УДК 681.322.012

Л.Д. ЕЛФИМОВА

СМЕШАННЫЙ КЛЕТОЧНЫЙ МЕТОД УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Ключевые слова: *метод Штрассена, быстрый клеточный метод умножения матриц, матричные вычислительные системы.*

Организация матричных вычислений является предметом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований. Переход к верхнему уровню организации вычислений, образованному операциями над клетками матриц, приводит к дальнейшему увеличению степени внутреннего параллелизма реализуемых алгоритмов, достижению более выгодного соотношения между объемом вычислений и накладными расходами на организацию вычислений, особенно на обмен данными. В связи с этим динамично разрабатываются матричные вычислительные системы, ориентированные на реализацию клеточных алгоритмов, а также мультипроцессорные системы, в которых одновременно используется параллелизм различных уровней: от векторних операций, реализуемых в векторных процессорных элементах (ПЭ), до клеточных операций, под которые выделяются отдельные кластеры ПЭ [1–3]. Кроме того, процессорные массивы с систолической организацией вычислений [4] также позволяют использовать как средне-, так и крупномасштабные уровни параллелизма за счет введения в состав ПЭ решающего поля дополнительной локальной памяти, что дает возможность решать задачи произвольных размеров на указанных процессорных массивах с фиксированным числом ПЭ, независимым от размеров массивов входных данных [5].

Клеточные методы решения задач больших размеров наиболее широко используются в линейной алгебре [6], одной из базовых операций которой является операция матричного умножения. В работе [7] впервые представлен быстрый клеточный метод умножения матриц, позволяющий варьировать размер клеток, на которые декомпозируются исходные матрицы, и получать клеточные аналоги известных алгоритмов умножения матриц с минимизированными на 12,5 % мультипликативной и аддитивной сложностями.

Цель настоящей работы — уменьшение вычислительной сложности клеточных аналогов алгоритмов матричного умножения. В данной статье рассматривается смешанный клеточный метод умножения матриц, сочетающий метод Штрассена [8] с быстрым клеточным методом умножения матриц [7], взаимодействие которых приводит к получению клеточных аналогов известных алгоритмов матричного умножения с минимизированными на 25 % мультипликативной и аддитивной сложностями.

Исходные матрицы A и B порядка $n = 2^{\gamma}$ $(\gamma > 3)$, которые декомпозируются на клетки A_{ij} и B_{ij} порядка 2^q $(q \le \gamma - 3)$, представлены на рис. 1, где $m = \dfrac{n}{2^q} = 2^{\gamma - q}$, $\xi = \dfrac{m}{2} = 2^{\gamma - q - 1}$, $i, j = 1, \dots, m$.

Каждая из полученных клеточных матриц A и B порядка m разбивается, в свою очередь, на четыре клеточные подматрицы A_{ij}^{rs} и B_{ij}^{rs} порядка ξ, где нижние индексы $i, j = 1, 2$ показывают место этих подматриц в полной $(m \times m)$-матрице, а верхние индексы $r, s = \xi,\ (m - \xi)$ — соответственно число матричных строк и число матричных столбцов подматриц. Результатом умножения клеточных матриц A и B является матрица C, которая имеет аналогичную каждому из сомножителей клеточную структуру (см. рис. 1).

Сочетание двух методов осуществляется следующим образом. Как известно, метод Штрассена умножения матриц порядка n, мультипликативная сложность ко-

