СИСТЕМНЫЙ
АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА

УДК 519.6

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА

Ключевые слова: *конвективно-диффузионный перенос, идентификация параметров, градиентные методы*.

В работах [1, 2] рассмотрены вопросы построения явных выражений градиентов квадратичных функционалов-невязок для реализации градиентных методов идентификации различных параметров многокомпонентных распределенных систем. Аналогичные вопросы для псевдопараболических, гиперболических, псевдогиперболических многокомпонентных распределенных систем рассмотрены соответственно в работах [3–5]. В данной статье получены явные выражения представления градиентов квадратичных функционалов-невязок через решения прямых и соответствующих сопряженных задач для идентификации параметров краевых условий, коэффициентов диффузии, скорости конвективного переноса, параметра слабопроницаемой тонкой составляющей среды распределенной системы конвективно-диффузионного переноса. Рассмотрен вопрос применения параметрической идентификации параметров.

1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ КОНЦАХ ОТРЕЗКА

Пусть на области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ $(\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,\ \Omega_1 = (0, \xi),\ \Omega_2 = (\xi, l),\ 0 < \xi < l < \infty)$ определено параболическое уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial y}{\partial x} - vy \right) + \widetilde{f}\,. \tag{1}$$

На концах отрезка $[0, l]$ заданы краевые условия

$$-\left(k\,\frac{\partial y}{\partial x} - vy \right) = u_1, \quad x = 0, \quad t \in (0, T), \tag{2}$$

$$k\,\frac{\partial y}{\partial x} - vy = -\,u_2\, y + u_3, \quad x = l, \quad t \in (0, T). \tag{3}$$

В точке $x = \xi$ зададим следующие условия неидеального контакта:

$$\left[k\,\frac{\partial y}{\partial x} - vy \right] = 0, \quad t \in (0, T), \tag{4}$$

$$\left\{ k\,\frac{\partial y}{\partial x} - vy \right\}^{\pm} = r[\,y], \quad t \in (0, T). \tag{5}$$

Здесь $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^{\pm} = \{\varphi\}^{\pm} = \varphi\,(\xi \pm 0, t)$, $r = \mathrm{const} \geq 0$.

Начальное условие имеет вид

$$y\Big|_{t=0} = y_0, \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{6}$$

Предполагаем, что в N точках $d_i \in \Omega$ известны значения решения начально-краевой задачи (1)–(6):

$$y(d_i, t) = f_i(t), \quad t \in (0, T), \quad i = \overline{1, N}. \tag{7}$$

Задача (1)–(7) состоит в нахождении вектора $u = \{u_i\}_{i=1}^{3} \in \mathrm{U}$, при котором решение $y = y(u) = y(u; x, t)$ начально-краевой задачи (1)–(6) удовлетворяет равенствам (7), где $\mathrm{U} = C(0, T) \times C_+(0, T) \times C(0, T)$, $C_+(0, T) = \{v(t) \in \in C(0, T) : v > 0, \ t \in [0, T]\}$.При каждом фиксированном $u \in \mathrm{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (1)–(6) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 1. При каждом фиксированном $u \in \mathrm{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (1)–(6) называется функция $y = y(u) = = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall \ w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}, w\right) + a(u; y, w) = l(u; w), \quad t \in (0, T), \tag{8}$$

$$(y, w)(0) = (y_0, w), \tag{9}$$

где

$$(\varphi, \psi) = \int_0^l \varphi\psi dx,$$

$$a(u; y, w) = \int_0^l \left(k \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} - vy\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx + r[y][w] + u_2 y\Big|_{x=l} w(l),$$

$$l(u; w) = (\widetilde{f}, w) + u_1 w(0) + u_3 w(l),$$

$$W(0, T) = \{v(x, t) \in L^2(0, T; V) : \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; L_2(\Omega))\}, \ V = \overline{V},$$

$$\overline{V} = \{v(x, t) : v\Big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), \ i = 1, 2, \ t \in (0, T)\},$$

$$V_0 = \overline{V}_0, \quad \overline{V}_0 = \{v(x) : v\Big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), \ i = 1, 2\}.$$

Пусть вектор u получает приращение $\Delta u \ (u + \Delta u \in \mathrm{U})$.

