УДК 518.9

А.Н. ХИМИЧ, К.А. ЧИКРИЙ

ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Ключевые слова: *импульсная система, дельта-функция Дирака, конфликтно-управляемый процесс, многозначное отображение, функционал Минковского, интеграл Аумана, условие Понтрягина, формула Коши.*

ВВЕДЕНИЕ

Появление дискретно-непрерывных или гибридных систем в научной практике обусловлено развитием методов цифрового автоматического управления в непрерывных системах. Подобные процессы обычно имеют непрерывную и дискретную (импульсную) части, которые при совместном функционировании приводят к появлению у системы новых свойств. Присутствие элементов, работающих в импульсном режиме, приводит к существенному изменению характеристик системы. Импульсное управление, как воздействие, вызывает мгновенное изменение состояния системы, а следовательно, разрыв ее траектории как функции времени. В математических моделях оказалось естественным заменить эти быстрые изменения скачкообразными. Естественным расширением чисто импульсных управлений являются управления меры [28], и дифференциальные уравнения с мерами [4] являются адекватным математическим средством для описания соответствующих траекторий. Исследованию импульсных процессов посвящены, например, работы [4–6, 22, 24, 29–31], а различные приложения импульсных управляемых систем в динамике полета, экономическом анализе, при обработке информации, в системах массового обслуживания и т.д. описаны в обширной литературе, в частности в [25, 27].

В настоящей статье объектом изучения являются игровые задачи динамики для процессов с импульсными управлениями. В основу исследований положен принцип гарантированного результата, который реализуется с помощью метода разрешающих функций [8–10, 12, 13]. Этот метод тесно связан с функционалами Минковского [15, 21] и требует введения обратных к ним отображений, так называемых обратных функционалов Минковского [8, 26]. Суть метода состоит в построении по известным параметрам конфликтно-управляемого процесса числовых функций, связанных с упомянутыми функционалами и интегрально характеризующих степень близости траектории к терминальному множеству. Следует заметить, что в теории динамических игр существует ряд альтернативных методов оптимизации конфликтно-управляемых процессов [1–3, 7, 11, 16–18], обладающих широкими возможностями.

Привлекательной стороной упомянутого ранее метода разрешающих функций [8] является тот факт, что он дает полное обоснование классического правила параллельного сближения, а также позволяет эффективно использовать современную технику многозначных отображений и их селекторов [14, 15, 20, 21, 23] в обоснованиях игровых конструкций и получении на их основе содержательных результатов.

В настоящей статье последовательно рассматриваются три случая импульсного управления преследователя, убегающего, а также обоих игроков.

© А.Н. Химич, К.А. Чикрий, 2009

Использование в качестве управлений одного из игроков обобщенных функций, в данном случае дельта-функций Дирака, дискретизирует конфликтно-управляемый процесс и в определенной степени упрощает исследование. В каждом случае получены достаточные условия разрешимости задачи сближения за конечное время. Работа продолжает исследования, начатые в [19], с использованием результатов [9].

Теоретические факты иллюстрируются на примере игры преследования с учетом простого движения, импульсного управления и различных информационных предположений, где проявляется эффект параллельного сближения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейный конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = Az + u - v,\ z \in R^n. \tag{1}$$

Здесь A — квадратная матрица порядка n, u — параметр управления преследователя, v — параметр управления убегающего. Структура управлений игроков и их информированность будет оговорена относительно каждого рассматриваемого случая. Задача преследователя состоит в том, чтобы специальным образом, выбирая управление u, за конечное время вывести траекторию системы (1) на цилиндрическое терминальное множество

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а M — непустой компакт из ортогонального дополнения L к M_0 в пространстве R^n.

Задача убегающего противоположна — обеспечить уклонение от встречи траектории системы (1) с терминальным множеством M^* либо максимально оттянуть время встречи.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОКОНЧАНИЯ ИГРЫ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЕНИЯХ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЯ

Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots,$ — последовательность моментов времени, которые занумерованы в порядке возрастания и не имеют конечных граничных точек. Иными словами, какой-либо компактный отрезок $[a, b]$, $[a, b] \subset [0, \infty)$, содержит в себе конечное число точек этой последовательности, т.е. $\tau_i \to +\infty$ при $i \to +\infty$.

Будем считать, что преследователь может влиять на систему (1) только в моменты τ_i, $i \in N$, и его влияние в эти моменты имеет импульсный характер, что выражается дельта-функцией Дирака [4]

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i). \tag{3}$$

Будем считать, что в момент $\tau_0 = 0$ импульс преследователя равен нулю и реальное управление процессом с помощью импульсов начинается с момента $\tau_1 > 0$, где векторы скачков u_i выбираются из некоторого компактного множества $U, U \subset R^n$. Здесь и далее $\delta(t)$ — дельта-функция, а управление убегающего $v(t)$ — произвольная измеримая функция, которая принимает значения из некоторого компакта $v, v \subset R^n$. Таким образом, в правую часть системы (1) адитивно входят обобщенные функции. Согласно [4, 5] при произвольных допустимых управлениях игроков решение системы (1) существует при любом начальном условии $z^0 = z(0)$, оно единственно и является абсолютно непрерывной функцией на интервалах (τ_{i-1}, τ_i), $i \in N$, N — множество натуральных чисел. Это решение имеет вид

$$z(t) = e^{At} z^0 + \sum_{\tau_i \in (0, t]} e^{A(t-\tau_i)} u_i - \int_0^t e^{A(t-\theta)} \upsilon(\theta) d\theta$$

и представляет собой аналог формулы Коши для рассматриваемого случая. Вполне очевидно, что функция $z(t)$ при $t = \tau_i$ терпит разрыв и осуществляет скачок. В точках разрыва эта функция непрерывна справа.

Назовем предысторией управления убегающего в момент t, $t \geq 0$, функцию $\upsilon_t(\cdot) = \{\upsilon(s) : \upsilon(s) \in \upsilon, s \in [0, t]\}$. Будем считать, что в каждый момент времени t, $t \geq 0$, преследователь имеет информацию о начальном состоянии z^0 и о предыстории управления убегающего $\upsilon_t(\cdot)$ [8]. Примем сторону преследователя, и будем ориентироваться на выбор противником произвольного допустимого управления, которое заранее нам неизвестно. При этом установим достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время и найдем управление преследователя, которое позволяет реализовать этот результат.

Обозначим π оператор ортогонального проектирования из R^n на L, а e^{At} — фундаментальную матрицу однородной системы $\dot{z} = Az$.

Рассмотрим многозначные отображения

$$W_i(n, \upsilon(\cdot)) = \pi e^{A(\tau_n - \tau_i)} U - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{A(\tau_n - \theta)} \upsilon(\theta) d\theta, \tag{4}$$

$$W_i(n) = \bigcap_{\upsilon(\cdot) \in \upsilon(\tau_{i-1}, \tau_i)} W_i(n, \upsilon(\cdot)) = \pi e^{A(\tau_n - \tau_i)} U \Rightarrow \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{A(\tau_n - \theta)} V d\theta,$$

где $i = 1, \ldots, n$, $n \in N$. Здесь и далее будем обозначать через $\upsilon(a, b)$ множество измеримых на отрезке $[a, b]$ функций, которые принимают значения из множества υ, $X \Rightarrow Y = \{x : x + Y \subset X\}$ — геометрическая разность Минковского. Интеграл в определении множеств $W_i(n)$ следует понимать как интеграл Аумана от соответствующего многозначного отображения.

Следующее условие представляет собой дискретный аналог условия, известного в теории динамических игр как условие Понтрягина [1, 3, 8].

Условие 1. Многозначные отображения $W_i(n)$ принимают непустые значения при всех $i = 1, \ldots, n$, $n \in N$.

В силу условия 1 согласно схеме метода разрешающих функций в каждом множестве $W_i(n)$ выберем и зафиксируем определенные элементы $\gamma_i(n)$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in N$. Обозначим этот набор селекторов через $\gamma = \gamma(n) = \{\gamma_i(n)\}_{i=1}^n$, $n \in N$, и положим

$$\xi(n, z, \gamma) = \pi e^{A\tau_n} z + \sum_{i=1}^n \gamma_i(n).$$

Рассмотрим многозначные отображения

$$\mathrm{A}_i(n, \upsilon(\cdot)) = \left\{\alpha \ge 0 : [W_i(n, \upsilon(\cdot)) - \gamma_i(n)\ \ ] \big| \, \alpha [M - \xi(n, z, \gamma)] \ne \varnothing \right\} \tag{5}$$

и их опорные функции в направлении $+1$

$$\alpha_i(n, \upsilon(\cdot)) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathrm{A}_i(n, \upsilon(\cdot))\}, \; i = 1, \ldots, n, \; n \in N. \tag{6}$$

Последние будем называть разрешающими функциями. Очевидно, что при $\xi(n, z, \gamma) \in M$ множества $\mathrm{A}_i(n, \upsilon(\cdot))$ неограничены, а функции $\alpha_i(n, \upsilon(\cdot))$ принимают бесконечные значения. Обозначим

$$T(z, \gamma) = \min\left\{ n \in N : \sum_{i=1}^{n} \inf_{\upsilon(\cdot) \in \upsilon(\tau_{i-1}, \tau_i)} \alpha_i(n, \upsilon(\cdot)) \ge 1 \right\}. \tag{7}$$

Если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном n, то будем считать, что $T(z, y) = +\infty$.

