УДК 518.5, 518:512:25

В.Ф. ЗАДОРОЖНЫЙ*

ДЕФОРМАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС

Ключевые слова: *динамическая система, фазовый портрет, число обусловленности матрицы, сжатие.*

Изучение физических, биологических, технических, экономических процессов с помощью математических зависимостей стало основой математической теории динамических систем (д.с.). У истоков этой науки стояли И. Ньютон, Л. Лагранж, П. Лаплас. Качественные методы исследования, которые лежат в основе современной теории динамических систем, внесли А. Пуанкаре и А.М. Ляпунов. Эти методы не используют в явном виде решения уравнений, которыми задаются конкретные динамические системы, а требуют прямых априорных методов.

Описание динамических систем (математические модели) также допускает большое разнообразие: оно может быть представлено дифференциальными уравнениями или средствами функций алгебры логики, или с помощью графов, символической динамики, марковских цепей и т.д.

Благодаря высокому уровню развития вычислительных машин численный эксперимент сейчас занимает важное место в исследовании динамических систем. Он дает возможность выявить роль и значение различных параметров (факторов), определяющих изучаемые объекты или явления. Учитывая сложность динамических систем, при которых конечные результаты непредсказуемы, возникает проблема достоверности решений, получаемых на ЭВМ.

Проблема достоверности результатов содержит два естественных аспекта: достоверность математической модели д.с. и достоверность математического решения этой модели. Ставится задача оценки отклонения машинного решения от математического. Отметим, что последнего можем и не знать. Здесь применимо замечание А. Эйнштейна: «Если теоремы математики прилагаются к отражению реального мира, они неточны, они точны до тех пор, пока не ссылаются на действительность». В действительности данные, снятые с датчиков для введения их в уравнения динамики, никогда не могут быть точными. Неточны хотя бы потому, что в природе не существует точки. Точка — это погоня за призраком. С другой стороны, невозможно с датчика снять начальные данные в виде иррационального числа, и это иногда принципиально. Например, рассмотрим динамическую систему $y = 2x, \bmod 1$, на отрезке $[0, 1]$.

Нетрудно заметить, что для всех рациональных начальных значений $x_0 \in [0, 1]$ решение $y = y(x)$ будет периодической функцией, если же x_0^* — иррациональное число, то $y(x^*)$ — эргодическое движение, т.е., исключая множество лебеговой меры нуль из любой точки x_0^*, можно попасть в любую точку $x \in [0, 1]$ за исключением рациональных точек.

Эта простейшая динамическая модель, как и многие другие (более сложные), приводит к следующему заключению. Для корректности вычислительного процесса необходимо сначала составить фазовый портрет рассматриваемой динамической системы.

* © В.Ф. Задорожный, 2009

Уточним, что понимается под динамической системой и что такое фазовый портрет.

Определение 1 [1]. Динамической системой с непрерывным временем или потоком на множестве M^n называют такое семейство преобразований Ψ_t, $t \in R$, на M^n, что Ψ_0 — тождественное преобразование и $\Psi_{t+s} = \Psi_t \circ \Psi_s$.

При этом накладываются дополнительные ограничения — непрерывность, гладкость и т.д. Преобразование Ψ_t задаются главным образом с помощью векторного поля $X(x)$ или векторного нелинейного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \quad x \in M^n, \tag{1}$$

где M^n — C^r-многообразие с выбранной на нем системой координат $\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$. Решения $x_t(x)$ д.с. (1) называют стационарными, если образом этого решения будет точка или замкнутая кривая на фазовом пространстве. Отсюда следует, что стационарным состоянием д.с. являются только положения равновесия (точки фазового пространства) или колебательные режимы (замкнутые линии). Других стационарных состояний у д.с. не существует. Этот результат установлен А. Пуанкаре еще до открытия детерминированного хаоса. Если считать, что детерминированный хаос — это колебания с бесконечно большим периодом, то стационарные режимы д.с. не изменились.

Определение 2. Фазовый портрет д.с. Σ является фазовым пространством со стационарными фазовыми кривыми. Точка положения равновесия x_0 является также фазовой кривой.

Исходные данные для прикладных задач с начальными условиями задаются приближенно, т.е. с некоторой погрешностью. Эта погрешность может существенно исказить решение, и не только в количественном плане, но и качественно, т.е. вместо положения равновесия может возникнуть колебательный режим.