На основании задачи (1)–(6), пренебрегая членами второго порядка малости, для приращения $\theta = \Delta y$ решения $y = y(u)$ получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} - v\theta\right), \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

$$-\left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} - v\theta\right) = \Delta u_1, \quad x = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial x} - v\theta = -u_2\theta - \Delta u_2 y + \Delta u_3, \quad x = l, \quad t \in (0, T), \tag{10}$$

$$\left[k \frac{\partial \theta}{\partial x} - v\theta\right] = 0, \quad x = \xi, \quad t \in (0, T),$$

$$\left\{ k \frac{\partial\theta}{\partial x} - v\,\theta \right\}^{\pm} = r[\theta], \quad x = \xi, \quad t \in (0, T),$$

$$\theta\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Определение 2. Обобщенным решением начально-краевой задачи (10) называется функция $\theta(x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}, w \right) + a\,(u; \theta, w) = l_\theta\,(\Delta u; w), \quad t \in (0, T), \tag{11}$$

$$(\theta, w)(0) = 0, \tag{12}$$

где $l_\theta\,(\Delta u; w) = \Delta u_1 w(0) - \Delta u_2\, y\Big|_{x=l} w(l) + \Delta u_3 w(l)$.

Составим функционал-невязку

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \rho_i(t) (A_i u - f_i)^2\, dt, \tag{13}$$

где $\rho_i(t)$ — весовые коэффициенты, $A_i u = y(u; d_i, t)$, $Au = \{A_i u\}_{i=1}^{N}$.

Вместо задачи (1)–(7) будем рассматривать задачу (11)–(13), состоящую в нахождении вектора $u \in \mathrm{U}$, минимизирующего на U функционал (13) при ограничениях (11), (12).

Приближение u_{n+1} решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (11)–(13) находим с помощью итерационного процесса

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n\, p_n, \quad n = 0, 1, \ldots, n^*, \tag{14}$$

начиная с некоторого начального приближения $u_0 \in \mathrm{U}$, где направление спуска p_n и коэффициент β_n определяются следующими выражениями [6]:

— для метода минимальных ошибок

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}, \tag{15}$$

— для метода скорейшего спуска

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|A\, J'_{u_n}\|^2}, \tag{16}$$

— для метода сопряженных градиентов

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n\, p_{n-1}, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|J'_{u_{n-1}}\|^2}, \quad \beta_n = \frac{\left(J'_{u_n}, p_n\right)}{\|Ap_n\|^2}, \tag{17}$$

где $e_n = Au_n - \bar{f}$, $Au_n = \{y(u_n; d_i, t)\}_{i=1}^{N}$, $\bar{f} = \{f_i\}_{i=1}^{N}$.

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (11)–(13), следуя [1–5], с учетом [7, 8] введем в рассмотрение следующую сопряженную начально-краевую задачу:

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + v \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (x, t) \in \Omega_T \setminus \gamma_d,$$

$$-k \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$k\,\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\,u_2\psi,\quad x=l,\quad t\in(0,T),$$

$$\left[k\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]=0,\quad x=\xi,\quad t\in(0,T),\tag{18}$$

$$\left\{k\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\}^{\pm}=r[\psi],\quad x=\xi,\quad t\in(0,T),$$

$$[\psi]=0,\quad \left[k\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]=-\,\rho_i\,(y(u_n)-f_i),\quad x=d_i,\quad t\in(0,T),\quad i=\overline{1,N},$$

$$\psi\Big|_{t=T}=0,\quad x\in\overline{\Omega},$$

где $\gamma_d=\{d_i\}_{i=1}^{N}\times(0,T)$.