Обозначим $T = T(z^0, \gamma^0)$, зафиксировав z^0 и γ^0.

Условие 2. Имеет место поточечное равенство

$$\mathrm{A}_i(T, \upsilon(\cdot)) = [0, \alpha_i(T, \upsilon(\cdot))]$$

для всех $\upsilon(\cdot) \in \upsilon(\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1, \ldots, T$.

Условие 3. Многозначные отображения

$$W_i(T, \upsilon(\cdot)) - \gamma_i(T), \; \upsilon(\cdot) \in \upsilon(\tau_{i-1}, \tau_i), \; i = 1, \ldots, T,$$

при $\xi(T, z^0, \gamma^0) \approx M$ являются звездными по конусу $\overline{\mathrm{con}}\,[M - -\xi(T, z^0, \gamma^0)]$ относительно нуля.

Вполне очевидно, что из условия 3 вытекает условие 2 [9].

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), который находится в начальном состоянии z^0, с цилиндрическим выпуклым терминальным множеством (2) при импульсном управлении преследователя выполнены условия 1 и 2 при некотором фиксированном наборе селекторов γ^0, причем $T(z^0, \gamma^0) < +\infty$.

Тогда траектория системы (1) может быть приведена из начального состояния z^0 на терминальное множество (2) в момент $\tau_{T(z^0, \gamma^0)}$.

Доказательство. Зафиксируем некоторую функцию $\upsilon_T(\cdot)$, $\upsilon_T(\cdot) \in \upsilon(0, \tau_T)$.

Рассмотрим сначала случай $\xi(T, z^0, \gamma^0) \approx M$. Из условия 2 и неравенства в (7) вытекает, что существует такая числовая функция $\alpha_i(T)$, $\alpha_i(T) \in \mathrm{A}_i(T, \upsilon(\cdot))$, $i = 1, \ldots, T$, которая не зависит от $\upsilon(\cdot)$, и

$$\sum_{i=1}^{T} \alpha_i(T) = 1. \tag{8}$$

Такую функцию можно построить следующим образом:

$$\alpha_i(T) = 1/\alpha(T) \inf_{\upsilon(\cdot) \in \upsilon(\tau_{i-1}, \tau_i)} \alpha_i(T, \upsilon(\cdot)),$$
$$\text{где } \alpha(T) = \sum_{i=1}^{T} \inf_{\upsilon(\cdot) \in \upsilon(\tau_{i-1}, \tau_i)} \alpha_i(T, \upsilon(\cdot)). \tag{9}$$

Отметим, что $\alpha(T) \ge 1$.

Векторы скачков u_i, $u_i \in U$, $i = 1, \ldots, T$, в моменты τ_i выберем из условия

$$\pi e^{A(\tau_T - \tau_i)} u_i - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{A(\tau_T - \theta)} \upsilon(\theta) d\theta - \gamma_i(T) \in \alpha_i(T)[M - \xi(T, z^0, \gamma^0)]. \tag{10}$$

Поскольку $\alpha_i(T) \in \mathrm{A}_i(T, \upsilon(\cdot))$, $\upsilon(\cdot) \in \upsilon(\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1, \ldots, T$, то из определения многозначного отображения (5) вытекает, что решение включения (10) существует. Зафиксируем векторы u_i^*, $u_i^* \in U$, $i = 1, \ldots, T$, которые удовлетворяют включению (10). Тогда согласно формуле Коши получим

$$\pi z(\tau_T) = \pi e^{A\tau_T} z^0 + \sum_{i=1}^{T} \pi e^{A(\tau_T - \tau_i)} u_i^* - \sum_{i=1}^{T} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{A(\tau_T - \theta)} \upsilon(\theta) d\theta. \tag{11}$$

Прибавим и вычтем от правой части равенства (11) величину $\sum_{i=1}^{T} \gamma_i(T)$. Тогда, учитывая закон выбора управления преследователем (10), получаем включение

$$\pi z(\tau_T) \in \left[1 - \sum_{i=1}^{T} \alpha_i(T)\right] \xi(T, z^0, \gamma^0) + \sum_{i=1}^{T} \alpha_i(T) M. \tag{12}$$

Отсюда в силу неотрицательности функций $\alpha_i(T)$ и соотношения (8) с учетом выпуклости множества M получим $\pi z(\tau_T) \in M$. Последнее равносильно включению $z(\tau_T) \in M^*$.

Пусть теперь $\xi(T, z^0, \gamma^0) \in M$. Тогда очевидно, что $\alpha_i(T, \upsilon(\cdot)) \equiv +\infty$, $\upsilon(\cdot) \in \upsilon(\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1, \ldots, T$, согласно формулам (5), (6) и условию 1. Соответственно $\alpha(T) = +\infty$ и построение функций $\alpha_i(T)$ по формуле (9) приводит к неопределенности. Поэтому в данном случае векторы скачков u_i, $u_i \in U$, $i = 1, \ldots, T$, выбираем из условия

$$\pi e^{A(\tau_T - \tau_i)} u_i - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{A(\tau_T - \theta)} \upsilon(\theta) d\theta - \gamma_i(T) = 0, \tag{13}$$

что соответствует выбору значений $\alpha_i(T)$, $i = 1, \ldots, T$, во включении (10), равными нулю. Такое решение существует согласно аналогу условия Понтрягина — условию 1. Тогда, положив во включении (12) $\alpha_i(T) = 0$ для $i = 1, \ldots, T$, получим

$$\pi z(\tau_T) = \xi(T, z^0, \gamma^0) \in M.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если рассмотреть случай, когда в начальный момент $\tau_0 = 0$ преследователь может выбирать ненулевой импульс u_0, то в (3) следует внести член $u_0 \delta(t)$, т.е.

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i).$$

Соответственно к многозначным отображениям (4) следует добавить соотношение $W_0(n) \equiv W_0(n, \upsilon(\cdot)) = \pi e^{A\tau_n} U$, $n \in N$, а вектор $\xi(n, z, \gamma)$ нужно дополнить слагаемым $\gamma_0(n)$, $\gamma_0(n) \in W_0(n)$. Эти изменения будут требовать рассмотрения многозначного отображения

$$\mathrm{A}_0(n) \equiv \mathrm{A}_0(n, \upsilon(\cdot)) = \{\alpha \ge 0 : [W_0(n) - \gamma_0(n)] \cap \alpha[M - \xi(n, z, \gamma)] \ne \varnothing\}$$

и его опорной функции

$$\alpha_0(n) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathrm{A}_0(n)\}.$$

В выражении для $T(z, \gamma)$ сумма дополнится еще одним слагаемым $\alpha_0(n)$, а условие 2 следует дополнить равенством

$$\mathrm{A}_0(T) = [0, \alpha_0(T)].$$

С этими дополнениями теорема 1 остается справедливой, а ее доказательство полностью аналогично приведенному.

Замечание 2. В изложенной схеме выход траектории конфликтно-управляемого процесса (1) на множество M^* может быть зафиксирован лишь в моменты τ_i выдачи импульса, поскольку лишь в эти моменты подсчитывается разрешающая функция (6) и меняется критерий выхода в (7).

СХЕМА СБЛИЖЕНИЯ В КЛАССЕ КОНТРУПРАВЛЕНИЙ

Рассмотрим многозначные отображения

$$\mathrm{A}_i(n) = \bigcap_{v(\cdot)\in v(\tau_{i-1}, \tau_i)} \mathrm{A}_i(n, v(\cdot)),\ i = 1, \ldots, n,\ n \in N,$$

и функции $\alpha_i(n) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathrm{A}_i(n)\}$.

Заметим, что $\mathrm{A}_i(n)$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in N$, — непустые множества, поскольку $0 \in \mathrm{A}_i(n, v(\cdot))$ для всех $v(\cdot) \in v(\tau_{i-1}, \tau_i)$. Кроме того, при $\xi(n, z, \gamma) \in M$ множества $\mathrm{A}_i(n)$ неограничены и $\alpha_i(n) \equiv +\infty$.

Обозначим

$$\theta(z, \gamma) = \min\left\{n \in N : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(n) \geq 1\right\}. \tag{14}$$

Если неравенство в (14) не выполняется ни при одном n, то положим $\theta(z, \gamma) = +\infty$. Зафиксировав z^0 и γ^0, обозначим $\theta = \theta(z^0, \gamma^0)$.

Условие 4. При $\xi(0, z^0, \gamma^0) \approx M$ отображение $\mathrm{A}_\theta(\theta)$ является выпуклозначным, т.е.

$$\mathrm{A}_\theta(\theta) = [0, \alpha_\theta(\theta)].$$

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2), $z(0) = z^0$, $M = \operatorname{co} M$, при импульсном управлении преследователя выполнены условия 1 и 4 для фиксированного набора селекторов γ^0, причем $\xi(z^0, \gamma^0) < +\infty$.

