителе

$$S(\mathcal{P}_g) = [\inf\{g(x_1, x_2): x_1 \in S(\mathcal{P}_1), x_2 \in S(\mathcal{P}_2)\},$$
$$\sup\{g(x_1, x_2): x_1 \in S(\mathcal{P}_1), x_2 \in S(\mathcal{P}_2)\}].$$

Определение унарных операций в полном соответствии с (1) получаем, если одна из нечетких величин является нормальной константой. Аналогично можно определить элементарную функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_K)$ для любого числа K независимых бинарных нечетких вероятностей $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_K$: функция принадлежности результата $\mathcal{P}_F$ задается соотношением

$$\mu_F(z) = \sup\{\mu_1(x_1) \times \mu_2(x_2) \times \ldots \times \mu_K(x_K):$$
$$z = F(x_1, x_2, \ldots, x_K), \ x_1 \in S(\mathcal{P}_1), x_2 \in S(\mathcal{P}_2), \ldots, x_K \in S(\mathcal{P}_K)\} \tag{8}$$

на носителе

$$S(\mathcal{P}_F) = [\inf\{F(x_1, x_2, \ldots, x_K): x_1 \in S(\mathcal{P}_1), x_2 \in S(\mathcal{P}_2), \ldots, x_K \in S(\mathcal{P}_K)\},$$
$$\sup\{F(x_1, x_2, \ldots, x_K): x_1 \in S(\mathcal{P}_1), x_2 \in S(\mathcal{P}_2), \ldots, x_K \in S(\mathcal{P}_K)\}]. \tag{9}$$

В случае, когда преобразование $F(x_1, x_2, \ldots, x_K)$ задает оценку бинарной вероятности по бинарным оценкам вероятностей $x_1, x_2, \ldots, x_K$, результат $\mathcal{P}_F$, полученный в соответствии с (8) и (9) по нечетким бинарным вероятностям $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_K$, также является бинарной нечеткой вероятностью.

Далее пусть задано Q соотношений от $\sum_{m=1}^{M} N_m$ переменных

$$\{F_q(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1N_1}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2N_2}, \ldots, x_{M1}, x_{M2}, \ldots, x_{MN_M})\}_{q=1}^{Q},$$

являющихся корректными формулами для вычисления оценок вероятностей полной группы непересекающихся событий $B_1, B_2, \ldots, B_Q$, $\sum_{q=1}^{Q} P(B_q) = 1$, по оценкам вероятностей M групп непересекающихся событий

$$\{A_{m1}, A_{m2}, \ldots, A_{mN_m}\}_{m=1}^{M}, \quad \sum_{n=1}^{N_m} P(A_{mn}) = 1,$$

где

$$P(B_q) = F_q(P(A_{11}), \ldots, P(A_{1N_1}), P(A_{21}), \ldots, P(A_{2N_2}), \ldots, P(A_{M1}), \ldots, P(A_{MN_M})).$$

Известны нечеткие оценки $\{\widetilde{P}_m\}_{m=1}^{M}$ независимых вероятностей M полных групп $\{\{A_{mn}\}_{n=1}^{N_m}\}_{m=1}^{M}$ непересекающихся событий

$$\widetilde{P}_m = \{\mathbf{x}_m, \mu'_m(\mathbf{x}_m)\}, \quad \mathbf{x}_m = < x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mN_m} >. \qquad (10)$$

Тогда нечеткую оценку вероятности $\widetilde{P}_B$ для $\{B_q\}_{q=1}^{Q}$ логично определить как нечеткое Q-арное отношение

$$\widetilde{P}_F = \{\mathbf{y}, \mu'_F(\mathbf{y})\}, \quad \mathbf{y} = < y_1, y_2, \ldots, y_Q >$$

с ф.п.

$$\mu'_F(\mathbf{y}) = \sup\{\prod_{m=1}^{M} \mu'_m(\mathbf{x}_m):$$
$$y_1 = F_1(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M), \ y_2 = F_2(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M), \ldots, \ y_Q = F_Q(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M)\}.$$

Определение носителя обычно не вызывает трудностей. Более сложным является нахождение ф.п. $\mu'_F(\mathbf{y})$ результата преобразования. Существенной в представленном определении является синхронность учета всех компонент нечетких оценок вероятностей.

При вычислении ф.п. преобразований оценок нечетких вероятностей целесообразно соединять следующие два подхода:

— оптимизационный, когда непосредственно решается задача поиска максимума для нужных точек носителя, а вероятностные зависимости выступают как условия и ограничения,

— сепаративный, когда выполняется «демонтаж» функции в цепочку выражений таким образом, чтобы каждая нечеткая вероятность содержалась лишь в одном звене; это сводит сложную оптимизационную задачу к последовательности более простых.

Продемонстрируем использование предложенных подходов при бинарных пересчетах по формуле полной вероятности и формулам Байеса для общего случая, когда нечеткие величины заданы таблично, т.е. двумя последовательностями — упорядоченными по возрастанию значениями носителя и соответствующими им значениями оценок ф.п.

Пусть заданы нечеткая вероятность $\widetilde{P}(F)$ (носитель $\{f_n\}_{n=1}^{N_F}$ и ф.п. $\{F_n\}_{n=1}^{N_F}$) и условные нечеткие вероятности $\widetilde{P}(C/F)$ и $\widetilde{P}(C/\overline{F})$ (соответственно носитель $\{p_n^+\}_{n=1}^{N_+}$, ф.п. $\{P_n^+\}_{n=1}^{N_+}$ и носитель $\{p_n^-\}_{n=1}^{N_-}$, ф.п. $\{P_n^-\}_{n=1}^{N_-}$). Определить нечеткую оценку вероятности $\widetilde{P}(C)$ по формуле полной вероятности

$$P(C) := P(F) \times P(C/F) + P(\overline{F}) \times P(C/\overline{F}) \qquad (11)$$

и нечеткие оценки условных вероятностей $\widetilde{P}(C/F)$ и $\widetilde{P}(C/\overline{F})$ по формуле Байеса

$$P(F/C) = [P(F) \times P(C/F)] / \{P(F) \times P(C/F) + P(\overline{F}) \times P(C/\overline{F})\}, \qquad (12)$$

$$P(F/\overline{C}) = [P(F) \times P(\overline{C}/F)] / \{P(F) \times P(\overline{C}/F) + P(\overline{F}) \times P(\overline{C}/\overline{F})\}.$$

Вероятности $P(F)$, $P(C/F)$ и $P(C/\overline{F})$ предполагаются независимыми. Вместо соотношений (12) в нечетком случае целесообразно использовать выражения для обратных величин

$$1/\widetilde{P}(F/C)=1+\{\widetilde{P}(C/\overline{F})/\widetilde{P}(C/F)\}\times[1/\widetilde{P}(F)-1], \tag{13}$$

$$1/\widetilde{P}(F/\overline{C})=1+\{[1-\widetilde{P}(C/\overline{F})]/[1-\widetilde{P}(C/F)]\}\times[1/\widetilde{P}(F)-1].$$