Рассмотрим простой пример [2]. Будем искать решение задачи Коши следующего уравнения:

$$\frac{du}{dx} = u - x, \quad 0 \le x \le 100, \quad u(0) = 1\,. \tag{2}$$

Как нетрудно заметить, общим решением уравнения будет функция $u(x, c) = 1 + x + ce^x$. При заданном начальном условии $x \neq 0$ находим, что $c = 0$, а $u(100) = 101$.

Рассмотрим теперь задачу с возмущенными начальными условиями

$$\frac{du}{dx} = u - x, \quad u'(0) = 1,000001,$$

где $c' = 10^{-6}$, а $u(100) \Leftrightarrow 2,7 \cdot 10^{37}$. Таким образом, небольшое изменение исходных данных сильно изменило решение. В связи с такой ситуацией правомерный вопрос: когда малые изменения начальных данных вызовут малые изменения решений? Как известно, при рассмотрении локальных решений на этот вопрос отвечает теорема о непрерывной зависимости решений от начальных данных [3]. Если же рассматривается глобальная картина поведения решений, то на этот вопрос отвечает теория устойчивости движения [4].

Однако нужно отметить, прежде всего, что рассматриваемая модель физически несостоятельна. Следовательно, при ее составлении допущена ошибка, т.е.

может использоваться неадекватная идеализация, при которой мы пренебрегли каким-либо малым эффектом, способным качественно изменить поведение особых точек. Кроме того, допущение, что линейная система корректная на всем одномерном пространстве R', очевидно несостоятельная. В связи с этим попробуем сделать компактификацию правой части, т.е. отобразим R' на отрезок (компакт) $[-1, 1]$: $y = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$. В терминах переменной y имеется компактная д.с. на отрезке $[-1, 1]$. Если теперь сравнить значение y' для $u'(0) = 1$ и y'' для $u''(0) = 1,000001$, то малые изменения начальных данных мало изменяют конечный результат.

Этот пример, как и многие другие, свидетельствует о том, что для выполнения корректной численной процедуры сначала нужно исследовать фазовый портрет д.с.

Фазовые портреты. Для изучения свойств динамической системы на компакте или же в окрестности некоторой точки x^0 используют метод фазового портрета. Самые важные объекты фазового портрета д.с. — это ее стационарные режимы. Для того чтобы стационарные режимы были наблюдаемы для вычислительных процессов, необходимо, чтобы они были устойчивы по Ляпунову. Поскольку структура параметров д.с. сама подвергается возмущениям, то нужно потребовать, чтобы д.с. обладала свойствами грубости. Для этого необходимо, чтобы рассматриваемый стационарный режим был асимтотически устойчив [4], так как в этом случае имеет место обязательно структурная устойчивость, т.е. д.с. грубая. Если рассматривать достаточно малую окрестность положения равновесия системы уравнений в возмущениях, то функцию Ляпунова можно построить в виде квадратичной формы. В силу этого возникает вопрос обусловленности матриц.

Рассмотрим линейную систему $\dot{x} = Ax$, где A — стационарная матрица. Если спектр $\sigma(A)$ лежит в левой полуплоскости, то для всякой заданной матрицы C — симметричной и такой, что $\sigma(C) < 0$, существует симметричная матрица B ($\sigma(B) > 0$) такая, что в метрике $\|\cdot\|$, порождаемой этой матрицей, оператор A будет диссипативным оператором. Это значит, что линии уровня функции Ляпунова (квадраточной формы) гомеоморфны некоторым сферам в новой метрике.

Для того чтобы оценить грубость системы или чувствительность параметров системы к возмущениям, рассмотрим уравнения для определения матрицы B:

$$AB + BA^* = C \tag{3}$$

для заданной опреленно-отрицательной матрицы C. Уравнение (3) ставит в соответствие матрице C матрицу B, причем это соответствие линейно. Следовательно, в пространстве квадратичных матриц n-го порядка уравнение (3) определяет линейный оператор $F(B) = A^* B + BA$. Разрешимость уравнения (3), таким образом, определяется существованием обратного оператора F^{-1}, так как $B = F^1 C$. Известно, что для линейных операторов необходимым и достаточным условием существования обратного есть условие отсутствия в его спектре нулевых элементов. А. Ляпунов доказал теорему [4] о том, что все корни $\{\mu\}$ оператора F определяются формулой $\{\mu\} \in m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n$, где $\lambda_i \in \delta(A)$, $i = 1, \ldots, n$, $\{m_i\}$ — любые целые неотрицательные числа, связанные соотношением $\sum m_i = m$, где m — порядок формы V. Так как здесь рассматриваются только квадратичные формы, то любое число μ определяется уравнением $\mu = \lambda_i + \lambda_j$.