Тогда траектория системы (1) из начального состояния z^0 может быть приведена на множество M^* в момент $\tau_{\theta(z^0, \gamma^0)}$.

Доказательство. Пусть $v_\theta(\cdot)$, $v_\theta(\cdot) \in v(0, \tau_\theta)$, — произвольное управление убегающего.

Рассмотрим случай $\xi(\theta, z^0, \gamma^0) \approx M$. Из соотношения (14) и условия 4 вытекает, что существует такое число α_*, $\alpha_* \in \mathrm{A}_\theta(\theta)$, что

$$\sum_{i=1}^{\theta-1} \alpha_i(\theta) + \alpha_* = 1. \tag{15}$$

Векторы скачков u_i, $u_i \in U$, $i = 1, \ldots, \theta - 1$, в момент τ_i выберем из условия

$$\pi e^{A(\tau_\theta - \tau_i)} u_i - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{A(\tau_\theta - s)} v(s) ds - \gamma_i(\theta) \in \alpha_i(\theta)[M - \xi(\theta, z^0, \gamma^0)], \tag{16}$$

а при $i = \theta$ — из включения (16), положив $\alpha_\theta(\theta) = \alpha_*$.

Из построения многозначных отображений $\mathrm{A}_\theta(\theta)$, $i=1,\ldots,\theta$, и условия 4 вытекает, что решение включения (16) существует.

Зафиксировав векторы $\bar{u}_i$, $\bar{u}_i \in U$, $i=1,\ldots,\theta$, которые являются решением включения (16), получим из формулы Коши

$$\pi z(\tau_\theta) = \pi e^{A\tau_\theta} z^0 + \sum_{i=1}^{\theta} \pi e^{A(\tau_\theta - \tau_i)} \bar{u}_i - \sum_{i=1}^{\theta} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{A(\tau_\theta - s)} \upsilon(s) ds. \qquad (17)$$

Прибавляя и вычитая от правой части соотношения (17) величину $\sum_{i=1}^{\theta} \gamma_i(\theta)$ с учетом закона выбора управления (16), получаем

$$\pi z(\tau_\theta) \in \left[1 - \left(\sum_{i=1}^{\theta-1} \alpha_i(\theta) + \alpha_*\right)\right] \xi(\theta, z^0, \gamma^0) + \left(\sum_{i=1}^{\theta-1} \alpha_i(\theta) + \alpha_*\right) M. \qquad (18)$$

Далее, в силу неотрицательности чисел $\alpha_i(\theta)$, $i=1,\ldots,\theta-1$, α_*, и равенства (15) получим $\pi z(\tau_\theta) \in M$.

Пусть $\xi(\theta, z^0, \gamma^0) \in M$. Тогда формально $\alpha_i(\theta) \equiv +\infty$, $i=1,\ldots,\theta$. Мы же положим $\alpha_i(\theta) \equiv 0$, $i=1,\ldots,\theta$, в формуле (16) и векторы скачков u_i, $u_i \in U$, $i=1,\ldots,\theta$, выберем из условия

$$\pi e^{A(\tau_\theta - \tau_i)} u_i - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{A(\tau_\theta - s)} \upsilon(s) ds - \gamma_i(\theta) = 0.$$

Соответственно при $\alpha_i(\theta)$, $i=1,\ldots,\theta-1$, α_*, равными нулю, из включения (18) получим

$$\pi z(\tau_\theta) = \xi(\theta, z^0, \gamma^0) \in M.$$

СЛУЧАЙ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ УБЕГАЮЩЕГО

Пусть теперь управление преследователя — измеримая функция времени, которая принимает значения из компакта U, $U \in R^n$. Убегающий, в свою очередь, может влиять на ход конфликтно-управляемого процесса лишь в моменты τ_i, $0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\ldots$, причем последовательность $\{\tau_i\}$ не имеет конечных граничных точек. Его управление имеет вид

$$\upsilon(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \upsilon_i \delta(t-\tau_i), \; t \ge 0,$$

где векторы скачков υ_i принадлежат некоторому компакту υ, $\upsilon \subset R^n$.

Будем рассматривать процесс

$$\dot{z} = Az + u - \sum_{i=0}^{\infty} \upsilon_i \delta(t-\tau_i), \; z \in R^n, \; u \in U, \; \upsilon_i \in \upsilon, \; i=0,1,\ldots \qquad (19)$$

Согласно [4, 5] решение системы (19) при выбранных управлениях игроков существует при каком-либо начальном условии $z(0)=z^0$, оно единственно и является абсолютно непрерывной функцией на интервалах (τ_i, τ_{i+1}), $i \in N \cap \{0\}$.

Это решение имеет вид

$$z(t)=e^{At}z^0+\int_0^t e^{A(t-s)}u(s)ds-\sum_{i:\tau_i\in[0,t]} e^{A(t-\tau_i)}v_i\ .$$

Введем целочисленную функцию

$$n(t)=\max\{i\in N\cup\{0\}:\tau_i\le t\}$$

и рассмотрим многозначные отображения

$$W_i(t,v)=\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\pi e^{A(t-s)}Uds-\pi e^{A(t-\tau_i)}v,\ i=0,1,\ldots,n(t)-1,$$

$$W_{n(t)}(t,v)=\int_{\tau_{n(t)}}^{t}\pi e^{A(t-s)}Uds-\pi e^{A(t-\tau_{n(t)})}v,$$

$$W_i(t)=\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\pi e^{A(t-s)}Uds \Rightarrow \pi e^{A(t-\tau_i)}V,\ i=0,1,\ldots,n(t)-1,$$

$$W_{n(t)}(t)=\int_{\tau_{n(t)}}^{t}\pi e^{A(t-s)}Uds \Rightarrow \pi e^{A(t-\tau_{n(t)})}V,$$

где

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\pi e^{A(t-s)}Uds=\left\{\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\pi e^{A(t-s)}u(s)ds: u(s)\in U,\ u(s)-\text{измерима}\right\}.$$

Обозначим

$$\operatorname{dom} W=\{t\ge 0: W_i(t)\ne\varnothing,\ i=0,1,\ldots,n(t)\}.$$

Отметим, что множества $W_i(\tau_i)$ непустые лишь в случае, когда множество πV является точкой.

Условие 5. $\operatorname{dom} W\ne\varnothing$. Для $t\in\operatorname{dom} W$ зафиксируем набор селекторов

$$\gamma=\gamma(t)=\{\gamma_i(t):\gamma_i(t)\in W_i(t),\ i=0,1,\ldots,n(t)\}. \tag{20}$$

Пусть

$$\xi(t,z,\gamma)=\pi e^{At}z+\sum_{i=0}^{n(t)}\gamma_i(t).$$

Рассмотрим многозначные отображения

$$\mathrm{A}_i(t,v)=\left\{\alpha\ge 0:[W_i(t,v)-\gamma_i(t)]\,|\,\alpha[M-\xi(t,z,\gamma)]\ne\varnothing\right\} \tag{21}$$

и соответствующие разрешающие функции

$$\alpha_i(t,v)=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathrm{A}_i(t,v)\},\ i=0,1,\ldots,n(t).$$

Из выражения (21) видно, что при $\xi(t,z,\gamma)\in M$ множества $\mathrm{A}_i(t,v)$ неограничены, а функции $\alpha_i(t,v)$ принимают бесконечные значения.

Обозначим

$$T^1(z,\gamma)=\left\{t\in\operatorname{dom} W:\ \sum_{i=0}^{n(t)}\inf_{v\in v}\alpha_i(t,v)\ge 1\right\}. \tag{22}$$

Если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном $t \in \operatorname{dom} W$, то положим $T^1(z, \gamma) = \varnothing$.

Пусть $T_0 \in T^1(z^0, \gamma^0)$, где z^0 — начальное состояние процесса (19), а γ^0 — фиксированный набор селекторов (20).

Условие 6. Имеют место соотношения $\mathrm{A}_i(T_0, \upsilon) = [0, \alpha_i(T_0, \upsilon)]$, $i = 0, 1, \ldots, n(T_0)$, $\upsilon \in \upsilon$.

Теорема 3. Если для процесса (19) с терминальным множеством (2) при импульсном управлении убегающего выполнено условие 5, а множество M выпукло, для начального состояния z^0 и набора селекторов γ^0 множество $T^1(z^0, \gamma^0)$ непусто, то для любого $T_0 \in T^1(z^0, \gamma^0)$, для которого выполнено условие 6, траектория процесса (19) может быть приведена из начального состояния z^0 на терминальное множество M^* в момент T_0.

Доказательство. Обозначим $n_{T_0} = n(T_0)$ и зафиксируем набор векторов-скачков $\{v_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n_{T_0}$.