Очевидно, соотношения (13) пригодны для вычислений при сепаративном подходе: правые части содержат по одной компоненте независимых вероятностей и могут быть реализованы цепочками простейших унарных и бинарных арифметических операций. Так, вычисление $\widetilde{P}(F/C)$ требует последовательного привлечения нечетких операций $1/x-1$, x/y, $x\times y$, $x+1$ и $1/x$ в соответствии с (1) следующим образом:

— вычисление $\{\widetilde{P}(C/\overline{F})/\widetilde{P}(C/F)\}$: носитель $\{p_n^/\}_{n=1}^{N_/}$ — упорядоченное разбиение интервала $[p_1^-/p_{N_+}^+,\ p_{N_-}^-/p_1^+]$, ф.п. $\{P_n^/\}_{n=1}^{N_/}$, $P_n^/=M_/(p_n^/)$, где

$$M_/(z)=\sup\{M_+(z\times y)\times M_-(y):\ y\in[p_1^-,p_{N_-}^-]\},$$

$M_+(y)$ — кусочно-линейная функция с узловыми точками, заданными абсциссами $\{p_n^+\}_{n=1}^{N_+}$ и ординатами $\{P_n^+\}_{n=1}^{N_+}$, равная нулю вне интервала $[p_1^+,p_{N_+}^+]$; аналогично $M_-(y)$ — линейный сплайн по точкам с абсциссами $\{p_n^-\}_{n=1}^{N_-}$ и ординатами $\{P_n^-\}_{n=1}^{N_-}$, нуль вне интервала $[p_1^-,p_{N_-}^-]$;

— вычисление $\{1+[\widetilde{P}(C/\overline{F})/\widetilde{P}(C/F)]\times[1/\widetilde{P}(F)-1]\}$: носитель $\{p_n^\times\}_{n=1}^{N_\times}$ — упорядоченное разбиение интервала $[(1/f_{N_F}-1)\times p_1^/+1,\ (1/f_1-1)\times p_{N_/}^/+1]$, ф.п. $\{P_n^\times\}_{n=1}^{N_\times}$, $P_n^\times=M_\times(p_n^\times-1)$, где

$$M_\times(z)=\sup\{M_/(y)\times M_F(z/y):\ y\in[p_1^/,p_{N_/}^/]\},$$

$M_F(y)$ — линейный сплайн по точкам с абсциссами $\{1/f_{N_F+1-n}-1\}_{n=1}^{N_F}$ и ординатами $\{F_{N_F+1-n}\}_{n=1}^{N_F}$, равный нулю вне интервала $[(1/f_{N_F}-1),\ (1/f_1-1)]$;

— полученный результат $\widetilde{P}(F/C)$: носитель $\{1/p_{N_\times+1-n}^\times\}_{n=1}^{N_\times}$, ф.п. $\{P_{N_\times+1-n}^\times\}_{n=1}^{N_\times}$.

Соотношение (11) содержит обе компоненты бинарной вероятности $P(F)$ и для нечетких операций должно быть представлено в виде

$$\widetilde{P}(C):=\widetilde{P}(F)\times\widetilde{P}(C/F)+[1-\widetilde{P}(F)]\times\widetilde{P}(C/\overline{F}). \tag{14}$$

Зависимость слагаемых в правой части требует оптимизационного подхода и создания следующего специального алгоритма для реализации (14).

— Определить границы c_1 и c_{N_C} носителя результата $\widetilde{P}(C)$ и оценки функции принадлежности C_1 и C_{N_C} крайних точек; выбрать носитель $(c_1,c_2,\dots,c_{N_C})$ с учетом зон максимума ф.п. нечетких аргументов. Если ф.п. аргументов являются выпуклыми, аналогично отработать зону максимума результата по зонам максимума аргументов и соответствующие точки носителя результата исключить из дальнейшего рассмотрения.

— Определить $\forall k=\overline{1,N_F}$ узловые точки линейного сплайна

$$\{t_j^k\}_{j=1}^{J_k},\quad \{\Psi_j^k\}_{j=1}^{J_k},\quad \Psi_j^k=F_k\times T_j^k,$$

где профиль $\{t_j^k\}_{j=1}^{J_k}, \{T_j^k\}_{j=1}^{J_k}$ является результатом нечеткой операции

$$\widetilde{P}^k(C) = f_k \times \widetilde{P}(C/F) + [1 - f_k] \times \widetilde{P}(C/\overline{F}),$$

выполненной в соответствии с (2).

— Для всех $n = \overline{2, N_C}$:

а) определить последовательность $\{\psi_n^k\}_{k=1}^{N_F}$, где ψ_n^k — ордината линейного сплайна с узловыми точками $\{t_j^k\}_{j=1}^{J_k}$ (абсцисса), $\{\Psi_j^k\}_{j=1}^{J_k}$ (ордината), соответствующая абсциссе c_n;

б) локализовать максимум последовательности относительно k (индекс k_*) и уточнить его, используя промежуточные профили, соответствующие точкам между f_{k*-1} и f_{k*}, а также между f_{k*} и f_{k*+1} (последовательное деление отрезков пополам с продвижением в сторону максимума C_n).

— Для получения окончательного результата $\widetilde{P}(C)$ «просеять» точки полученного сплайна $(c_1, c_2, \ldots, c_{N_C}), (C_1, C_2, \ldots, C_{N_C})$, удалив избыточные.

Сложность алгоритмов нечетких вероятностных расчетов возрастает особенно при оптимизационном подходе, при увеличении размерностей нечетких вероятностей-аргументов.

Предложенная интерпретация нечеткой вероятности с учетом соотношения (1) позволяет определить и нетривиальные нечеткие аналоги более сложных операций, например нечеткой линейной интерполяции [16].

МНОГОМЕРНАЯ НЕЧЕТКАЯ ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Вычислительная сложность алгоритма нечеткой линейной интерполяции существенно возрастает с увеличением количества опорных точек N, хотя принципиальная схема остается неизменной. Для большего понимания достаточно рассмотреть случаи $N = 2$ и $N = 3$, когда интерполяционные процедуры можно представить последовательностью манипуляций с геометрическими структурами.

Нечеткое число $\mathcal{X}$ назовем нечетким внутренним траверзом относительно базовых точек $x_L < x_R$, если носитель $\mathcal{X}$ принадлежит отрезку действительной оси $[x_L, x_R]$ (если траверз $\mathcal{X}$ не является внутренним, имеем задачу нечеткого линейного прогнозирования, которая решается теми же методами). По аналогии с (1) и (3) в случае, когда точке носителя соответствует множество допустимых оценок ф.п., результат равен максимальной функции.