Определение 3. Обобщенным решением начально-краевой задачи (18) называется функция $\psi\,(x,t)\in W_d\,(0,T)$, которая $\forall w(x)\in V_{d_0}$ удовлетворяет системе тождеств

$$-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\,w\right)+a_{\psi}\,(u;\psi,w)=l_{\psi}\,(w),\quad t\in(0,T),\tag{19}$$

$$(\psi,w)(T)=0,\tag{20}$$

где

$$a_{\psi}\,(u;\psi,w)=\int_0^l\left(k\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}-v\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\,w\right)dx+r[\psi][w]+u_2\psi\,(l,t)\,w(l),$$

$$l_{\psi}\,(w)=\sum_{i=1}^{N}\rho_i\,(y(u_n)-f_i)\,w(d_i),$$

$$W_d\,(0,T)=\{v\in L^2\,(0,T;V_d):\frac{\partial v}{\partial t}\in L^2\,(0,T;L_2\,(\Omega))\},\tag{21}$$

$$V_d=\{v\,(x,t)\in\overline{V}_d\ :[\psi]\Big|_{d_i}=0,\ i=\overline{1,N}\},$$

$$\overline{V}_d=\{v\,(x,t):v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1\,(\Omega_i),\ i=\overline{0,N+1}\},$$

$$\Omega_0=(0,d_1),\ldots,\Omega_{N+1}=(d_N,l).$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, на каждом шаге итерационного процесса определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathrm{U}$ задачи (11)–(13) вместо функции $y\,(u_{n+1};x,t)$ будем использовать функцию $\widetilde{y}$ как обобщенное решение начально-краевой задачи

$$\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial x}-v\,\widetilde{y}\right)+\widetilde{f},\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

$$-\left(k\,\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial x}-v\widetilde{y}\right)=u_{1n}+\Delta u_{1n},\quad x=0,\quad t\in(0,T),$$

$$k\,\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial x}-v\widetilde{y}=-\,u_{2n}\,\widetilde{y}-\Delta u_{2n}\,y_n+u_{3n}+\Delta u_{3n},\quad x=l,\quad t\in(0,T),\tag{22}$$

$$\left[k\,\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial x}-v\widetilde{y}\right]=0,\quad x=\xi,\quad t\in(0,T),$$

$$\left\{k\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}-v\tilde{y}\right\}^{\pm}=r[\tilde{y}],\quad x=\xi,\quad t\in(0,T),\ \tilde{y}\Big|_{t=0}=y_0,\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2,$$

где $u_n=\{u_{in}\}_{i=1}^3$, $y_n=y(u_n;x,t)$.

Определение 4. Обобщенным решением начально-краевой задачи (22) называется функция $\tilde{y}\in W(0,T)$, которая $\forall\, w(x)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t},\ w\right)+a(u_n;\tilde{y},w)=l(y_n,\Delta u_n;w),\quad t\in(0,T),\tag{23}$$

$$(\tilde{y},w)(0)=(y_0,w),\tag{24}$$

где $l(y_n,\Delta u_n;w)=(\tilde{f},w)+(u_{1n}+\Delta u_{1n})\,w(0)+(u_{3n}+\Delta u_{3n})\,w(l)-\Delta u_{2n}\,y_n\big|_{x=l}\,w(l)$.

На каждом шаге указанного итерационного процесса $\forall\, u,v\in \mathrm{U}$ обозначим

$$\pi(u,v)=(\bar{Y}(u)-\bar{Y}(u_n),\ \bar{Y}(v)-\bar{Y}(u_n))_\rho,$$

$$L(v)=(\bar{f}-\bar{Y}(u_n),\bar{Y}(v)-\bar{Y}(u_n))_\rho,\tag{25}$$

где $\bar{Y}(v)=\{y(v;d_i,t)\}_{i=1}^N$, $(\bar{\varphi},\bar{\psi})_\rho=\int\limits_0^T\sum\limits_{i=1}^N\rho_i\varphi_i\psi_i\,dt$, $\bar{\varphi}=\{\varphi_i\}_{i=1}^N$, $\bar{\psi}=\{\psi_i\}_{i=1}^N$.