Будем считать, что $\xi(T_0, z^0, \gamma^0) \overline{\in} M$. Из неравенства в (22) и условия 6 вытекает, что существуют такие числа $\alpha_i(T_0)$, что $\alpha_i(T_0) \in \mathrm{A}_i(T_0, \upsilon)$, $i = 0, 1, \ldots, n(T_0)$, не зависящие от υ, причем

$$\sum_{i=0}^{n(T_0)} \alpha_i(T_0) = 1. \tag{23}$$

Аналогично (9) эти числа могут быть выбраны в виде

$$\alpha_i(T_0) = 1 / \alpha(T_0) \inf_{\upsilon \in \upsilon} \alpha_i(T_0, \upsilon), \text{ где } \alpha(T_0) = \sum_{i=0}^{n(T_0)} \inf_{\upsilon \in \upsilon} \alpha_i(T_0, \upsilon). \tag{24}$$

Поскольку функции $\alpha_i(T_0, \upsilon)$, $i = 0, 1, \ldots, n(T_0)$, $\upsilon \in \upsilon$, принимают неотрицательные значения и $\alpha(T_0) \geq 1$, то в силу условия 6 числа $\alpha_i(T_0)$ принадлежат множеству $\mathrm{A}_i(T_0, \upsilon)$ при любом $\upsilon \in \upsilon$, причем выполнено условие (23).

На интервалах $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n(T_0)$, будем выбирать управление преследователя из интегральных включений

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{A(T_0 - s)} u(s) ds - \pi e^{A(T_0 - \tau_i)} v_i - \gamma_i^0(T_0) \in \alpha_i(T_0)[M - \xi(T_0, z^0, \gamma^0)]. \tag{25}$$

Поскольку $\alpha_i(T_0) \in \mathrm{A}_i(T_0, \upsilon)$, $\upsilon \in \upsilon$, $i = 0, 1, \ldots, n(T_0)$, то из определения многозначного отображения (21) и интеграла Аумана вытекает, что решение интегрального включения (25) существует и является измеримой функцией $u(s)$, которая принимает значения во множестве U. Зафиксируем одно из таких решений.

Согласно формуле Коши имеем

$$\pi z(T_0) = \pi e^{AT_0} z^0 + \int_0^{T_0} \pi e^{A(T_0 - s)} u(s) ds - \sum_{i=0}^{n(T_0)} \pi e^{A(T_0 - \tau_i)} v_i. \tag{26}$$

Прибавим и вычтем от правой части равенства (26) величину $\sum_{i=0}^{n(T_0)} \gamma_i^0(T_0)$.

Тогда, учитывая интегральные включения (25), из формулы (26) получим

$$\pi z(T_0) \in \left[1 - \sum_{i=0}^{n(T_0)} \alpha_i(T_0)\right] \xi(T_0, z^0, \gamma^0) + \sum_{i=0}^{n(T_0)} \alpha_i(T_0) M. \tag{27}$$

Поскольку числа $\alpha_i(T_0)$, $i = 0, 1, \ldots, n(T_0)$, образуют симплекс, а M — выпуклое множество, то из включения (27) имеем $\pi z(T_0) \in M$.

Рассмотрим случай $\xi(T_0, z^0, \gamma^0) \in M$. Выберем управление преследователя из интегральных уравнений

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{A(T_0 - s)} u(s) ds - \pi e^{A(T_0 - \tau_i)} v_i - \gamma_i^0(T_0) = 0, \; i = 0, 1, \ldots, n(T_0),$$

что соответствует выбору величин $\alpha_i(T_0)$, $i = 0, 1, \ldots, n(T_0)$, во включении (25), равными нулю. Тогда очевидно, что $\pi z(T_0) = \xi(T_0, z^0, \gamma^0) \in M$.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ СХЕМА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ УПРАВЛЕНИИ ВТОРОГО ИГРОКА

Рассмотрим схему, которая является аналогом одной из схем из предыдущих разделов. Для этого введем многозначные отображения

$$\mathrm{A}_i(t) = \bigcap_{v \in \upsilon} \mathrm{A}_i(t, v), \; i = 0, 1, \ldots, n(t), \; t \in \operatorname{dom} W, \tag{28}$$

и соответствующие разрешающие функции

$$\alpha_i(t) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathrm{A}_i(t)\}.$$

Многозначные отображения $\mathrm{A}_i(t)$ принимают значения, которые являются непустыми множествами полуоси $[0, +\infty)$, поскольку $0 \in \mathrm{A}_i(t, v)$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n(t)$, $t \geq 0$, $v \in \upsilon$. При $\xi(t, z, \gamma) \in M$ значения отображений $\mathrm{A}_i(t)$ являются неограниченными множествами, а их опорные функции $\alpha_i(t) \equiv +\infty$.

Обозначим множество

$$\theta(z, \gamma) = \left\{ t \in \operatorname{dom} W : \sum_{i=0}^{n(t)} \alpha_i(t) \geq 1 \right\}$$

и введем функцию

$$k(t) = \min\left\{ j \in [0, 1, \ldots, n(t)] : \sum_{i=0}^{j} \alpha_i(t) \geq 1 \right\}. \tag{29}$$

Пусть $\theta_0 \in \theta(z^0, \gamma^0)$, где z^0 и γ^0 — фиксированные начальное состояние и набор селекторов соответственно.

Условие 7. При $\xi(\theta_0, z^0, \gamma^0) \approx M$ имеет место соотношение

$$\mathrm{A}_{k(\theta_0)}(\theta_0) = [0, \alpha_{k(\theta_0)}(\theta_0)].$$

Теорема 4. Пусть для процесса (19) с терминальным множеством (2), $M = \operatorname{co} M$, при импульсном управлении убегающего выполнено условие 5.

Тогда если для начального состояния z^0 и набора селекторов γ^0 множество $\theta(z^0, \gamma^0)$ не пусто, то для любого $\theta_0 \in \theta(z^0, \gamma^0)$, для которого выполнено условие 7, траектория процесса (19) может быть приведена из начального состояния z^0 на терминальное множество M^* в момент θ_0.

Доказательство. Обозначим $n(\theta_0) = n_0$ и $k(\theta_0) = k_0$, зафиксируем набор скачков $\{v_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n_0$.

Пусть $\xi(\theta_0, z^0, \gamma^0) \approx M$. Из неравенства в (29) и условия 7 вытекает, что существует такое число α_*, $\alpha_* \in \mathrm{A}_{k(\theta_0)}$, что

$$\sum_{i=0}^{k(\theta_0)-1} \alpha_i(\theta_0) + \alpha_* = 1. \tag{30}$$

Положим

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_i(\theta_0), & i = 0, 1, \ldots, k_0 - 1, \\ \alpha_*, & i = k_0, \\ 0, & i = k_0 + 1, \ldots, n_0. \end{cases}$$

На интервалах $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n_0$, будем выбирать управление преследователя из интегральных включений

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{A(\theta_0 - s)} u(s) ds - \pi e^{A(\theta_0 - \tau_i)} v_i - \gamma_i^0(\theta_0) \in \alpha_i [M - \xi(\theta_0, z^0, \gamma^0)]. \tag{31}$$

Поскольку числа 0, $\alpha_i(\theta_0)$, $i = 0, 1, \ldots k_0 - 1$, принадлежат множествам $\mathrm{A}_i(\theta_0)$ по построению, а $\alpha_* \in \mathrm{A}_{k_0}(\theta_0)$ в силу условия 7, то с учетом соотношений (30), (31) и определения интеграла Аумана можно сделать вывод, что решение интегрального включения (31) в виде измеримой функции $u(s)$ существует. С учетом этого из формулы Коши

$$\pi z(\theta_0) = \pi e^{A\theta_0} z^0 + \int_0^{\theta_0} \pi e^{A(\theta_0 - s)} u(s) ds - \sum_{i=0}^{n_0} \pi e^{A(\theta_0 - \tau_i)} v_i$$

получим включение

$$\pi z(\theta_0) \in \left[1 - \sum_{i=0}^{n_0} \alpha_i\right] \xi(\theta_0, z^0, \gamma^0) + \sum_{i=0}^{n_0} \alpha_i M. \tag{32}$$

Так как $\alpha_i \geq 0$ и в силу (30) $\sum_{i=0}^{n_0} \alpha_i = 1$, а $M = \mathrm{co}\, M$, то из (32) имеем $\pi z(\theta_0) \in M$. Если $\xi(\theta_0, z^0, \gamma^0) \in M$, то выберем управление преследователя из интегральных уравнений (31), где $\alpha_i = 0$. Тогда из соотношения (32) получим

$$\pi z(\theta_0) = \xi(\theta_0, z^0, \gamma^0) \in M.$$

ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ С ДИСКРИМИНАЦИЕЙ ПРОТИВНИКА

Как и ранее, будем считать, что преследователь может влиять на систему (1) только в моменты τ_i, $i \in N \setminus \{0\}$, и это влияние имеет импульсный характер (3). Заметим, что теперь в момент выдачи импульса преследователю будет известно управление убегающего до момента выдачи следующего импульса, т.е. в момент τ_i становится известно $\upsilon(s)$, $s \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in N \setminus \{0\}$. Следует отметить, что в момент $\tau_0 = 0$ может выдаваться ненулевой импульс. Тогда решение системы (1) при условии (3) и выбранных управлениях игроков имеет вид

$$z(t)=e^{At}z^0+\sum_{i=0}^{n(t)}e^{A(t-\tau_i)}u_i-\int_0^t e^{A(t-s)}\upsilon(s)ds,\ t\ge 0,\ z(0)=z^0. \qquad (33)$$

Рассмотрим задачу сближения для конфликтно-управляемого процесса (33), (2) в условиях дискриминации убегающего.