Задача нечеткой линейной интерполяции по двум опорным точкам сформулирована следующим образом. Пусть значению некоторого параметра сложной системы $X \in R^1$ соответствует характеристика $Y \in R^1$, причем на отрезке действительной оси $[x_L, x_R]$ предполагается линейная зависимость Y от X. Для опорных точек $x_L < x_R$ (т.е. на траверзах x_L и x_R) заданы соответствующие значения оценок $\mathcal{Y}_L$ и $\mathcal{Y}_R$. Определить оценку характеристики $\mathcal{Y}$ для нечеткого внутреннего траверза $\mathcal{X}$ как интерполированное по опорным точкам значение, если оценки $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ являются нечеткими. Процедура нечеткой линейной интерполяции по двум точкам и нечеткому траверзу описана в [16].

Изложим постановку задачи для $N = 3$ точек. Пусть значению некоторого параметра $(x, y) \in R^2$ соответствует характеристика $W \in R^1$, причем предполагается линейная зависимость W от x, y. Для опорных точек $G_1(x_1, y_1)$, $G_2(x_2, y_2)$, $G_3(x_3, y_3)$, не лежащих на одной прямой, известны соответствующие значения оценок $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$. Определить оценку $\mathcal{W}$ (носитель $[z^L, z^R]$, ф.п. $\mu_{\mathcal{W}}(z)$) характеристики для $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ — нечетких траверзов соответственно по оси x (носитель $[x^L, x^R]$, ф.п. $\mu_1(x)$) и по оси y (носитель $[y^L, y^R]$, ф.п. $\mu_2(y)$), как интерполированное по опорным точкам значение, если оценки $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ являются нечеткими (носитель $\{[G_n^L, G_n^R]\}_{n=1}^3$, ф.п. $\{\mu_{W_n}(z)\}_{n=1}^3$).

Если прямоугольник с вершинами $V_1(x^R, y^L)$, $V_2(x^L, y^L)$, $V_3(x^L, y^R)$ и $V_4(x^R, y^R)$ лежит внутри треугольника с вершинами $G_1(x_1, y_1)$, $G_2(x_2, y_2)$ и

$G_3(x_3, y_3)$, то имеем задачу линейной интерполяции; в противном случае — задачу нечеткой экстраполяции.

Рассмотрим задачу нечеткой интерполяции. Ограничимся случаем, когда ф.п. $\{\mu_{W_n}(z)\}_{n=1}^3$ нечетких чисел $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ имеют одинаковую высоту $\alpha_{\max}$ (например, они нормальны, т.е. $\alpha_{\max} = 1$) и одновершинны. Первое из условий легко преодолимо, второе принципиально. Величина $\alpha_{\min}$ — порог значимости функций принадлежности $\{\mu_{W_n}(z)\}_{n=1}^3$.

Случай, когда опорный треугольник с вершинами $\{G_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^3$ принадлежит первому квадранту, представлен на рис. 2.

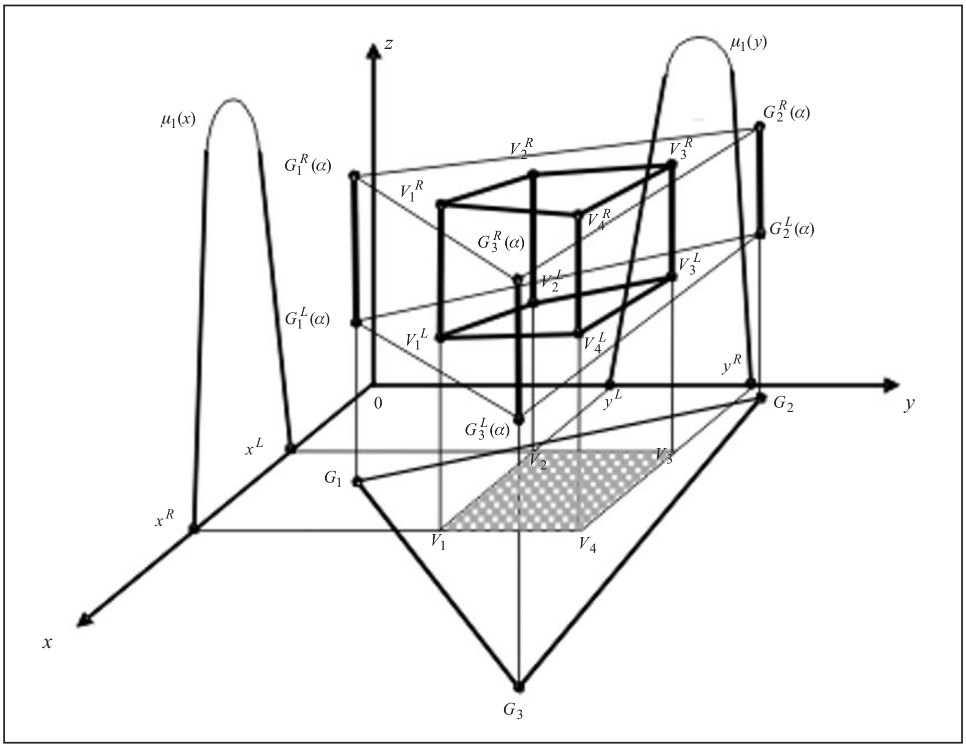

Рис. 2. Геометрическое представление нечеткой линейной интерполяции по трем опорным точкам

В координатной плоскости $x0y$ расположены опорные точки $G_1(x_1, y_1)$, $G_2(x_2, y_2)$ и $G_3(x_3, y_3)$. Прямоугольник с вершинами $\{V_k\}_{k=1}^4$ находится внутри опорного треугольника. По оси $0x$ ориентирован носитель $[x^L, x^R]$ нечеткого траверза $\mathcal{X}_1$, соответствующая ф.п. $\mu_1(x)$ расположена в координатной плоскости $x0z$; по оси $0y$ ориентирован носитель $[y^L, y^R]$ нечеткого траверза $\mathcal{X}_2$, соответствующая ф.п. $\mu_2(y)$ расположена в координатной плоскости $y0z$. Пусть $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$. На прямых, перпендикулярных координатной плоскости $x0y$ и пересекающих ее соответственно в точках $\{G_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^3$, отмечены α-уровни $\{[G_n^L(\alpha), G_n^R(\alpha)]\}_{n=1}^3$ опорных оценок $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$. Через нижние $\{G_n^L(\alpha)\}_{n=1}^3$ и верхние $\{G_n^R(\alpha)\}_{n=1}^3$ границы α-уровней опорных оценок проведены плоскости $z = \varphi_\alpha^L(x, y)$ и $z = \varphi_\alpha^R(x, y)$ соответственно. Отрезок $[\varphi_\alpha^L(x, y), \varphi_\alpha^R(x, y)]$ естественно интерпретировать как линейную интерполяцию α-уровня для точки (x, y).