Пусть $u_n+\Delta u_n\in \mathrm{U}$. Тогда $\forall\,\lambda\in(0,1)$ $u_n+\lambda\Delta u_n\in \mathrm{U}$. На основании начально-краевой задачи (22) получаем

$$y(u_n+\lambda\Delta u_n)\Leftrightarrow y(u_n)+\lambda\,\tilde{y}_0(\Delta u_n),\tag{26}$$

где $\tilde{y}_0(\Delta u_n)$ — решение начально-краевой задачи

$$\frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial x}-v\tilde{y}_0\right),\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

$$-\left(k\frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial x}-v\tilde{y}_0\right)=\Delta u_{1n},\quad x=0,\quad t\in(0,T),$$

$$k\frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial x}-v\tilde{y}_0=-u_{2n}\tilde{y}_0-\Delta u_{2n}y_n+\Delta u_{3n},\quad x=l,\quad t\in(0,T),$$

$$\left[k\frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial x}-v\tilde{y}_0\right]=0,\quad x=\xi,\quad t\in(0,T),\tag{27}$$

$$\left\{k\frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial x}-v\tilde{y}_0\right\}^{\pm}=r[\tilde{y}_0],\quad x=\xi,\quad t\in(0,T),$$

$$\tilde{y}_0\Big|_{t=0}=0,\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2,$$

т.е. задачи, состоящей в нахождении функции $\tilde{y}_0\in W(0,T)$, которая $\forall\, w(x)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial t},w\right)+a(u_n;\tilde{y}_0,w)=l_\theta(\Delta u_n;w),\quad t\in(0,T),\tag{28}$$

$$(\tilde{y}_0,w)(0)=0,\tag{29}$$

где $\tilde{y}_0=\tilde{y}_0(\Delta u_n)$, $l_\theta(\Delta u_n;w)=\Delta u_{1n}w(0)-\Delta u_{2n}y_n\big|_{x=l}w(l)+\Delta u_{3n}w(l)$.

Поскольку

$$\lambda\,\tilde{y}_0(\Delta u_n)=\lambda\,(\tilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)),\tag{30}$$

где $\tilde{y}(u_{n+1})=\tilde{y}$ — решение задачи (23), (24), то с учетом (26) имеем

$$\bar{Y}(u_n+\lambda\Delta u_n)-\bar{Y}(u_n)\Leftrightarrow\lambda(\overline{\tilde{Y}}\ \ (u_{n+1})-\bar{Y}(u_n)).\tag{31}$$

Функционал (13) $\forall\, v\in\mathrm{U}$ можем представить в виде

$$2J(v)=\pi(v,v)-2L(v)+\|\bar{f}-\bar{Y}(u_n)\|_\rho^2.\tag{32}$$

С учетом (32), (25), (31) имеем

$$|J'_{u_n},\Delta u_n|=\lim_{\lambda\to+0}\frac{J(u_n+\lambda\Delta u_n)-J(u_n)}{\lambda}\Leftrightarrow(\bar{Y}(u_n)-\bar{f},\overline{\tilde{Y}}\ \ (u_{n+1})-Y(u_n))_\rho.\tag{33}$$

Выбирая в тождествах (19), (20) вместо функции w разность $\tilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (11), (12) получаем

$$\int_0^T\sum_{i=1}^N\rho_i(y(u_n;d_i,t)-f_i(t))(\tilde{y}(u_{n+1};d_i,t)-y(u_n;d_i,t))dt=$$

$$=\int_0^T\left(\frac{\partial\tilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)}{\partial t},\psi\right)dt+\int_0^T a(u_n;\tilde{y}(u_{n+1})-y(u_n),\psi)dt=\tag{33′}$$

$$=\int_0^T l_\theta(\Delta u_n;\psi)dt=\int_0^T(\Delta u_1\psi(0,t)-\Delta u_2\,y|_{x=l}\,\psi(l,t)+\Delta u_3\psi(l,t))dt.$$