Введем многозначные отображения

$$W_i^*(n,\upsilon(\cdot))=\pi e^{A(\tau_n-\tau_i)}U-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\pi e^{A(\tau_0-s)}\upsilon(s)ds,$$

$$W_i^*(n)=\bigcap_{\upsilon(\cdot)\in\upsilon(\tau_i,\tau_{i+1})}W_i^*(n,\upsilon(\cdot)),\ i=0,1,\ldots,n-1,\ n\in N,$$

$$W_n^*(n,\upsilon(\cdot))\equiv W_n^*(n)=\pi U.$$

Условие 8. Многозначные отображения $W_i^*(n)$ принимают непустые значения для $i=0,1,\ldots,n-1$, $n\in N$.

В каждом множестве $W_i^*(n)$ выберем определенные селекторы $\gamma_i^*(n)$, $i=0,1,\ldots,n,\ n\in N$. Обозначим этот набор селекторов $\gamma^*=\gamma^*(n)==\{\gamma_i^*(n)\}_{i=0}^n$, $n\in N$, и положим

$$\xi^*(n,z,\gamma^*)=\pi e^{A\tau_n}z+\sum_{i=0}^{n}\gamma_i^*(n).$$

Рассмотрим многозначные отображения

$$\mathrm{A}_i^*(n,\upsilon(\cdot))=\left\{\alpha\ge 0:[W_i^*(n,\upsilon(\cdot))-\gamma_i^*(n)]\,|\,\alpha[M-\xi^*(n,z,\gamma^*)]\ne\varnothing\right\}$$

и их опорные функции в направлении $+1$

$$\alpha_i^*(n,\upsilon(\cdot))=\sup\{\alpha\ge 0:\alpha\in\mathrm{A}_i^*(n,\upsilon(\cdot))\},$$

$$i=0,1,\ldots,n,\ n\in N,\ \upsilon(\cdot)\in\upsilon(\tau_i,\tau_{i+1}).$$

Отметим, что при $\xi^*(n,z,\gamma^*)\in M$ множества $\mathrm{A}_n^*(n,\upsilon(\cdot))$ являются неограниченными, соответственно функции $\alpha_n^*(n,\upsilon(\cdot))$ принимают бесконечные значения. Кроме того, согласно построению отображения $\mathrm{A}_n^*(n,\upsilon(\cdot))$ и функции $\alpha_n^*(n,\upsilon(\cdot))$ не зависят от $\upsilon(\cdot)$.

Обозначим

$$T^*(z,\gamma^*)=\min\left\{n\in N;\ \sum_{i=0}^{n}\inf_{\upsilon(\cdot)\in\upsilon(\tau_i,\tau_{i+1})}\alpha_i^*(n,\upsilon(\cdot))\ge 1\right\}, \qquad (34)$$

а для фиксированных z^0 и γ^0 имеем $T^*=T^*(z^0,\gamma_0^*)$, где $\upsilon(\tau_{T^*},\tau_{T^*+1})==\{0\}$.

Условие 9. Отображения $\mathrm{A}_i^*(T^*,\upsilon(\cdot))$ являются выпуклозначными, при этом

$$\mathrm{A}_i^*(T^*,\upsilon(\cdot))=[0,\alpha_i^*(T^*,\upsilon(\cdot))],\ \upsilon(\cdot)\in\upsilon(\tau_i,\tau_{i+1}),\ i=0,1,\ldots,T^*.$$

Теорема 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (33), (2), $z(0)=z^0$, $M=\operatorname{co}M$, при импульсном управлении преследователя и с дискриминацией убегающего выполнены условия 8 и 9 при некотором наборе селекторов γ_0^*, причем $T^* < +\infty$.

Тогда траектория системы (33) может быть приведена из начального состояния z^0 на терминальное множество M^* в момент τ_{T^*}.

Доказательство. Зафиксируем произвольное управление убегающего $v_{T^*}(\cdot)$, $v_{T^*}(\cdot) \in v(0, \tau_{T^*})$, и рассмотрим случай $\xi^*(T^*, z^0, \gamma_0^*) \overline{\in} M$.

Обозначим

$$\alpha_i^*(T^*) = \inf_{v(\cdot) \in v(\tau_i, \tau_{i+1})} \alpha_i^*(T^*, v(\cdot)), \; i = 0, 1, \ldots, T^* - 1,$$

$\alpha_{T^*}^*(T^*) \equiv \alpha_{T^*}^*(T^*, v(\cdot))$ не зависит от $v(\cdot)$ по построению. В силу условия 9 $\alpha_i^*(T^*) \in \mathrm{A}_i^*(T^*, v(\cdot))$ для всех $v(\cdot) \in v(\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots T^*$. Кроме того, с учетом неравенства в (34) существует такое число $\alpha^* \in [0, \alpha_{T^*}^*(T^*)]$, что

$$\sum_{i=0}^{T^*-1} \alpha_i^*(T^*) + \alpha^* = 1. \tag{35}$$

Векторы скачков u_i, $u_i \in U$, $i = 0, 1, \ldots, T^* - 1$, в моменты τ_i выберем из условия

$$\pi e^{A(\tau_{T^*} - \tau_i)} u_i - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{A(\tau_{T^*} - s)} v(s) ds - \\ - \gamma_i^*(T^*) \in \alpha_i^*(T^*)[M - \xi^*(T^*, z^0, \gamma_0^*)], \tag{36}$$

а в момент T^* — из включения

$$\pi u_{T^*} - \gamma_{T^*}^*(T^*) \in \alpha^*[M - \xi^*(T^*, z^0, \gamma_0^*)]. \tag{37}$$

Поскольку $\alpha_i^*(T^*) \in \mathrm{A}_i^*(T^*, v(\cdot))$, $i = 0, 1, \ldots, T^* - 1$, $\alpha^* \in \mathrm{A}_{T^*}^*(T^*, v(\cdot))$, $v(\cdot) \in v(\tau_i, \tau_{i+1})$, и выполнено условие 9, то решение u_i^*, $i = 0, 1, \ldots, T^*$, включений (36), (37) существует. Далее из формулы Коши получим

$$\pi z(\tau_{T^*}) = \pi e^{A\tau_{T^*}} z^0 + \sum_{i=0}^{T^*} \pi e^{A(\tau_{T^*} - \tau_i)} u_i^* - \sum_{i=0}^{T^*} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{A(\tau_{T^*} - s)} v(s) ds.$$

С учетом формул (36), (37) имеем включение

$$\pi z(\tau_{T^*}) \in \left[1 - \left(\sum_{i=0}^{T^*-1} \alpha_i^*(T^*) + \alpha^*\right)\right] \xi^*(T^*, z^0, \gamma_0^*) + \left(\sum_{i=0}^{T^*-1} \alpha_i^*(T^*) + \alpha^*\right) M, \tag{38}$$

из которого в силу равенства (35) для неотрицательных чисел $\alpha_i^*(T^*)$, α^* и $\mathrm{co}\, M = M$ вытекает, что $\pi z(\tau_{T^*}) \in M$.

Пусть $\xi^*(T^*, z^0, \gamma_0^*) \in M$. Тогда во включениях (36), (37) положим $\alpha_i^*(T^*) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, T^* - 1$, $\alpha^* = 0$, и векторы скачков u_i^*, $i = 0, 1, \ldots, T^*$, в моменты τ_i выбираем как решения соответствующих уравнений. Факт существования таких решений вытекает из условия 8.

В результате из включения (38) получим $\pi z(\tau_{T^*}) = \xi^*(T^*, z^0, \gamma_0^*) \in M$.

Рассмотрим многозначные отображения

$$\mathrm{A}_i^*(n) = \bigcap_{\upsilon(\cdot) \in \upsilon(\tau_i, \tau_{i+1})} \mathrm{A}_i^*(n, \upsilon(\cdot)),\ i = 0, 1, \ldots, n-1,\ n \in N,$$

$$\mathrm{A}_n^*(n, \upsilon(\cdot)) \equiv \mathrm{A}_n^*(n),$$

и их опорные функции

$$\alpha_i^*(n) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathrm{A}_i^*(n)\},\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Обозначим

$$\theta^*(z, \gamma^*) = \min\left\{n \in N : \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^*(n) \geq 1\right\}.$$

Зафиксировав начальное положение z^0 процесса (33) и набор селекторов γ_0^*, обозначим $\theta^* = \theta^*(z^0, \gamma^*)$.

Условие 10. Множество $\mathrm{A}_{\theta^*}^*(\theta^*)$ является выпуклым.