Носитель $[z^L, z^R]$ оценки $\mathcal{W}$, полученной процедурой нечеткой линейной интерполяции по двум нечетким траверзам $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ с носителями $[x^L, x^R]$ и $[y^L, y^R]$, ф.п. $\mu_1(x)$ и $\mu_2(y)$ со значениями в диапазоне от $\alpha_{\min}$ до $\alpha_{\max}$ соответственно, определяется соотношениями

$$z^L = \min\{\varphi^L_{\alpha_{\min}}(x^R, y^L), \varphi^L_{\alpha_{\min}}(x^L, y^L), \varphi^L_{\alpha_{\min}}(x^L, y^R), \varphi^L_{\alpha_{\min}}(x^R, y^R)\},$$

$$z^R = \max\{\varphi^R_{\alpha_{\min}}(x^R, y^L), \varphi^R_{\alpha_{\min}}(x^L, y^L), \varphi^R_{\alpha_{\min}}(x^L, y^R), \varphi^R_{\alpha_{\min}}(x^R, y^R)\},$$

а ф.п. $\mu_{\mathcal{W}}(z)$ в некоторой точке носителя $z \subset [z^L, z^R]$ — последовательностью соотношений

$$\mu_{\mathcal{W}}(z) = \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} \mu^{\alpha}_{W}(z),$$

где $\mu^{\alpha}_{W}(z)$ определяется α-уровнем опорных оценок,

$$\mu^{\alpha}_{W}(z) = \alpha \times \max_{x,\, y:\ \{z=\varphi^L_\alpha(x,y)\} \cup \{z=\varphi^R_\alpha(x,y)\}} \mu_1(x) \times \mu_2(y).$$

Если множество точек (x, y), на которых определяется максимум, пусто, то $\mu^{\alpha}_{W}(z) = 0$. Очевидно, что α-уровень влияет лишь на зону носителя $\mathrm{Int}^L_\alpha \cup \mathrm{Int}^R_\alpha$, где

$$\mathrm{Int}^L_\alpha = [\min\{\varphi^L_\alpha(x^R, y^L), \varphi^L_\alpha(x^L, y^L), \varphi^L_\alpha(x^L, y^R), \varphi^L_\alpha(x^R, y^R)\},$$
$$\max\{\varphi^L_\alpha(x^R, y^L), \varphi^L_\alpha(x^L, y^L), \varphi^L_\alpha(x^L, y^R), \varphi^L_\alpha(x^R, y^R)\}],$$
$$\mathrm{Int}^R_\alpha = [\min\{\varphi^R_\alpha(x^R, y^L), \varphi^R_\alpha(x^L, y^L), \varphi^R_\alpha(x^L, y^R), \varphi^R_\alpha(x^R, y^R)\},$$
$$\max\{\varphi^R_\alpha(x^R, y^L), \varphi^R_\alpha(x^L, y^L), \varphi^R_\alpha(x^L, y^R), \varphi^R_\alpha(x^R, y^R)\}].$$

Рассмотрим схему получения результата, когда нечеткие оценки задаются линейным сплайном по узловым точкам, т.е. представлены двумя массивами одинаковой длины, первый из которых является упорядоченным по возрастанию и задает точки носителя, а второй задает соответствующие им оценки функции принадлежности.

1. Нахождение зон максимума ф.п. нечетких траверзов $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$. Определяются оценки $[x^L_{\max}, x^R_{\max}] \subset [x^L, x^R]$, $x^L_{\max} \le x^R_{\max}$, соответствующие максимальному значению ф.п. $\mu_1(x)$, представляющей собой точку, если $\mu_1(x)$ унимодальна, и отрезок, если $\mu_1(x)$ толерантна. Аналогично определяется интервал $[y^L_{\max}, y^R_{\max}] \subset$ $\subset [y^L, y^R]$, $y^L_{\max} \le y^R_{\max}$, соответствующий максимальному значению ф.п. $\mu_2(y)$.

2. Выбор последовательности α-уровней для опорных оценок представлением носителей $\{[G^L_n, G^R_n]\}^3_{n=1}$. При этом целесообразно учитывать все узловые точки. Выбирается минимальное α_1 такое, что $\mu_{W_n}(z) = \alpha_1$, $n = \overline{1, 3}$, значимы, и определяется монотонно возрастающая последовательность $\{\alpha_m\}^M_{m=1}$, $\alpha_M =$ $= \alpha_{\max} = \max\{\mu_{W_n}(z)\}$.

3. Определение граничных точек z^L, z^R носителя результата. Располагаются α_1-уровни $\{[U^L_n(\alpha_1), U^R_n(\alpha_1)]\}^3_{n=1}$ оценок $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ на прямых, перпендикулярных координатной плоскости $x0y$ и пересекающих эту плоскость соответственно в точках $\{G_n(x_n, y_n)\}^3_{n=1}$.

Через точки $\{G^L_n(\alpha_1)\}^3_{n=1}$ и $\{G^R_n(\alpha_1)\}^3_{n=1}$ проводятся соответственно нижняя $z = \varphi^L_{\alpha_1}(x, y)$ и верхняя $z = \varphi^R_{\alpha_1}(x, y)$ плоскости. Расстояние $[\varphi^R_{\alpha_1}(x, y) - \varphi^L_{\alpha_1}(x, y)]$ между плоскостями для точки $(x, y, 0)$ треугольника $G_1G_2G_3$ по прямой, проходящей через эту точку перпендикулярно координатной плоскости $x0y$, задает линейно интерполированную оценку α_1-уровня характеристики W, соответствующую четкому параметру (x, y), причем в точках $(x, y, \varphi^L_{\alpha_1}(x, y))$ и $(x, y, \varphi^R_{\alpha_1}(x, y))$ ф. п. равна α_1.

Учет влияния ф.п. $\mu_1(x)$ и $\mu_2(y)$ нечетких траверзов $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ осуществляется умножением оценок ф.п. в точках с абсциссой x и ординатой y треугольников $G_1^R(\alpha_1)G_2^R(\alpha_1)G_3^R(\alpha_1)$ и $G_1^L(\alpha_1)G_2^L(\alpha_1)G_3^L(\alpha_1)$ на $\mu_1(x)\times\mu_2(y)$. В точках $(x, y, \varphi_{\alpha_1}^L(x, y))$ и $(x, y, \varphi_{\alpha_1}^R(x, y))$ определяются вспомогательные оценки $M_{\alpha_1}(x, y)=\alpha_1\times\mu_1(x)\times\mu_2(y)$. Для точек с абсциссами вне интервала $[x^L, x^R]$ и ординатами вне интервала $[y^L, y^R]$, т.е. для точек вне прямоугольника с вершинами $\{V_k\}_{k=1}^4$, оценки $M_{\alpha_1}(x, y)=0$. Поскольку α_1 определяет минимальную значимость ф.п. опорных точек, носителем окончательного результата является проекция $[z^L, z^R]$ призмообразного шестигранника с вершинами $\{V_k^L, V_k^R\}_{k=1}^4$ на ось $0z$, т.е.