$$
\underset{A}{2^q\left\{\begin{bmatrix} \overbrace{A_{11}}^{2^q} & A_{12} & \cdots & A_{1\xi} & A_{1,\xi+1} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & & A_{11}^{(\xi,\xi)} & \vdots & \vdots & A_{12}^{(\xi,m-\xi)} & \vdots \\ A_{\xi 1} & A_{\xi 2} & \cdots & A_{\xi\xi} & A_{\xi,\xi+1} & \cdots & A_{\xi m} \\ \hline A_{\xi+1,1} & & \cdots & A_{\xi+1,\xi} & A_{\xi+1,\xi+1} & \cdots & A_{\xi+1,m} \\ \vdots & & A_{21}^{(m-\xi,\xi)} & \vdots & \vdots & A_{22}^{(m-\xi,m-\xi)} & \vdots \\ A_{m1} & & \cdots & A_{m\xi} & A_{m,\xi+1} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}\right.}
\times
\underset{B}{2^q\left\{\begin{bmatrix} \overbrace{B_{11}}^{2^q} & B_{12} & \cdots & B_{1\xi} & B_{1,\xi+1} & \cdots & B_{1m} \\ \vdots & & B_{11}^{(\xi,\xi)} & \vdots & \vdots & B_{12}^{(\xi,m-\xi)} & \vdots \\ B_{\xi 1} & B_{\xi 2} & \cdots & B_{\xi\xi} & B_{\xi,\xi+1} & \cdots & B_{\xi m} \\ \hline B_{\xi+1,1} & & \cdots & B_{\xi+1,\xi} & B_{\xi+1,\xi+1} & \cdots & B_{\xi+1,m} \\ \vdots & & B_{21}^{(m-\xi,\xi)} & \vdots & \vdots & B_{22}^{(m-\xi,m-\xi)} & \vdots \\ B_{m1} & & \cdots & B_{m\xi} & B_{m,\xi+1} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix}\right.}
=
$$

$$
= \underset{C}{2^q\left\{\begin{bmatrix} \overbrace{C_{11}}^{2^q} & C_{12} & \cdots & C_{1\xi} & C_{1,\xi+1} & \cdots & C_{1m} \\ \vdots & & C_{11}^{(\xi,\xi)} & \vdots & \vdots & C_{12}^{(\xi,m-\xi)} & \vdots \\ C_{\xi 1} & C_{\xi 2} & \cdots & C_{\xi\xi} & C_{\xi,\xi+1} & \cdots & C_{\xi m} \\ \hline C_{\xi+1,1} & & \cdots & C_{\xi+1,\xi} & C_{\xi+1,\xi+1} & \cdots & C_{\xi+1,m} \\ \vdots & & C_{21}^{(m-\xi,\xi)} & \vdots & \vdots & C_{22}^{(m-\xi,m-\xi)} & \vdots \\ C_{m1} & & \cdots & C_{m\xi} & C_{m,\xi+1} & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix}\right.}
$$

Рис. 1

торого равна $O(n^{2,807})$, требует $\log_2 n$ рекурсивных шагов [8]. Рассмотрим первый шаг рекурсии этого метода, который хорошо адаптирован к параллельной обработке и часто используется для распараллеливания вычислений [9]. В этом случае метод Штрассена в матричном виде применительно к клеточным подматрицам порядка ξ запишем следующим образом:

$$
\begin{aligned}
Z^1 &= (A_{11}^{(\xi,\xi)} + A_{22}^{(m-\xi,m-\xi)})(B_{11}^{(\xi,\xi)} + B_{22}^{(m-\xi,m-\xi)}),\\
Z^2 &= (A_{21}^{(m-\xi,\xi)} + A_{22}^{(m-\xi,m-\xi)})B_{11}^{(\xi,\xi)},\\
Z^3 &= A_{11}^{(\xi,\xi)}(B_{12}^{(\xi,m-\xi)} - B_{22}^{(m-\xi,m-\xi)}),\\
Z^4 &= A_{22}^{(m-\xi,m-\xi)}(B_{21}^{(m-\xi,\xi)} - B_{11}^{(\xi,\xi)}),\\
Z^5 &= (A_{11}^{(\xi,\xi)} + A_{12}^{(\xi,m-\xi)})B_{22}^{(m-\xi,m-\xi)},\\
Z^6 &= (A_{21}^{(m-\xi,\xi)} - A_{11}^{(\xi,\xi)})(B_{11}^{(\xi,\xi)} + B_{12}^{(\xi,m-\xi)}),\\
Z^7 &= (\mathrm{A}_{12}^{(\xi,\mathrm{m}-\xi)} - \mathrm{A}_{22}^{(\mathrm{m}-\xi,\mathrm{m}-\xi)})(\mathrm{B}_{21}^{(\mathrm{m}-\xi,\xi)} + \mathrm{B}_{22}^{(\mathrm{m}-\xi,\mathrm{m}-\xi)});
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{11}^{(\xi,\xi)} &= Z^1 + Z^4 - Z^5 + Z^7, & C_{12}^{(\xi,m-\xi)} &= Z^3 + Z^5,\\
C_{21}^{(m-\xi,\xi)} &= Z^2 + Z^4, & C_{22}^{(m-\xi,m-\xi)} &= Z^1 - Z^2 + Z^3 + Z^6.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

В отличие от метода Штрассена, который оперирует числовыми подматрицами порядка $n/2$, в вычислительном процессе согласно формулам (1) и (2) участвуют клеточные подматрицы порядка ξ, декомпозированные на клетки заданного порядка 2^q, и вычисление матричных произведений осуществляется с использованием быстрого клеточного метода умножения матриц [7]. Такое сочетание двух методов образует смешанный клеточный метод умножения матриц, который формализуем следующим образом.