Поскольку $0 \in \mathrm{A}_{\theta^*}^*(\theta)$ и $\alpha_{\theta^*}^*(\theta^*) \in \mathrm{A}_{\theta^*}^*(\theta)$, то из условия 10 вытекает, что

$$\mathrm{A}_{\theta^*}^*(\theta) = [0, \alpha_{\theta^*}^*(\theta^*)].$$

Заметим также, что при $\xi^*(\theta^*, z^0, \gamma_0^*) \in M$

$$\mathrm{A}_{\theta^*}^*(\theta) = [0, +\infty).$$

Теорема 6. Пусть для процесса (33), (2), $z(0) = z^0$, $M = \mathrm{co}\, M$, при импульсном управлении преследователя и с дискриминацией убегающего выполнены условия 8 и 10 при фиксированном наборе селекторов γ_0^*, причем $\theta^*(z^0, \gamma_0^*) < +\infty$.

Тогда траектория системы (33) из начального состояния z^0 может быть приведена на множество M^* в момент τ_{θ^*}.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

ИМПУЛЬСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБОИХ ИГРОКОВ

Пусть $\{\tau_i\}$, $\{\eta_j\}$, $i = 0, 1, \ldots$, $j = 0, 1, \ldots$, $\tau_0 = \eta_0 = 0$, — последовательности моментов времени, которые занумерованы в порядке возрастания и не имеют конечных точек сгущения.

Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему, эволюция которой описывается уравнением

$$\dot{z} = Az + \sum_{i=0}^{\infty} u_i\, \delta(t - \tau_i) - \sum_{i=0}^{\infty} \upsilon_j\, \delta(t - \eta_j),\ z \in R^n, \tag{39}$$

где импульсные управления преследователя u_i принадлежат компакту U, $U \subset R^n$, а векторы скачков убегающего υ_j — компакту υ, $\upsilon \subset R^n$.

Согласно [4, 5] система (39) имеет единственное решение при любом начальном условии $z(0) = z^0$, которое является абсолютно непрерывной функцией на открытых интервалах между моментами скачков τ_i, η_j, $i, j \in N \cup \{0\}$, и имеет вид

$$z(t) = e^{At} z^0 + \sum_{i:\tau_i \in [0,t]} e^{A(t-\tau_i)} u_i - \sum_{j:\eta_j \in [0,t]} e^{A(t-\eta_j)} v_j \, . \tag{40}$$

Терминальным множеством для конфликтно-управляемого процесса (39) является цилиндрическое множество M^*. Будем считать, что преследователь в момент τ_i выбора импульса u_i использует информацию об импульсах убегающего на интервале $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ и о начальном состоянии z^0 процесса (39).

Введем обозначения

$$J_i = \{ j \in N \cup \{0\} : \eta_j \in (\tau_{i-1}, \tau_i] \}, \; i \in N \cup \{0\}, \text{ где } (\tau_{-1}, 0] = \{0\}$$

и многозначные отображения

$$W_i(n, \{v_j\}) = \pi e^{A(\tau_n - \tau_i)} U - \sum_{j \in J_i} \pi e^{A(\tau_n - \tau_j)} v_j \, ,$$

$$W_i(n) = \pi e^{A(\tau_n - \tau_i)} U \Rightarrow \sum_{j \in J_i} \pi e^{A(\tau_n - \tau_j)} V,$$

где $i = 0, 1, \ldots, n$, $n \in N \cup \{0\}$.

Будем считать, что $J_0 = \varnothing$, а $J_i \neq \varnothing$ для $i = 1, \ldots$

Аналог условия Понтрягина имеет следующий вид.

Условие 11. Множества $W_i(n)$ не пусты для всех $i = 0, 1, \ldots, n$, $n \in N \cup \{0\}$.

Зафиксируем набор селекторов $\gamma = \gamma(n) = \{\gamma_i(n)\}_{i=0}^{n}$, $\gamma_i(n) \in W_i(n)$, и положим

$$\xi(n, z, \gamma) = \pi e^{A\tau_n} z + \sum_{i=0}^{n} \gamma_i(n).$$

Введем многозначные отображения

$$\mathrm{A}_i(n, \{v_j\}) = \left\{ \alpha \geq 0 : [W_i(n, \{v_j\}) - \gamma_i(n)] \cap \alpha [M - \xi(n, z, \gamma)] \neq \varnothing \right\} \tag{41}$$

и разрешающие функции

$$\alpha_i(n, \{v_j\}) = \sup \{ \alpha : \alpha \in \mathrm{A}_i(n, \{v_j\}) \}, \; i = 0, 1, \ldots, n, \; n \in N \cup \{0\}. \tag{42}$$

Обозначим

$$N(z, \gamma) = \min \left\{ n \in N : \sum_{i=0}^{n} \inf_{j \in J_i, v_j \in \upsilon} \alpha_i(n, \{v_j\}) \geq 1 \right\}. \tag{43}$$

Если $\xi(n, z, \gamma) \in M$, то множества $\mathrm{A}_i(n, \{v_j\})$, $i = 0, 1, \ldots, n$, являются неограниченными, а функции $\alpha_i(n, \{v_j\})$ для соответствующих индексов принимают бесконечные значения. При этом неравенство в (43) выполняется автоматически. Если же это неравенство не выполнено при всех $n \in N$, то положим $N(z, \gamma) = +\infty$.

Обозначим $N_0 = N(z^0, \gamma^0)$, зафиксировав z^0 и γ^0.

Условие 12. Множества $\mathrm{A}_i(N_0, \{v_j\})$ являются выпуклыми для всех $v_j \in \upsilon$, $j \in J_i$, $i = 0, 1, \ldots, N_0$.

Другими словами, в силу соотношений (41), (42) это условие означает, что

$$\mathrm{A}_i(N_0, \{v_j\}) = [0, \alpha_i(n, \{v_j\})] \; \forall v_j \in \upsilon, \; j \in J_i, \; i = 0, 1, \ldots, N_0.$$

Теорема 7. Если для конфликтно-управляемого процесса (39) (2), $z(0)=z^0$, $M=\operatorname{co} M$, при импульсном управлении игроков выполнены условия 11 и 12, $N(z^0,\gamma^0)<+\infty$ для некоторого селектора γ^0, то траектория системы (39) может быть приведена из начального состояния z^0 на терминальное множество (2) в момент τ_{N_0}.

Доказательство. Зафиксируем набор векторов-скачков убегающего $\{v_j\}$, $\eta_j\in[0,\tau_{N_0}]$. Рассмотрим случай $\xi(N_0,z^0,\gamma^0)\overline{\in} M$. Обозначим

$$\alpha_i(N_0)=\inf_{j\in J_i, v_j\in v}\alpha_i(N_0,\{v_j\}),\ i=0,1,\ldots,N_0.$$

В силу условия 12 $\alpha_i(N_0)\in \mathrm{A}_i(N_0,\{v_j\})$ для всех $v_j\in v$, $j\in J_i$, $i=0,1,\ldots,N_0$. Кроме того, из неравенства (13) вытекает, что существует такое число α, $\alpha\in[0,\alpha_{N_0}(N_0)]$, что

$$\sum_{i=0}^{N_0-1}\alpha_i(N_0)+\alpha=1. \tag{44}$$

Импульсные управления u_i, $u_i\in U$, $i=0,1,\ldots,N_0$, в моменты τ_i выбираем из условий

$$\pi e^{A(\tau_{N_0}-\tau_i)}u_i-\sum_{j\in J}\pi e^{A(\tau_{N_0}-\tau_j)}v_j\in\alpha_i(N_0)[M-\xi(N_0,z^0,\gamma^0)], \tag{45}$$

где $\alpha_{N_0}(N_0)=\alpha$. Очевидно, что такие управления существуют. Обозначим их u_i^*, $i=\overline{0,N_0}$. Тогда из формулы (40) получим

$$\pi z(\tau_{N_0})=\pi e^{A\tau_{N_0}}z^0+\sum_{i:\tau_i\in[0,\tau_{N_0}]}\pi e^{A(\tau_{N_0}-\tau_i)}u_i^*-\sum_{j:\eta_j\in[0,\tau_{N_0}]}\pi e^{A(\tau_{N_0}-\tau_j)}v_j=$$

$$=\pi e^{A\tau_{N_0}}z^0+\sum_{i:\tau_i\in[0,\tau_{N_0}]}\pi e^{A(\tau_{N_0}-\tau_i)}u_i^*-\sum_{i:\eta_i\in[0,\tau_{N_0}]}\sum_{j\in J_i}\pi e^{A(\tau_{N_0}-\tau_j)}v_j\,.$$

Учитывая закон выбора управлений (45), получаем включение

$$\pi z(\tau_{N_0})\in\left[1-\left(\sum_{i=0}^{N_0-1}\alpha_i(N_0)+\alpha\right)\right]\xi(N_0,z^0,\gamma^0)+\left(\sum_{i=0}^{N_0-1}\alpha_i(N_0)+\alpha\right)M,$$

из которого в силу равенства (44) для неотрицательных чисел и условия $M=\operatorname{co} M$ вытекает $\pi z(\tau_{N_0})\in M$. Теорема доказана.