$$z^L=\min\{\varphi_{\alpha_1}^L(x^R, y^L), \varphi_{\alpha_1}^L(x^L, y^L), \varphi_{\alpha_1}^L(x^L, y^R), \varphi_{\alpha_1}^L(x^R, y^R)\},$$

$$z^R=\max\{\varphi_{\alpha_1}^R(x^R, y^L), \varphi_{\alpha_1}^R(x^L, y^L), \varphi_{\alpha_1}^R(x^L, y^R), \varphi_{\alpha_1}^R(x^R, y^R)\}.$$

4. Определение зоны максимума результата. Располагаются α_M-уровни $\{[G_n^L(\alpha_M), G_n^R(\alpha_M)]\}_{n=1}^3$ оценок $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ соответственно на прямых, перпендикулярных координатной плоскости $x0y$ и пересекающих эту плоскость в точках $\{G_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^3$. Через точки $\{G_n^L(\alpha_M)\}_{n=1}^3$ и $\{G_n^R(\alpha_M)\}_{n=1}^3$ проводим нижнюю $z=\varphi_{\alpha_M}^L(x, y)$ и верхнюю $z=\varphi_{\alpha_M}^R(x, y)$ плоскости (они совпадают, если все ф.п. $\{\mu_{W_n}(z)\}_{n=1}^3$ унимодальны). Расстояние $[\varphi_{\alpha_M}^R(x, y)-\varphi_{\alpha_M}^L(x, y)]$ между плоскостями для точки $(x, y, 0)$ треугольника $G_1G_2G_3$ по прямой, проходящей через эту точку перпендикулярно координатной плоскости $x0y$, задает линейно интерполированную оценку α_M-уровня характеристики W, соответствующую четкому параметру (x, y), причем во всех точках отрезка $[(x, y, \varphi_{\alpha_M}^L(x, y)), (x, y, \varphi_{\alpha_M}^R(x, y))]$ ф.п. равна α_M. Для указанных точек определим оценку

$$M_{\max}=\alpha M\times\mu_1(x_{\max}^L)\times\mu_2(y_{\max}^L).$$

Носитель зоны максимума $M_{\max}$ ф.п. результата есть интервал $[z_{\max}^L, z_{\max}^R]\subset\subset[z^L, z^R]$, $z_{\max}^L\le z_{\max}^R$ и точки, если все опорные и траверзные ф.п. унимодальны:

$$z_{\max}^L=\min\{\varphi_{\alpha_M}^L(x_{\max}^R, y_{\max}^L), \varphi_{\alpha_M}^L(x_{\max}^L, y_{\max}^L), \varphi_{\alpha_M}^L(x_{\max}^L, y_{\max}^R), \varphi_{\alpha_M}^L(x_{\max}^R, y_{\max}^R)\},$$

$$z_{\max}^R=\max\{\varphi_{\alpha_M}^R(x_{\max}^R, y_{\max}^L), \varphi_{\alpha_M}^R(x_{\max}^L, y_{\max}^L), \varphi_{\alpha_M}^R(x_{\max}^L, y_{\max}^R), \varphi_{\alpha_M}^R(x_{\max}^R, y_{\max}^R)\}.$$

5. Выбор носителя результата. Определяются четыре значения: границы носителя результата $[z^L, z^R]$ и границы интервала $[z_{\max}^L, z_{\max}^R]\subset[z^L, z^R]$, являющегося носителем максимума $M_{\max}$ ф.п. результата. Для компьютерного представления ф.п. результата интерполяции по двум нечетким траверзам выбрать разбиение интервалов $[z^L, z_{\max}^L]$ и $[z_{\max}^R, z^R]$ (плотнее к зоне максимума, реже к краям носителя) и упорядочить выбранные точки по возрастанию, образовав последовательность $\{\tilde{z}_j\}_{j=1}^J$ (далее ее будем называть носителем),

$$\tilde{z}_1=z^L\le\tilde{z}_{j_{\max}^L}=z_{\max}^L\le\tilde{z}_{j_{\max}^R}=z_{\max}^R\le\tilde{z}_J=z^R, \ \mu_{\mathcal{W}}(z_{\max}^L)=\mu_{\mathcal{W}}(z_{\max}^R)=M_{\max}.$$

6. Определение влияния уровней $\{\alpha_m\}_{m=1}^M$ опорных оценок. Для $j=\overline{1,J}$, $j\ne j_{\max}^L$, $j\ne j_{\max}^R$ положим $\tilde{Z}_1(\tilde{z}_j)=\mu_W^{\alpha_1}(\tilde{z}_j)$ для $\tilde{z}_j\in\{\mathrm{Int}_{\alpha_1}^L\cup\mathrm{Int}_{\alpha_1}^R\}$ и

$\widetilde{Z}_1(\widetilde{z}_j)=0$ для $\widetilde{z}_j \notin \{\mathrm{Int}_{\alpha_1}^L \cup \mathrm{Int}_{\alpha_1}^R\}$. Таким образом, определяется максимальное значение функции $M_{\alpha_1}(x, y)$ по точкам (x, y), принадлежащим отрезкам прямых, образованных пересечением горизонтальной плоскости $z=\widetilde{z}_j$ с плоскостями $z=\varphi_{\alpha_1}^L(x, y)$ и $z=\varphi_{\alpha_1}^R(x, y)$ в пределах нижнего и верхнего четырехугольников с вершинами соответственно $\{V_k^L\}_{k=1}^4$ и $\{V_k^R\}_{k=1}^4$.

Аналогично для $m=\overline{2,M}$ при $j=\overline{1,J}$, $j \neq j_{\max}^L$, $j \neq j_{\max}^R$ определить $\widetilde{Z}_m(\widetilde{z}_j)=0$ для $\widetilde{z}_j \notin \{\mathrm{Int}_{\alpha_m}^L \cup \mathrm{Int}_{\alpha_m}^R\}$ и $\widetilde{Z}_m(\widetilde{z}_j)=\mu_W^{\alpha_m}(\widetilde{z}_j)$, если $\widetilde{z}_j \in \{\mathrm{Int}_{\alpha_m}^L \cup \mathrm{Int}_{\alpha_m}^R\}$.

7. Окончательное определение ф.п. результата нечеткой линейной интерполяции. Для $j=\overline{1,J}$, $j \neq j_{\max}^L$, $j \neq j_{\max}^R$ определяются

$$Z(\widetilde{z}_j)=\max_{m=\overline{1,M}} \widetilde{Z}_m(\widetilde{z}_j), \quad Z(\widetilde{z}_{j_{\max}^L})=Z(\widetilde{z}_{j_{\max}^R})=M_{\max}.$$

«Просеиваем» последовательности $\{\widetilde{z}_j\}_{j=1}^J$ и $\{Z(\widetilde{z}_j)\}_{j=1}^J$, удаляя точки с незначимыми оценками ф.п., и корректируем носитель, проредив слишком плотно расположенные точки. Результатом является нечеткая величина с носителем $\{z_i\}_{i=1}^I$ и ф.п. $\{\mu_{\mathcal{W}}(z_i)\}_{i=1}^I$, $I \leq J$.