Поскольку определение матрицы B связано с определением обратного оператора F^{-1}, имеет смысл рассмотреть задачу оценивания ошибок, возникающих при построении функции Ляпунова, как квадратичной формы при решении уравнения (3). Известно, что если вычисления проводятся на цифровом компьютере с конечным машинным словом, неизбежно возникают ошибки округления и усечения. Более того, даже если все вычисления будут выполняться с предельной точностью, элементы матрицы A могут являться результатами некоторых экспериментов или некоторых предварительных вычислений, вносящих ошибки. Так или иначе погрешность уже есть в исходной информации. Таким образом, правые части д.с. задаются с некоторой погрешностью. Известно, что в большинстве используемых алгоритмах эффект ошибок округления при вычислениях можно смоделировать с помощью возмущений лишь начальных данных, т.е. вычисляют не матрицы B и B^{-1}, а матрицы $(B+E)$ и $(B+E)^{-1}$, где матрица E — некоторое малое в матричной норме $||\cdot||$ возмущение, так что матрица E обратима. Величину

$$\chi(B)=\begin{cases}||B^{-1}||\,||B||, & \text{если } B \text{ невырожденна,}\\ \infty, & \text{если } B \text{ вырожденна,}\end{cases}$$

называют числом обусловленности матрицы B [5] по отношению к введенной выше матричной норме $||||$. Заметим, что

$$\chi(B)=||B^{-1}||\,||B||\geq||B^{-1}\cdot B||=||I||=1$$

для любой матричной нормы. При малых значениях нормы $||E||$, как нетрудно показать, относительная ошибка в обратной матрице имеет одинаковый порядок малости с относительной ошибкой в начальных данных при условии, что $\chi(B)$ не очень велика. Теперь, имея в виду задачу обращения, при больших $\chi(B)$ говорят о плохой обусловленности матрицы B по отношению к норме $||\cdot||$, при малых $\chi(B)$ (близких к единице) говорят о хорошей обусловленности матрицы B по отношению к норме $||\cdot||$. Наконец, при $\chi(B)=1$ матрицу B называют идеальной обусловленной по отношению к норме $||\cdot||$. Число обусловленности невырожденной нормальной матрицы по отношению к спектральной норме задается формулой

$$\chi(A)\equiv\rho(A)\rho(A^{-1})=\frac{|\lambda\max(A)|}{|\lambda\min(A)|}.$$

Здесь ρ — спектральный радиус, а min и max понимаются по абсолютной величине. Так как B — симметричная матрица, то она нормальная, следовательно, для нее число обусловленности будет

$$\chi(B)=\left|\frac{\lambda\max(B)}{\lambda\min(B)}\right|.$$

Условие нормальности матрицы: $AA^*=A^*A$ здесь существенно. Известны примеры, когда число обусловленности для матрицы будет удовлетворять уравнению $\chi(A)=0(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon>0$, т.е. матрица плохо обусловлена, хотя отношение абсолютных величин наибольшего и наименьшего собственных значений близко к единице. Рассмотрим пример [5, с. 409]:

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1+\varepsilon\end{bmatrix},\quad \varepsilon>0\,.$$

Прямым подсчетом легко установить, что

$$\left|\frac{\lambda \max (A_1)}{\lambda \min (a_1)}\right| = O(1).$$

Однако $\chi(A_1) = O(\varepsilon^{-1})$ по отношению к произвольной матричной норме и, следовательно, матрица A_1 плохо обусловлена, т.е. $||A^{-1}|| \, |A||$ — достаточно большая величина.