При импульсном управлении обоих игроков рассмотрим иную схему. Для этого введем многозначные отображения

$$\overline{\mathrm{A}}_i(n)=\bigcap_{v_j,\, j\in J_i}\mathrm{A}_i(n,\{v_j\}),\ i=0,1,\ldots,n,\ n\in N\setminus\{0\},$$

и разрешающие функции

$$\overline{\alpha}_i(n)=\sup\{\alpha:\alpha\in\overline{\mathrm{A}}_i(n)\}.$$

Обозначим

$$\overline{N}(z,\gamma)=\min\left\{n\in N;\ \sum_{i=0}^{n}\overline{\alpha}_i(n)\ge 1\right\}.$$

Зафиксируем начальное положение процесса (39) $z(0)=z^0$ и набор селекторов γ^0, обозначим $\overline{N}_0=\overline{N}_0(z^0,\gamma^0)$.

Условие 13. При $\xi(\overline{N}_0, z^0, \gamma^0)\,\overline{\in}\, M$ справедливо равенство

$$\overline{\mathrm{A}}_{\overline{N}_0}(\overline{N}_0)=[0,\overline{\alpha}_{\overline{N}_0}(\overline{N}_0)].$$

Теорема 8. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (39), (2), $z(0)=z^0$, при импульсном управлении игроков выполнены условия 11, 13 и $M=\operatorname{co} M$, причем $\overline{N}(z^0,\gamma^0)<+\infty$ для некоторого селектора γ^0.

Тогда траектория системы (39) может быть приведена из начального состояния z^0 на терминальное множество в момент $\tau_{\overline{N}_0}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.

ПРОСТОЕ ДВИЖЕНИЕ

Проиллюстрируем изложенные выше результаты на примере игровой задачи с простыми движениями и импульсными управлениями. (Пример взят из работы [19].)

Пусть динамика системы задается уравнением

$$\dot{z}=u-v,\ z\in R^n. \tag{46}$$

Терминальное множество — начало координат, т.е. $M^*=\{0\}$. Тогда $M^0=\{0\}$, $M=\{0\}$. В этом случае $L=R^n$, а ортопроектор π является оператором тождественного преобразования и задается единичной матрицей E. Матрица системы (1) нулевая, значит, $e^{At}=E$.

Рассмотрим сначала случай, когда управление преследователя имеет импульсный характер, а управление убегающего $v(t)$ — измеримая функция времени, принимающая значения из компакта v. Пусть $\tau_i=ih$, $i=0,1,\ldots,$ $h>0$, где h — некоторый период. Тогда управление преследователя имеет вид

$$u(t)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i\delta(t-ih),\ u_i\in U,\ t\ge 0.$$

Будем считать, что множество U — замкнутый шар радиуса ρ с центром в начале координат, а множество v — шар радиуса σ, т.е.

$$U=\rho S,\ v=\sigma S,\ S=\{z\in R^n : \|z\|\le 1\}.$$

Далее,

$$W_0(n,v(\cdot))=W_0(n)=W_0=\rho S,$$

$$W_i(n,v(\cdot))=W_i(v(\cdot))=\rho S - \int_{(i-1)h}^{ih} v(s)ds,$$

$$W_i(n)=W_i=\rho S \Rightarrow \int_{(i-1)h}^{ih}\sigma S ds=\rho S \Rightarrow h\sigma S=(\rho-h\sigma)S,$$

$$i=1,\ldots,n,\ n\in N.$$

Таким образом, условие Понтрягина выполнено, если $\rho\ge h\sigma$. При этом множества $W_0=\rho S$, $W_i(\rho-h\sigma)S$, $i=1,\ldots,n$, $n\in N$, содержат в себе нулевой вектор.

Положим $\gamma_i(n) \equiv 0$ для $i = 0, 1, \ldots, n$, $n \in N$. Тогда $\xi(n, z, \gamma) = z$, $n \in N$, где z — начальная точка процесса (46). Обозначив $I_0 = 0$, $I_i = \int\limits_{(i-1)h}^{ih} v(s)ds$, получим

$$\mathrm{A}_i(n, (\cdot)) = \{\alpha \geq 0 : -\alpha z \in \rho S - I_i\},\ i = 0, 1, \ldots, n,\ n \in N.$$

Соответственно разрешающие функции можно найти как корни квадратных уравнений

$$|| I_i - \alpha z || = \rho,\ i = 0, 1, \ldots,$$

относительно α. В результате

$$\alpha_i(n, v(\cdot)) = \frac{(z, I_i) + \sqrt{(z, I_i)^2 + ||z||^2 (\rho^2 - ||I_i||^2)}}{||z||^2},\ i = 0, 1, \ldots$$

При этом минимум функций $\alpha_i(n, v(\cdot))$, $i = 1, \ldots, n$, достигается, когда $v(t) = -\sigma z / \rceil z \rceil$ почти везде на $((i-h), ih)$, т.е. при $I_i = -h\sigma \frac{z}{||z||}$. Поскольку

$$\inf_{v(\cdot)} \alpha_0(n, v(\cdot)) = \rho / \rceil z \rceil,$$

$$\inf_{v(\cdot)} \alpha_i(n, v(\cdot)) = \frac{\rho - \sigma h}{||z||},\ i = 1, \ldots, n,$$

то

$$T = T(z, 0) = \begin{cases} 0, & ||z|| \leq \rho, \\ \dfrac{||z|| - \rho}{\rho - h\sigma}, & ||z|| > \rho, \quad \dfrac{||z|| - \rho}{\rho - h\sigma} \in N, \\ \left[\dfrac{||z|| - \rho}{\rho - h\sigma}\right] + 1, & ||z|| > \rho, \quad \dfrac{||z|| - \rho}{\rho - h\sigma} \overline{\in} N, \end{cases}$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Таким образом, траекторию системы (46) можно привести из начального положения z на терминальное множество — начало координат в момент $\tau_{T(z,0)} = T(z, 0)h$ с учетом, что в нулевой момент преследователь может выдавать ненулевой импульс.

Необходимо заметить, что в примере выполнено условие 3. Кроме того, согласно доказательству теоремы 1

$$\inf_{v(\cdot)} \alpha_i(T, v(\cdot)) = \frac{\rho - \sigma h}{||z||},\ i = 1, \ldots, T,$$

соответственно

$$\alpha(T) = T \frac{\rho - \sigma h}{||z||},$$

а значит,

$$\alpha_i(T) = \frac{1}{T},\ i = 1, \ldots, T.$$

Поэтому управление, обеспечивающее результат, согласно формуле (10) имеет вид $u_i = I_i - \alpha_i(T) z$, $i = 1, \ldots, T$.

Таким образом, если обозначить $z(0) = z^0$ начальное состояние конфликтно-управляемого процесса (46), то при выбранном способе преследования справедливо равенство

$$z(\tau_i) = z^0 (1 - i / T),\ i = 1, \ldots, T,\ T \geq 1.$$

Это означает, что в моменты $\tau_i = ih$ вектор $z(\tau_i)$ параллелен z^0, т.е. предложенная стратегия преследования является дискретным аналогом параллельного преследования.

Рассмотрим теперь систему (46) при импульсном управлении убегающего. Пусть управление преследователя $u(t)$ — измеримая функция времени, которая принимает значения из компакта U, а убегающий может влиять на систему лишь в дискретные моменты $\tau_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots,$ и его управление имеет вид

$$\upsilon(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \upsilon_i\, \delta(t - ih),\ \upsilon_i \in \upsilon.$$

Как и в предыдущем случае будем считать, что $U = \rho S$, $\upsilon = \sigma S$, а терминальное множество — начало координат.

В данном примере $n(t) = [t / h]$. Тогда

$$W_i(t, \upsilon) = \int_{ih}^{(i+1)h} \rho S ds - \upsilon = h\rho S - \upsilon,\ i = 0, 1, \ldots, n(t) - 1,$$

$$W_{n(t)}(t, \upsilon) = \int_{[t/h]h}^{t} \rho S ds - \upsilon = (t - [t / h]h)\rho S - \upsilon.$$

Соответственно

$$W_i(t) = W_i = h\rho S \Rightarrow \sigma S,\ i = 0, 1, \ldots, n(t) - 1.$$

Очевидно, что эти множества непусты, если $h\rho \geq \sigma$, причем

$$W_i = (h\rho - \sigma)S,\ i = 0, 1, \ldots, n(t) - 1.$$

Далее,

$$W_{n(t)}(t) = (t - [t / h]h)\rho S \Rightarrow \sigma S.$$

Множество $W_{n(t)}(t)$ непусто, если $t \geq [t / h]h + \sigma / \rho$.