В общем случае задачу нечеткой линейной интерполяции представим следующим образом.

Пусть значению параметра сложной системы $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in R^N$ соответствует характеристика $W \in R^1$, причем зависимость W от $\{x_n\}_{n=1}^N$ можно считать линейной. Для опорных точек $\{G_n(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_N^n)\}_{n=1}^{N+1}$, не лежащих на одной гиперплоскости, известны соответствующие значения оценок $\{\mathcal{W}_n\}_{n=1}^{N+1}$. Определить оценку $\mathcal{W}$ (носитель $[z^L, z^R]$, ф.п. $\mu_{\mathcal{W}}(z)$) характеристики W для $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_{N+1}$, где $\mathcal{X}_n$ — нечеткий траверз по оси x_n (носитель $[x_n^L, x_n^R]$, ф.п. $\mu_n(x)$), $n=\overline{1, N+1}$, как интерполированное по опорным точкам значение, когда оценки $\{\mathcal{W}_n\}_{n=1}^{N+1}$ являются нечеткими (носитель $\{[G_n^L, G_n^R]\}_{n=1}^{N+1}$, ф.п. $\{\mu_{W_n}(z)\}_{n=1}^{N+1}$).

Задача решается последовательным выполнением семи указанных выше шагов.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассмотрим механизмы распространения вероятностей в нечетких БС с недетерминированными состояниями. Процесс распространения вероятностей на БС обычно протекает волнообразно в зависимости от поставленных целей. Первичное оценивание вероятностей для всех переменных БС, как правило, осуществляется в направлении прямой волны. Сочетание принципов прямой и обратной волн используется в процессе перераспределения вероятностей с учетом перехода некоторых из переменных сети в конкретные состояния.

Природа состояний переменных БС влияет в основном на процедуры вероятностного оценивания связей ее переменных. Детерминированный характер состояний переменных (вершин) сети позволяет явно учитывать каждое из них в известных процедурах апостериорного оценивания вероятностей соответствующих переменных. В сетях с недетерминированными состояниями переменные зачастую принимают размытые состояния, являющиеся промежуточными относительно опорных [4]. Подобное состояние характеризуется значением некоторой функции — фактором определенности, позиционирующим текущее состояние относительно опорных состояний и отображающим меру отклонения от каждого из них.

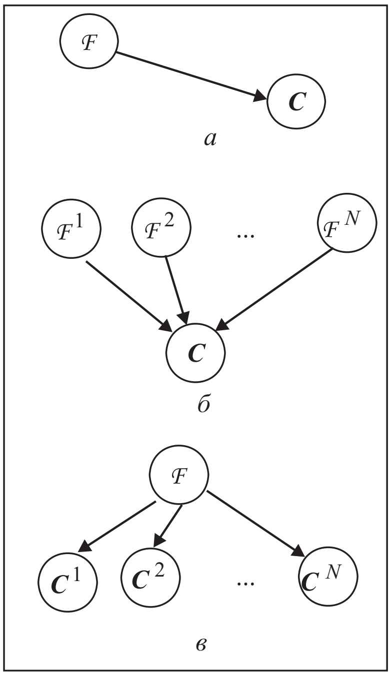

Рис. 3. Базовые конфигурации компонент БС: зависимости $1\to1$ (*а*), $N\to1$ (*б*), $1\to N$ (*в*)

В одномерном случае фактор определенности удобно идентифицировать числом от -1 (левое опорное состояние, «четкое НЕТ») до $+1$ (правое опорное состояние, «четкое ДА»). Значение 0 соответствует равной удаленности состояния от опорных, т.е. неопределенности состояния либо отсутствию информации о нем. Следует отметить, что при апостериорном оценивании вероятностей фактор определенности выступает в роли траверза в процедуре линейной интерполяции по опорным оценкам [4].

Рассмотрим принципиальные вопросы относительно распространения вероятностей в таких сетях. Анализ многообразия конфигураций связей причин (идентификаторы $\mathcal{F}$, диапазон изменений от левого опорного состояния $\overline{F}$ до правого F с соответствующими индексами) и следствий (идентификаторы $\boldsymbol{C}$, соответственно от $\overline{C}$ до C) позволяет выделить следующие типовые конфигурации компонент БС (рис. 3): простая зависимость $1\to1$ (< причина > < следствие >) (рис. 3, *а*); зависимость $N\to1$ (< N причин > < одно следствие >) (рис. 3, *б*); зависимость $1\to N$ (< одна причина > < N следствий >) (рис. 3, *в*). Случаи системной зависимости (< несколько причин > < несколько следствий >) представляются указанными выше конфигурациями.

Рассмотрим исходную информацию для реализации процесса распространения вероятностей. Для конфигурации $1\to1$ известными предполагаются нечеткие оценки вероятности $\widetilde{P}(F)$ и условных вероятностей $\widetilde{P}(C/F)$ и $\widetilde{P}(C/\overline{F})$. В случае конфигурации $N\to1$ известными предполагаются нечеткие оценки вероятностей $\widetilde{P}(F^1), \widetilde{P}(F^2), \ldots, \widetilde{P}(F^N)$ и условных вероятностей $\{\{\widetilde{P}(C/F^1_{m_1}, F^2_{m_2}, \ldots, F^N_{m_N})\}^2_{m_n=1}\}^N_{n=1}$, где $F^n_1 = F^n$, $F^n_2 = \overline{F}^n$, т.е. всего $N+2^N$ нечетких величин. Для конфигурации $1\to N$ исходной информацией являются заданные нечеткие оценки вероятности $P(F)$ и условных вероятностей $\{P(C^n/F),\ P(C^n/\overline{F})\}^N_{n=1}$.

Механизм распространения вероятностей по методу прямой волны базируется на формуле полной вероятности. Для конфигураций $1\to1$ и $1\to N$ оценивание выполняется согласно формуле (14). В случае $N\to1$ формула полной вероятности имеет вид

$$\widetilde{P}(C) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_N = 1}^{2} \widetilde{P}(C/F^1_{m_1}, F^2_{m_2}, \ldots, F^N_{m_N}) \times \widetilde{P}(F^1_{m_1}) \times \widetilde{P}(F^2_{m_2}) \times \ldots \times \widetilde{P}(F^N_{m_N}) =$$

$$= \sum_{m_1=1}^{2} \widetilde{P}(F^1_{m_1}) \sum_{m_2=1}^{2} \widetilde{P}(F^2_{m_2}) \ldots \sum_{m_{N-1}=1}^{2} \{ \widetilde{P}(F^{N-1}_{m_{N-1}}) \times [\widetilde{P}(C/F^1_{m_1}, F^2_{m_2}, \ldots, F^N) \times \widetilde{P}(F^N) +$$

$$+ \widetilde{P}(C/F^1_{m_1}, F^2_{m_2}, \ldots, \overline{F}^N) \times (1 - \widetilde{P}(F^N))]\},$$

а вычисления выполняются в соответствии с (8), (9).