На основании (33), (33′) можем записать

$$J'_{u_n}\Leftrightarrow\tilde{\psi}_n,\tag{34}$$

где

$$\tilde{\psi}_n=\{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^3,\quad\tilde{\psi}_n^1=\psi(0,t),\tilde{\psi}_n^2=-\,y|_{x=l}\,\psi(l,t),$$

$$\tilde{\psi}_n^3=\psi(l,t),\quad\|J'_{u_n}\|^2=\sum_{i=1}^3\int_0^T(\tilde{\psi}_n^i)^2\,dt.\tag{34′}$$

Замечание 1. Если в задаче (1)–(7) восстанавливаемые параметры u_i, $i=\overline{1,3}$, — постоянные, то $\tilde{\psi}_n^i=\mathrm{const}$, $i=\overline{1,3}$, $\tilde{\psi}_n^1=\int_0^T\psi(0,t)dt$, $\tilde{\psi}_n^2=-\int_0^T y|_{x=l}\,\psi(l,t)dt$, $\tilde{\psi}_n^3=\int_0^T\psi(l,t)dt$, $\|J'_{u_n}\|^2=\sum_{i=1}^3(\tilde{\psi}_n^i)^2$.

Замечание 2. Если в задаче (1)–(7), например, восстанавливаемый параметр $u_2=\mathrm{const}$, то $\tilde{\psi}_n^2=-\int_0^T y|_{x=l}\,\psi(l,t)\,dt$, а остальные составляющие $\tilde{\psi}_n^1$, $\tilde{\psi}_n^2$ определяются по соответствующим формулам (34′) и $\|J'_{u_n}{}^2=$ $=\int_0^T((\tilde{\psi}_n^1)^2+(\tilde{\psi}_n^3)^2)dt+(\tilde{\psi}_n^2)^2$.

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (14), (15) определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathrm{U}$ задачи (11)–(13) направление спуска p_n и коэффициент β_n можем определить с помощью выражений (15), (34).

Решив задачу определения функции $z(\tilde{\psi}_n;x,t)\in W(0,T)$, которая

$\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}, w\right) + a\,(\widetilde{\psi}_n; z, w) = l\,(\widetilde{\psi}_n; w), \quad t \in (0, T),$$

$$(z, w)(0) = (y_0, w), \tag{35}$$

получим вектор $AJ'_{u_n} \Leftrightarrow A\widetilde{\psi}_n = \{z_i(\widetilde{\psi}_n)\}_{i=1}^N$, что позволит реализовать метод скорейшего спуска (14), (16) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (8),(9), (13), где $z_i(\widetilde{\psi}_n) = z(\widetilde{\psi}_n; d_i, t)$.

Определив направление спуска p_n с помощью формул (17) и решив задачу определения функции $z(p_n) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}, w\right) + a\,(p_n; z, w) = l\,(p_n; w), \quad t \in (0, T),$$

$$(z, w)(0) = (y_0, w), \tag{36}$$

получим вектор $Ap_n = \{z_i(p_n)\}_{i=1}^N$, что позволит реализовать метод сопряженных градиентов (14), (17) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (8), (9), (13), где $z_i(p_n) = z(p_n; d_i, t)$, $i = \overline{1, N}$.

2.ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФУЗИИ

Пусть на области Ω_T определено параболическое уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial y}{\partial x} - vy\right) + \widetilde{f}. \tag{37}$$

На концах отрезка $[0, l]$ заданы краевые условия

$$-\left(u\frac{\partial y}{\partial x} - vy\right) = \beta_1, \quad x = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$u\frac{\partial y}{\partial x} - vy = -\alpha y + \beta, \quad x = l, \quad t \in (0, T). \tag{38}$$

В точке $x = \xi$ заданы условия сопряжения неидеального контакта

$$\left[u\frac{\partial y}{\partial x} - vy\right] = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$\left\{u\frac{\partial y}{\partial x} - vy\right\}^{\pm} = r[y], \quad t \in (0, T). \tag{39}$$

При $t = 0$ имеем начальное условие

$$y = y_0, \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{40}$$

Предполагаем, что в N точках $d_i \in \Omega$ известны значения решения начально-краевой задачи (37)–(40), заданные равенствами (7).