Поскольку при $t \geq 0$, $h > 0$ имеет место неравенство

$$t < ([t / h] + 1)h,$$

то условие 5 будет выполнено, если

$$h\rho > \sigma \tag{47}$$

и при этом

$$\operatorname{dom} W = \bigcup_{i=0}^{\infty} [ih + \sigma / \rho, (i+1)h].$$

Обозначим $\eta(t) = t - [t / h]h$. Тогда

$$W_{n(t)}(t) = (\eta(t)\rho - \sigma)S,\ t \in \operatorname{dom} W.$$

Таким образом, множества $W_i(t)$ содержат в себе нулевой элемент при всех $t \in \operatorname{dom} W$, $i = 0, 1, \ldots, n(t)$, и можно положить $\gamma_i(t) \equiv 0$. В результате получим $\xi(t, z, \gamma) = z$.

Найдем разрешающие функции. Пусть $i = 0, 1, \ldots, n(t) - 1$. Тогда

$$\alpha_i(t, \upsilon) = \sup\{\alpha \geq 0 : -\alpha z \in h\rho S - \upsilon\}.$$

Значения этих функций можно найти в явном виде из квадратного уравнения $\| v - \alpha z \| = h\rho$ относительно α.

Простой подсчет показывает, что

$$\alpha_i(t,v)=\frac{(z,v)+\sqrt{(z,v)^2+||z||^2\,(h^2\rho^2-||z||^2)}}{||z||^2},\ i=0,1,\ldots,[t/h]-1.$$

Тогда

$$\inf_{||v||\le\sigma}\alpha_i(t,v)=\frac{h\rho-\sigma}{||z||},$$

причем минимум достигается при $v=-\sigma z/\rceil z\rceil$. Отсюда вытекает, что

$$n(T)=\left[\frac{\rceil z\rceil}{h\rho-\sigma}\right],$$

где $T=\min T(z,0)$ — момент окончания игры.

Далее,

$$\alpha_{n(t)}(t,v)=\sup\{\alpha\ge 0:-\alpha z\in\eta(t)\rho S-v\}.$$

По аналогии с предыдущим случаем $||v-\alpha z||=\eta(t)\rho$ и

$$\alpha_{n(t)}(t,v)=\frac{(z,v)+\sqrt{(z,v)^2+||z||^2\,(\eta^2(t)\rho^2-||v||^2)}}{||z||^2}.$$

Отсюда получим

$$\inf_{||v||\le\sigma}\alpha_{n(t)}(t,v)=\frac{\eta(t)\rho-\sigma}{||z||},$$

причем минимум достигается при $v=-\sigma\dfrac{z}{||z||}$. Момент T окончания игры находится из неравенства

$$\left[\frac{||z||}{h\rho-\sigma}\right]\frac{h\rho-\sigma}{||z||}+\frac{\eta(t)\rho-\sigma}{||z||}\ge 1\,.$$

Последнее уравнение всегда имеет решение, если выполнено неравенство (47).

Рассмотрим систему (46) при импульсном управлении обоих игроков. Будем считать, что $\tau_i=ih$, $\eta_j=jq$, где h, q — некоторые периоды, причем $q<h$. Последнее условие обеспечивает $J_i\ne\varnothing$, $i=1,\ldots$ Управления преследователя и убегающего соответственно имеют вид

$$u(t)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i\delta(t-ih),\ v(t)=\sum_{i=0}^{\infty}v_j\delta(t-jq),$$

где $u_i\in\rho S$, $v_j\in\sigma S$, $\rho>0$, $\sigma>0$. В данном случае $J_0=\varnothing$,

$$J_i=\{j\in N: jq\in((i-1)h,\,ih)\},\ i\in N.$$

Обозначим $|J_i|=[h/q]$, $i\in N$, количество элементов множества J_i. Согласно построению имеем

$$W_0(n,\{v_j\})=W_0(n)=\rho S,$$

$$W_i(n,\{v_j\})=\rho S-\sum_{j\in J_i}v_j\,,$$

$$W_i(n)=\rho S\Rightarrow\sum_{j\in J_i}\sigma S=(\rho-[h/q]\sigma)S,\ i=1,2,\ldots,n.$$

Таким образом, условие 11 выполнено, если

$$\rho \geq [h / q]\sigma.$$

При этом множества

$$W_i(n) = (\rho - [h / q]\sigma)S, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

содержат в себе начало координат. Положим $\gamma_i(n) \equiv 0$. Тогда $\xi(n, z, \gamma) = z$. Обозначим $\bar{v}_0 = 0, \bar{v}_i = \sum_{j \in J_i} v_j, i \in N$, суммарный импульс убегающего на промежутке между импульсами преследователя и найдем разрешающие функции

$$\alpha_i(n, \bar{v}_i) = \sup\{\alpha \geq 0 : -\alpha z \in h\rho S - \bar{v}_i\}, \ i = 0, 1, \ldots, n, \ n \in N \cup \{0\}.$$

Функции $\alpha_i(n, \bar{v}_i)$ могут быть найдены в явном виде как большие положительные корни квадратных уравнений $\|\bar{v}_i - \alpha z\| = \rho$. Решив их, получим

$$I\alpha_i(n, \bar{v}_i) = \frac{(z, \bar{v}_i) + \sqrt{(z, \bar{v}_i)^2 + \|z\|^2 (\rho^2 - \|\bar{v}_i\|^2)}}{\|zs\|^2}.$$

Несложно видеть, что

$$\min_{\bar{v}_0} \alpha_0(n, \bar{v}_0) = \rho / \|z\|,$$
$$\min_{\bar{v}_i} \alpha_i(n, \bar{v}_i) = \frac{\rho - [h / q]\sigma}{\|z\|}, \ i = 1, \ldots, n, \tag{48}$$

причем минимум достигается при $\bar{v}_i = -[h/q]\sigma \dfrac{z}{\|z\|}$, т.е. когда $v_j = -\sigma \dfrac{z}{\|z\|}$ для всех $j \in J_i$.

Из формул (43) и (48) вытекает, что при $\|z\| > \rho$

$$N(z, 0) = \begin{cases} \dfrac{\|z\| - \rho}{\rho - [h / q]\sigma}, & \dfrac{\|z\| - \rho}{\rho - [h / q]\sigma} \in N, \\ \left[\dfrac{\|z\| - \rho}{\rho - [h / q]\sigma}\right] + 1, & \dfrac{\|z\| - \rho}{\rho - [h / q]\sigma} \overline{\in} N, \end{cases}$$

и попадание в начало координат состоится в момент $\tau_{N(z,0)}$ из начальной точки z.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. — М.: Наука, 1988. —Т.2. — 576 с.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
3. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. — М. : Изд-во МГУ, 1984. — 65 с.
4. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. — М. : Наука, 2005. — 430 с.
5. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К. : Вища школа, 1987. — 320 с.
6. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. — М. : Наука, 1991. — 256 с.
7. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — К.: Наук. думка, 1992. — 260 с.
8. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. — К.: Наук. думка, 1992. — 384 с.

9. Чикрий А.А., Раппопорт И.С., Чикрий К.А. Многозначные отображения и их селекторы в теории конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 5. — С. 129–144.

10. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М. : Изд-во МГУ, 1990. — 198 с.

11. Кунцевич В.М Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — К.: Наук. думка, 2006. — 264 с.

12. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. — К.: Наук. думка, 2005. — 220 с.

13. Чикрий К.А. Гарантированный результат для конфликтно-управляемых процессов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — К., 2007. — 20 с.

14. Aubin J.–P., Frankovska H. Set-valued analysis. — Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. — 461 p.

15. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

16. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: Dunamical solutions. — Basel: Gordon and Breach, 1995. — 405 p.

17. Melikyan A.A. Generalized characteristics of first order PDEs: Applications in optimal control and differential games. — Boston: Birkhauser, 1998. — 361 p.

18. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.

19. Чикрий А.А., Матичин И.И., Чикрий К.А. Конфликтно-управляемые процессы с разрывными траекториями // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 6. — С. 15–29.

20. Mordukhovich B.S. Variational analysis and generalized differentiation. — I: Basis theory. — 582 p. — II: Applications. — 612 p. — Berlin; Heidelburg; New York: Springer, 2006.

21. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 392 с.

22. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of impulse differential equations. — Singapore: World Scientific, 1989. — 275 p.

23. Згуровский М.З., Мельник В.С. Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — К.: Наук. думка, 1999. — 630 с.

24. Bressan A., Rampazzo F. Impulsive control systems without commutativity assumptions // JOTA. — 1994. — **81**, N 3. — P. 435–457.

25. Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства. — М.: Наука, 1987. — 480 с.

26. Чикрий А.А. Функционалы Минковского в теории преследования // ДАН России. — 1993. — **329**, № 3. — С. 281–284.

27. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. — М.: Физматлит, 2000. — 335 с.

28. Ченцов А.Г. Конечно-аддитивные меры и релаксация экстремальных задач. — Екатеринбург: Наука, 1993. — 305 с.

29. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 278 с.

30. Орлов Ю.В. Теория оптимальных систем с обобщенными управлениями. — М.: Наука, 1988. — 258 с.

31. Ляшко С.И. Обобщенное управление линейными системами. — К.: Наук. думка, 1998. — 471 с.

32. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems // Optimization Methods and Software. — 2008. — **23**, N 1. — P. 39–73.

Поступила 25.08.2008