Бесконечные матрицы. Очень часто вычислительная процедура на каждом шаге увеличивает размерность оператора, например при решении интегральных уравнений Фредгольма методом замены интегрального уравнения алгебраической системой линейных уравнений с помощью применения квадратурной формулы (см. [6]). Поскольку линейный оператор, участвующий в этих расчетах, может и не иметь ограниченного предельного, возникают дополнительные ограничения. Это видно на одном из самых упоминаемых примеров плохо обусловленной матрицы, матрицы Гильберта

$$H_n = [h_{ij}] \in M_n, \quad h_{ij} = 1/(i+j+1), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Матрица H_n симметрична и поэтому ее число обусловленности $\chi(H_n) = \left|\frac{\lambda \max}{\lambda \min}\right|$.

Известно [5, с. 411], что число обусловленности матрицы H_n асимптотически совпадает с экспонентой $\exp(c_n)$, где константа $c \Leftrightarrow 3, 5$, а спектральный радиус можно представить как

$$\rho(H_n) = \pi + O[1/\log n] \text{ при } n \to \infty,$$

поэтому имеем

$$\chi(H_3) \sim 5 \cdot 10^2, \quad \chi(H_6) \sim 1,5 \cdot 10^7, \quad \chi(H_8) \sim 1,5 \cdot 10^{10}.$$

Хотя все элементы матрицы равномерно ограничены и спектральный радиус не очень большой, обусловленность очень плохая. Это объясняется достаточно просто. Поскольку по определению

$$\chi(H_n) = ||H_n^{-1}|| \, ||H_n||,$$

но при $n \to \infty$ $||H_n^{-1}|| = \lim\limits_{n \to \infty} ||< i + j + 1 >|| \to \infty$, что и объясняет плохую сходимость.

Для матриц достаточно большого порядка численное определение обратной матрицы, и тем более определение собственных чисел матрицы, требует большого объема работ и времени. Этот традиционный способ можно обойти, если воспользоваться сжатием.

Матрицы сжатия. Будем называть некоторую матрицу B матрицей сжатия, если ее норма меньше единицы: $||B|| < 1$.

Воспользуемся известными кругами Гершгорина. Пусть r — радиус круга переменного z на комплексной плоскости и такой, что множество

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{Z \in C : |Z - b_{ii}| \le R_i'(B)\} \equiv G(B),$$

$$R_i'(B) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}} |b_{ij}|, \quad 1 \le i \le n,$$

кругов Гершгорина находится внутри:

$$C \subset C^0, \quad C^0 = \{Z : ||Z||^2 < C^0\}.$$

Отобразим круг C в круг единичного радиуса $\rho = \dfrac{Z-a}{r}$, где a — центр круга C. Легко сделать заключение, что все собственные числа матрицы B располагаются внутри левой полуплоскости тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n \to \infty} \left\{\dfrac{B-aE}{r}\right\}^k \to 0$. Такой подход иногда может сократить количество числовых операций и улучшить анализ д.с. [7].

Таким образом, делаем следующее заключение. Анализ динамической системы нужно выполнять, используя комбинированный метод: а) построить фазовый портрет исследуемой динамической системы; б) для фазовых областей, лежащих «далеко» от особых линий, интегрировать с помощью численных методов, а когда полученные таким способом решения подходят достаточно близко к ним, применить качественные методы анализа.

В июне 2007 г. в Санкт-Петербурге проходил Международный конгресс «Нелинейный динамический анализ — 2007» [8], на котором возникла незапланированная дискуссия о корректности математических моделей физических процессов и корректности соответствующих им вычислительных процедур. Академик РАН С.К. Годунов и проф. Ю.М. Петров предложили автору изложить свою точку зрения на этот вопрос, в частности, для первого метода Ляпунова. Автор выражает глубокую благодарность проф. И.Н. Молчанову за помощь в рассмотрении этого весьма нетривиального вопроса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимура И. Топология слоений. — М.: Мир, 1979. — 317 с.
2. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 288 с.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964. — 272 с.
4. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 530 с.
5. Хорн Р., Джонсон И. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 654 с.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.М. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 750 с.
7. Зубов И. Теория колебаний. — М.: Высш. шк., 1979. — 400 с.
8. Задорожный В.Ф., Игнатенко А.П. Научная информация: Междунар. конгресс «Нелинейный динамический анализ–2007», посвященный 150-летию со дня рождения академика А.М. Ляпунова // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 5. — С. 188–189.

Поступила 27.03.2008