Более сложным является механизм пересчета вероятностей по методу обратной волны, когда кроме формулы полной вероятности используются формула Байеса и процедура нечеткой линейной интерполяции. Рассмотрим схемы реализации данного механизма для представленных типовых конфигураций БС, когда в текущей ситуации вершины–следствия являются конечными.

Конфигурация $1 \to 1$ (рис. 3, *а*). Определяются оценки условных вероятностей $\widetilde{P}(F / C)$ и $\widetilde{P}(F / \overline{C})$ в соответствии с формулой Байеса (13) и вспомогательная апостериорная оценка

$$\widetilde{P}'(F) := \widetilde{P}(C) \times \widetilde{P}(F / C) + [1 - \widetilde{P}(C)] \times \widetilde{P}(F / \overline{C}). \tag{15}$$

Полученные значения $\widetilde{P}(F / C)$, $\widetilde{P}'(F)$ и $\widetilde{P}(F / \overline{C})$ рассматриваются как опорные на четких траверзах 1, 0 и –1 соответственно. Окончательная апостериорная оценка $\widetilde{P}^*(F)$ является результатом нечеткой линейной интерполяции на траверзе $\widetilde{U}(C)$ по указанным опорным оценкам (в общем случае — по двум ближайшим) [16]. Обозначим последовательное выполнение вычислений прямой и обратной волн для конфигурации $1 \to 1$ соотношением

$$\widetilde{P}^*(F) := \mathcal{B}\{\widetilde{P}(F);\ \widetilde{P}(C / F),\ \widetilde{P}(C / \overline{F});\ \widetilde{U}(C)\}. \tag{16}$$

Конфигурация $N \to 1$ (рис. 3, *б*). Оценки условных вероятностей $\widetilde{P}(F^n / C)$ и $\widetilde{P}(F^n / \overline{C})$ определяются в соответствии с преобразованной формулой Байеса. Так, для $N = 2$ соотношения имеют вид

$$\widetilde{P}(C) = \widetilde{P}(F^1) \times \{\widetilde{P}(C / F^1, F^2) \times \widetilde{P}(F^2) + \widetilde{P}(C / F^1, \overline{F}^2) \times [1 - \widetilde{P}(F^2)]\} +$$

$$+ [1 - \widetilde{P}(F^1)] \times \{\widetilde{P}(C / \overline{F}^1, F^2) \times \widetilde{P}(F^2) + \widetilde{P}(C / \overline{F}^1, \overline{F}^2) \times [1 - \widetilde{P}(F^2)]\},$$

$$1 / \widetilde{P}(F^1 / C) = 1 + [1 / \widetilde{P}(F^1) - 1] \times \{\widetilde{P}(C / \overline{F}^1, F^2) + \widetilde{P}(C / \overline{F}^1, \overline{F}^2) \times [1 / \widetilde{P}(F^2) - 1]\} /$$

$$/ \{\widetilde{P}(C / F^1, F^2) + \widetilde{P}(C / F^1, \overline{F}^2) \times [1 / \widetilde{P}(F^2) - 1]\},$$

$$1 / \widetilde{P}(F^1 / \overline{C}) = 1 + [1 / \widetilde{P}(F^1) - 1] \times \{1 / \widetilde{P}(F^2) - \widetilde{P}(C / \overline{F}^1, F^2) - \widetilde{P}(C / \overline{F}^1, \overline{F}^2) \times$$

$$\times [1 / \widetilde{P}(F^2) - 1]\} / \{1 / \widetilde{P}(F^2) - \widetilde{P}(C / F^1, F^2) - \widetilde{P}(C / F^1, \overline{F}^2) \times [1 / \widetilde{P}(F^2) - 1]\}.$$

Обратная волна реализуется аналогично конфигурации $1 \to 1$.

Конфигурация $1 \to N$ (рис. 3, *в*). Обратная волна может быть реализована в двух вариантах.

В первом варианте предполагается независимость вершин–следствий $\{\boldsymbol{C}^n\}_{n=1}^N$. Схема его выполнения сводится к рекурсивному использованию операций (16) по *n* от 1 до *N*:

$$\widetilde{P}_n^*(F) := \mathcal{B}\{\widetilde{P}_{n-1}^*(F);\ \widetilde{P}(C^n / F), \widetilde{P}(C^n / \overline{F});\ \widetilde{U}(C^n)\},$$

$$\widetilde{P}_0^*(F) = \widetilde{P}(F),\ \widetilde{P}^*(F) = \widetilde{P}_N^*(F). \tag{17}$$

Во втором варианте реализации обратной волны в конфигурации $1 \to N$ учитывается взаимозависимость вершин–следствий $\{\boldsymbol{C}^n\}_{n=1}^N$ при пересчете апостериорных вероятностей, что может привести к значительному повышению точности результирующих оценок. Как показывает опыт [17], особенно явственно это проявляется при обработке так называемых парных случаев, т.е. пар взаимосвязанных вершин, которые учитывают одновременно. Данный вариант обратной волны весьма сложен в случае $N \ge 3$. Рациональным представляется сочетание первого и второго вариантов, когда вместо двух последовательных итераций в цикле (17) для учета пары зависимых следствий ($\boldsymbol{C}^1$ и $\boldsymbol{C}^2$) выполняется предлагаемая последовательность операций.

Оценки условных вероятностей

$$\{\widetilde{P}(F^n / C^1_{m_1},\ C^2_{m_2})\}^2_{m_1, m_2 = 1},\ \text{где}\ C^n_1 = C^n,\ C^n_2 = \overline{C^n}, \tag{18}$$

определяются в соответствии с преобразованной формулой Байеса

$$\widetilde{P}(F/C^1_{m_1}, C^2_{m_2}) = \widetilde{P}(C^1_{m_1}/F) \times \widetilde{P}(C^2_{m_2}/F) \times \widetilde{P}(F) / \{[\widetilde{P}(C^1_{m_1}/F) \times \widetilde{P}(F) +$$

$$+\widetilde{P}(C^1_{m_1}/\overline{F}) \times (1-\widetilde{P}(F))] \times [\widetilde{P}(C^2_{m_2}/F) \times \widetilde{P}(F) + \widetilde{P}(C^2_{m_2}/\overline{F}) \times (1-\widetilde{P}(F))]\},$$

где $\widetilde{P}(C^n_2) = 1-\widetilde{P}(C^n)$, $\widetilde{P}(C^n_2/F) = 1-\widetilde{P}(C^n/F)$. Затем пересчитывается вспомогательная оценка

$$\widetilde{P}'(F) = \sum_{m_1, m_2 = 1}^{2} \widetilde{P}(F/C^1_{m_1}, C^2_{m_2}) \times \widetilde{P}(C^1_{m_1}) \times \widetilde{P}(C^2_{m_2}).$$

По значениям факторов определенности $\widetilde{U}(C^1)$, $\widetilde{U}(C^2)$ и опорным оценкам $\widetilde{P}'(F)$ и (18) процедурой нечеткой линейной интерполяции вычисляется окончательная оценка $\widetilde{P}(F)$. Последняя операция схематично представлена на рис. 4.