Обозначим суммы клеточных $(\xi \times \xi)$-подматриц, входящие в (1), X^i и Y^i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$:

$$\begin{gathered}
X^1 = (A_{11}^{(\xi,\xi)} + A_{22}^{(m-\xi,m-\xi)}), \quad Y^1 = (B_{11}^{(\xi,\xi)} + B_{22}^{(m-\xi,m-\xi)}), \\
X^2 = (A_{21}^{(m-\xi,\xi)} + A_{22}^{(m-\xi,m-\xi)}), \quad Y^2 = (B_{12}^{(\xi,m-\xi)} - B_{22}^{(m-\xi,m-\xi)}), \\
X^3 = (A_{11}^{(\xi,\xi)} + A_{12}^{(\xi,m-\xi)}), \quad Y^3 = (B_{21}^{(m-\xi,\xi)} - B_{11}^{(\xi,\xi)}), \\
X^4 = (A_{21}^{(m-\xi,\xi)} - A_{11}^{(\xi,\xi)}), \quad Y^4 = (B_{11}^{(\xi,\xi)} + B_{12}^{(\xi,m-\xi)}), \\
X^5 = (A_{12}^{(\xi,m-\xi)} - A_{22}^{(m-\xi,m-\xi)}), \quad Y^5 = (B_{21}^{(m-\xi,\xi)} + B_{22}^{(m-\xi,m-\xi)}).
\end{gathered} \tag{3}$$

Тогда выражение (1) примет следующий вид:

$$\begin{gathered}
Z^1 = X^1 Y^1, \; Z^2 = X^2 B_{11}^{(\xi,\xi)}, \; Z^3 = A_{11}^{(\xi,\xi)} Y^2, \\
Z^4 = A_{22}^{(m-\xi,m-\xi)} Y^3, \; Z^5 = X^3 B_{22}^{(m-\xi,m-\xi)}, \; Z^6 = X^4 Y^4, \; Z^7 = X^5 Y^5.
\end{gathered} \tag{4}$$

На первом этапе смешанного клеточного метода, применяя известную операцию матричного сложения [10] и оперируя клетками матриц порядка 2^q, вычисляем матричные суммы согласно (3) по следующим формулам:

$$\begin{gathered}
X_{ij}^1 = (A_{ij} + A_{\xi+i,\xi+j}), \quad Y_{ij}^1 = (B_{ij} + B_{\xi+i,\xi+j}), \\
X_{ij}^2 = (A_{\xi+i,j} + A_{\xi+i,\xi+j}), \quad Y_{ij}^2 = (B_{i,\xi+j} - B_{\xi+i,\xi+j}), \\
X_{ij}^3 = (A_{ij} + A_{i,\xi+j}), \quad Y_{ij}^3 = (B_{\xi+i,j} - B_{ij}), \\
X_{ij}^4 = (A_{\xi+i,j} - A_{ij}), \quad Y_{ij}^4 = (B_{ij} + B_{i,\xi+j}), \\
X_{ij}^5 = (A_{i,\xi+j} - A_{\xi+i,\xi+j}), \quad Y_{ij}^5 = (B_{\xi+i,j} + B_{\xi+i,\xi+j}),
\end{gathered} \tag{5}$$

где $i, j = 1, \ldots, \xi$.

На втором этапе вычисляем семь матричных произведений $Z^1, Z^2, \ldots, Z^7$ согласно формуле (4), для реализации каждого из которых применяем клеточный метод матричного умножения [7]. Для нахождения первого матричного произведения Z^1 используются клеточные подматрицы-операнды X^1 и Y^1 порядка ξ, которые изображены на рис. 2.

$$\overset{X^1}{\begin{bmatrix} X_{11}^1 & X_{12}^1 & \cdots & X_{1\xi}^1 \\ X_{21}^1 & X_{22}^1 & \cdots & X_{2\xi}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{\xi1}^1 & X_{\xi2}^1 & \cdots & X_{\xi\xi}^1 \end{bmatrix}} \times \overset{Y^1}{\begin{bmatrix} Y_{11}^1 & Y_{12}^1 & \cdots & Y_{1\xi}^1 \\ Y_{21}^1 & Y_{22}^1 & \cdots & Y_{2\xi}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{\xi1}^1 & Y_{\xi2}^1 & \cdots & Y_{\xi\xi}^1 \end{bmatrix}} = \overset{Z^1}{\begin{bmatrix} Z_{11}^1 & Z_{12}^1 & \cdots & Z_{1\xi}^1 \\ Z_{21}^1 & Z_{22}^1 & \cdots & Z_{2\xi}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{\xi1}^1 & Z_{\xi2}^1 & \cdots & Z_{\xi\xi}^1 \end{bmatrix}}$$

Рис. 2

Согласно клеточному методу [7] вначале определяются матричные коэффициенты R_{ik} и F_{kj}:

$$
\begin{aligned}
R_{ik}^{1} &= (X_{2i-1,2k-1}^{1} + X_{2i,2k}^{1}), \quad F_{kj}^{1} = (Y_{2k-1,2j-1}^{1} + Y_{2k,2j}^{1}),\\
R_{ik}^{2} &= (X_{2i,2k-1}^{1} + X_{2i,2k}^{1}), \quad F_{kj}^{2} = (Y_{2k-1,2j}^{1} - Y_{2k,2j}^{1}),\\
R_{ik}^{3} &= (X_{2i-1,2k-1}^{1} + X_{2i-1,2k}^{1}), \quad F_{kj}^{3} = (Y_{2k,2j-1}^{1} - Y_{2k-1,2j-1}^{1}),\\
R_{ik}^{4} &= (X_{2i,2k-1}^{1} - X_{2i-1,2k-1}^{1}), \quad F_{kj}^{4} = (Y_{2k-1,2j-1}^{1} + Y_{2k-1,2j}^{1}),\\
R_{ik}^{5} &= (X_{2i-1,2k}^{1} - X_{2i,2k}^{1}), \quad F_{kj}^{5} = (Y_{2k,2j-1}^{1} + Y_{2k,2j}^{1}),
\end{aligned} \tag{6}
$$

где $i, j, k = 1, 2, \ldots, p$; $p = \dfrac{n/2}{2^{q+1}} = \dfrac{n}{2^{q+2}} = 2^{\gamma-q-2}$.

Затем выполняются регулярные вычисления матриц Q_{ij}:

$$
\begin{gathered}
Q_{ij}^{1} = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^{1} F_{kj}^{1}, \; Q_{ij}^{2} = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^{2} Y_{2k-1,2j-1}^{1},\\
Q_{ij}^{3} = \sum_{k=1}^{p} X_{2i-1,\,2k-1}^{1} F_{kj}^{2}, \; Q_{ij}^{4} = \sum_{k=1}^{p} X_{2i,\,2k}^{1} F_{kj}^{3}, \; Q_{ij}^{5} = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^{3} Y_{2k,2j}^{1},\\
Q_{ij}^{6} = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^{4} F_{kj}^{4}, \; Q_{ij}^{7} = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^{5} F_{kj}^{5},
\end{gathered} \tag{7}
$$

где $i, j, k = 1, 2, \ldots, p$.

В заключение вычисляются матрицы Z_{ij}^{1}:

$$
\begin{gathered}
Z_{2i-1,2j-1}^{1} = Q_{ij}^{1} + Q_{ij}^{4} - Q_{ij}^{5} + Q_{ij}^{7}, \quad Z_{2i-1,2j}^{1} = Q_{ij}^{3} + Q_{ij}^{5}, \quad Z_{2i,2j-1}^{1} = Q_{ij}^{2} + Q_{ij}^{4},\\
Z_{2i,2j}^{1} = Q_{ij}^{1} - Q_{ij}^{2} + Q_{ij}^{3} + Q_{ij}^{6},
\end{gathered} \tag{8}
$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, p$.