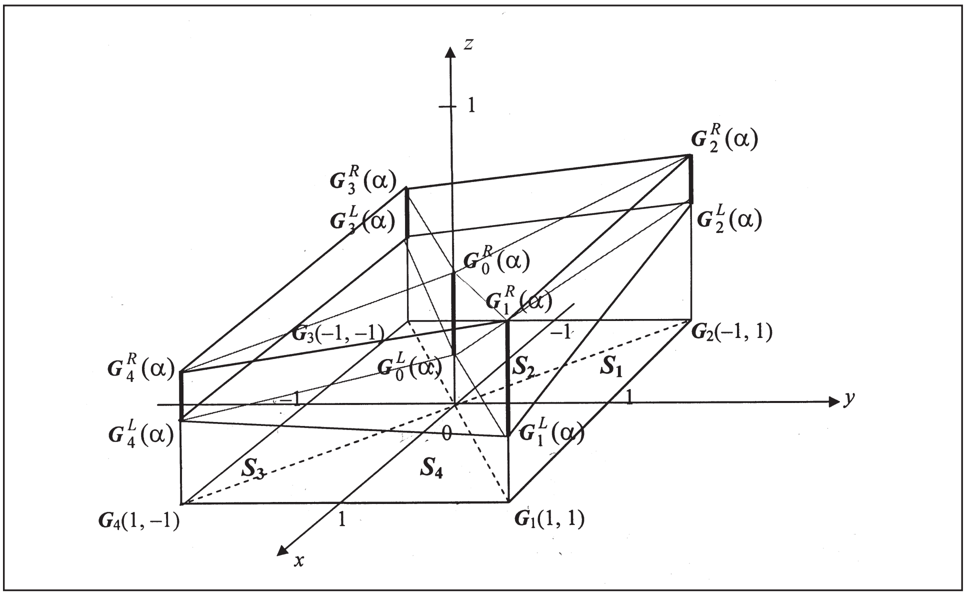

Рис. 4. Геометрическое представление базовой конструкции для интерполяции по двум нечетким траверзам

По оси $0x$ ориентирована зависимость от C^1: –1 свидетельствует об отсутствии симптома C^1, 1 — о его наличии, а 0 — состояние неопределенности относительно C^1. В плоскости $x0z$ располагается нечеткий фактор определенности $\widetilde{U}(C^1)$. Аналогично по оси $0y$ ориентирована зависимость от C^2. Таким образом, существует пять опорных точек: $G_1(1,1)$, которой соответствует оценка $\widetilde{P}(F^n/C^1, C^2)$; $G_2(-1, 1)$ с оценкой $\widetilde{P}(F^n/\overline{C}^1, C^2)$; $G_3(-1,-1)$ с оценкой $\widetilde{P}(F^n/\overline{C}^1, \overline{C}^2)$; $G_4(1,-1)$ с оценкой $\widetilde{P}(F^n/C^1, \overline{C}^2)$; центральная точка — начало координат $G_0(0,0)$ с нечеткой оценкой $\widetilde{P}^*(F)$.

Квадрат $[-1,1] \times [-1,1]$ в плоскости $x0y$ разбивается своими диагоналями на четыре треугольника $S_1, \ldots, S_4$ с вершинами соответственно $G_1G_0G_2$, $G_2G_0G_3$, $G_3G_0G_4$ и $G_4G_0G_1$. Таким образом, каждый квадрант содержит точки двух треугольников. Прямоугольник $[x^L, x^R] \times [y^L, y^R]$ определяется носителями нечетких траверзов $\widetilde{U}(C^1)$ и $\widetilde{U}(C^2)$ и лежит лишь в одном из квадрантов. Он может располагаться в одном или в двух треугольниках $S_1, \ldots, S_4$. В первом случае нечеткая интерполяция выполняется по представленной выше схеме. Во втором случае вычисляются промежуточные оценки по каждой паре треугольников, а окончательная оценка ф.п. результата равна максимуму промежуточных значений на одинаковых точках носителя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье содержатся конструктивные формальные решения по ключевым вопросам относительно процессов распространения вероятностей на БС определенного типа. Большинство из них — результат обобщения опыта авторов, накопленного при построении информационных диагностических технологий с использованием нечетких БС с недетерминированными состояниями и независимыми случайными переменными. Рассмотренные механизмы распространения вероятностей и процедуры их нечеткого оценивания апробированы в реальных технологиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pearl J. Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference. — Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1991. — 552 p.
2. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход, 2-е изд.: Пер. с англ. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. — 1408 с.
3. Cowell R.G., Dawid A.P., Spiegelhalter D. J., Lauritzen S.L. Probabilistic Networks and Expert Systems. — New York: Springer-Verlag, Inc., 1999. — 321 p.
4. Экспертные системы. Принципы работы и примеры: Пер. с англ. / Под ред. Р. Форсайта. — М.: Радио и связь, 1987. — 224 с.
5. Прикладные нечеткие системы: Пер. с япон. / Под ред. Т. Тэрано, К. Асан, М. Сугэно. — М.: Мир, 1993. — 366 с.
6. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. — М.: Горячая линия-Телеком, 2004. — 383 с.
7. Парасюк І.М., Єршов С.В., Карпінка Є.С., Верьовка О.В. Інформаційна технологія для оцінки і класифікації станів складних систем на базі нечітких даних та знань в високопродуктивному паралельному середовищі // Проблеми програмування. — 2006. — № 2–3. — С. 140–149.
8. Верёвка О.В., Парасюк И.Н. Математические основы построения нечетких байесовских механизмов вывода // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 1. — С. 105–117.
9. Верёвка О.В., Парасюк И.Н., Заложенкова И.А. Байесовские механизмы вывода с учетом зависимых симптомов // Компьютерная математика. — 2005. — № 1. — С. 35–47.
10. Мациевский С.В. Нечеткие множества. — Калининград: Изд-во Калинингр. ун-та, 2004. — 176 с.
11. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 736 с.
12. Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. — М.: Машиностроение-1, 2004. — 214 с.
13. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьева и др. — М.: Радио и связь, 1989. — 304 с.
14. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.
15. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. — М.: Наука, 1986. — 312 с.
16. Верёвка О.В., Парасюк И.Н. Линейная интерполяция в нечетком информационном пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 2. — С. 55–68.
17. Ивахненко А.Г., Петухова С.А., Юдин В.М. и др. Объективный выбор оптимальной кластеризации выборки данных при компенсации неробастных помех // Автоматика. — 1993. — № 3. — С. 46–58.

Поступила 04.02.2008