Аналогичным образом определяем остальные матричные произведения Z^2, $Z^3, \ldots, Z^7$ согласно (4).

После вычисления указанных произведений, на третьем, окончательном, этапе смешанного клеточного метода вычисляем результирующие матрицы C_{ij} порядка 2^q по следующим формулам:

$$
\begin{gathered}
C_{ij} = Z_{ij}^{1} + Z_{ij}^{4} - Z_{ij}^{5} + Z_{ij}^{7}, \quad C_{i,\,\xi+j} = Z_{ij}^{3} + Z_{ij}^{5},\\
C_{\xi+i,\,j} = Z_{ij}^{2} + Z_{ij}^{4}, \quad C_{\xi+i,\,\xi+j} = Z_{ij}^{1} - Z_{ij}^{2} + Z_{ij}^{3} + Z_{ij}^{6},
\end{gathered} \tag{9}
$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, \xi$.

Перейдем к оценке вычислительной сложности клеточных аналогов известных алгоритмов матричного умножения, которые могут быть получены на основе метода (4)–(9). При вычислении матричных выражений (5) и (9) этот метод требует соответственно $10\xi^2$ и $8\xi^2$ матричных операций сложения. Для каждой матричной операции сложения внутренний алгоритм требует 2^{2q} скалярных операций сложения. Таким образом, суммарная аддитивная сложность вычислений (5) и (9), определяемая количеством скалярных операций сложения, составляет

$$
\begin{aligned}
W_{\text{а}}^{(5,9)} &= W_{\text{а}}^{(5)} + W_{\text{а}}^{(9)} = 10\xi^2 \cdot 2^{2q} + 8\xi^2 \cdot 2^{2q} = 18\left(\frac{m}{2}\right)^2 \cdot 2^{2q} =\\
&= 18\left(\frac{n}{2^{q+1}}\right)^2 \cdot 2^{2q} = 4{,}5n^2 \ \text{(операций сложения).}
\end{aligned}
$$

Оценим сложность вычисления одного из семи матричных произведений Z^1, т.е. вычислений (6), (7) и (8). При определении матричных коэффициентов (6) и матриц Z_{ij}^1 (8) внешние алгоритмы требуют соответственно $10p^2$ и $8p^2$ матричных операций сложения, для каждой из которых внутренний алгоритм требует 2^{2q} скалярных операций сложения. Следовательно, суммарная аддитивная сложность вычислений (6) и (8) составит

$$W_{\text{а}}^{(6,8)} = 10p^2 \cdot 2^{2q} + 8p^2 \cdot 2^{2q} = 10\left(\frac{n}{2^{q+2}}\right)^2 \cdot 2^{2q} + 8\left(\frac{n}{2^{q+2}}\right)^2 \cdot 2^{2q} =$$

$$= 0{,}625n^2 + 0{,}5n^2 = 1{,}125n^2 \text{ (операций сложения).}$$

При вычислении матричных выражений (7) внешний алгоритм требует $7p^3$ матричных операций умножения и $7(p^3 - p^2)$ матричных операций сложения.

Используя в качестве внутреннего алгоритма традиционный алгоритм матричного умножения [10], который требует 2^{3q} скалярных операций умножения и $(2^{3q} - 2^{2q})$ скалярных операций сложения, получаем для мультипликативной сложности, определяемой количеством скалярных операций умножения, и аддитивной сложности вычислений (7) следующие значения:

$$W_{\text{м}}^{(7)} = 7p^3 \cdot 2^{3q} = 7\left(\frac{n}{2^{q+2}}\right)^3 \cdot 2^{3q} \approx 0{,}109n^3 \text{ (операций умножения),}$$

$$W_{\text{а}}^{(7)} = 7(p^3 \cdot 2^{3q} - p^2 \cdot 2^{2q}) = 7\left[\left(\frac{n}{2^{q+2}}\right)^3 \cdot 2^{3q} - \left(\frac{n}{2^{q+2}}\right)^2 \cdot 2^{2q}\right] \approx$$

$$\approx 0{,}109n^3 - 0{,}437n^2 \text{ (операций сложения).}$$

Таким образом, на основе предложенного смешанного клеточного метода (4)–(9) получаем клеточный аналог традиционного алгоритма со следующими значениями мультипликативной и аддитивной сложностей:

$$W_{\text{м}} = 7W_{\text{м}}^{(7)} \approx 7 \cdot 0{,}109n^3 = 0{,}763n^3 \text{ (операций умножения),}$$

$$W_{\text{а}} = 7(W_{\text{а}}^{(6,8)} + W_{\text{а}}^{(7)}) + W_{\text{а}}^{(5,9)} \approx 7(1{,}125n^2 + 0{,}109n^3 - 0{,}437n^2) + 4{,}5n^2 \approx$$

$$\approx 0{,}763n^3 + 9{,}316n^2 \text{ (операций сложения).}$$

Аналогичным образом рассчитываются мультипликативная и аддитивная сложности клеточных аналогов других известных алгоритмов матричного умножения, значения которых приведены в табл. 1.

Таблица 1

Клеточные аналоги алгоритмов матричного умножения, полученные на основе смешанного клеточного метода (настоящая статья)	**Вычислительная сложность (число операций)**	
	Мультипликативная, $W_{\text{м}}$	**Аддитивная, $W_{\text{а}}$**
Традиционного алгоритма [10]	$0{,}763\text{n}^3$	$\approx 0{,}763\text{n}^3$
Алгоритма Винограда [11]	$\approx 0{,}382\text{n}^3$	$\approx 1{,}147\text{n}^3$
Алгоритма Штрассена [8]	$\approx 0{,}763\left(\frac{7^q}{2^{3q}}\right)\text{n}^3$	$\approx 0{,}763\left(\frac{6 \cdot 7^q - 5 \cdot 2^{2q}}{2^{3q}}\right)\text{n}^3$
Алгоритма Елфимовой–Капитоновой [12]	$\approx 0{,}334\text{n}^3$	$\approx 1{,}004\text{n}^3$

Предложенный метод наиболее эффективен при большом порядке исходных матриц ($n > 10^3$), когда сложность $O(n^3) >> O(n^2)$. Принимая во внимание этот факт, в табл. 1 даны приближенные значения операционной сложности без учета сложности $O(n^2)$, поскольку уже при $n = 10^4$ сложность $O(n^2)$ составляет 0,12 % сложности $O(n^3)$.

Таким образом, рассмотренный смешанный клеточный метод минимизирует значения мультипликативной и аддитивной сложностей отмеченных алгоритмов матричного умножения на 25 %.

Увеличение глубины рекурсии (числа рекурсивных шагов) приводит к дальнейшему уменьшению вычислительной сложности приведенных клеточных аналогов на каждом шаге рекурсии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Giloi W.K. Parallel supercomputer architectures and their programming models // Parallel Computing. — 1994. — **20**. — P. 1443–1470.
2. Giloi W.K. The SUPRENUM supercomputer: Goals, achievements and lessons learned // Ibid. — 1994. — **20**. — P. 1407–1425.
3. Krekel D., Bonniger T., Esser R. A comparative description of massively parallel computers // Ibid. — 1995. — **21**. — P. 199–232.
4. Kung H.T., Leiserson C.E. Systolic arrays (for VLSI) // Sparse Matrix Proc. — 1978. — Jan. — P. 32–63.
5. Navarro J.J., Liaberia J.M., Valoro M. Partitioning: An essential step in mapping algorithms into array processors // Computer. — 1987. — **21**, N 7. — P. 77–89.
6. Лысанов С.Ю. Клеточные методы решения задач линейной алгебры // Вопр. кибернетики. — 1988. — № 135. — С. 64–73.
7. Елфимова Л.Д. Быстрый клеточный метод умножения матриц // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 55–59.
8. Strassen V. Gaussian elimination is not optimal // Numer. Math. — 1969. — **13**. — P. 354–356.
9. Grayson B., Van de Geijn R. A high performance parallel Strassen implementation // Paral. Proces. Letters. — 1996. — **6**. — P. 3–12.
10. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.; Л.: Физматгиз, 1963. — 734 с.
11. Winograd S.A. A new algorithm for inner product // IEEE Trans. Comp. — 1968. — **C-18.** — P. 693–694.
12. Елфимова Л.Д., Капитонова Ю.В. Быстрый алгоритм для умножения матриц и его эффективная реализация на систолических массивах // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 1. — С. 135–150.

Поступила 02.06.2008