Задача (37)–(40), (7) состоит в нахождении вектора $u = (u_1, u_2)$ с положительными вещественными компонентами $u \in \mathrm{U} = R_+^2 = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, при котором решение $y = y(u) = y(u; x, t)$ начально-краевой задачи (37)–(40) удовлетворяет равенствам (7).

При каждом фиксированном $u \in \mathrm{U}$, наряду с классическим решением начально-краевой задачи (37)–(40), будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 5. При каждом фиксированном $u \in \mathrm{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (37)–(40) называется функция $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\ w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}, w\right) + a(u;\ y, w) = l(w), \quad t \in (0, T),$$

$$(y, w)(0) = (y_0, w), \tag{41}$$

где пространства $W(0, T)$, V_0 определены в разд. 1,

$$a(u;\ y, w) = \int_0^l \left(u \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} - vy \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx + r[y][w] + \alpha y \Big|_{x=l} w(l),$$

$$l(w) = (\widetilde{f}, w) + \beta_1 w(0) + \beta w(l).$$

На основании задачи (37)–(40), пренебрегая членами второго порядка малости, для приращения $\theta = \Delta y$ решения задачи (37)–(40), соответствующего приращению Δu коэффициента u, получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v\theta\right) + \Delta u \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

$$-\left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v\theta\right) = \Delta u \frac{\partial y}{\partial x}, \quad x = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v\theta = -\alpha\theta - \Delta u \frac{\partial y}{\partial x}, \quad x = l, \quad t \in (0, T),$$

$$\left[u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v\theta\right] = -\left[\Delta u \frac{\partial y}{\partial x}\right], \quad x = \xi, \quad t \in (0, T), \tag{42}$$

$$\left\{u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v\theta\right\}^{\pm} = r[\theta] - \left\{\Delta u \frac{\partial y}{\partial x}\right\}^{\pm}, \quad x = \xi, \quad t \in (0, T),$$

$$\theta\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Определение 6. Обобщенным решением начально-краевой задачи (42) называется функция $\theta(x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\ w(x) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}, w\right) + a(u; \theta, w) = l_\theta(\Delta u; w), \quad t \in (0, T),$$

$$(\theta, w)(0) = 0, \tag{43}$$

где

$$l_\theta(\Delta u; w) = l_\theta^1(\Delta u; w); \quad l_\theta^1(\Delta u; w) = \int_0^l \Delta u \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} w dx + \Delta u \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=0} w(0) -$$

$$- \Delta u \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=l} w(l) + \left\{\Delta u \frac{\partial y}{\partial x}\right\}^{+} w^{+} - \left\{\Delta u \frac{\partial y}{\partial x}\right\}^{-} w^{-}.$$

Замечание 3. Задачу вида (43) для приращения θ решения $y = y(u)$, соответствующего приращению Δu, можем получить на основании обобщенной задачи (41), где

$$l_\theta(\Delta u; w) = l_\theta^2(\Delta u; w), \quad l_\theta^2(\Delta u; w) = -\int_0^l \Delta u \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} dx. \tag{44}$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (41), (13) введем в рассмотрение следующую сопряженную начально-краевую задачу:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+v\,\frac{\partial \psi}{\partial x},\quad (x,t)\in \Omega_T \setminus \gamma_d,$$

$$-u\,\frac{\partial \psi}{\partial x}=0,\quad x=0,\quad t\in(0,T),\qquad u\,\frac{\partial \psi}{\partial x}=-\alpha\psi,\quad x=l,\quad t\in(0,T),$$

$$\left[u\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]=0,\quad x=\xi,\quad t\in(0,T), \tag{45}$$

$$\left\{u\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\right\}^{\pm}=r[\psi],\quad x=\xi,\quad t\in(0,T),$$

$$[\psi]=0,\quad \left[u\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]=-\rho_i\,(y(u_n)-f_i),\quad x=d_i,\quad t\in(0,T),\quad i=\overline{1,N},$$

$$\psi\,\Big|_{t=T}=0,\quad x\in\overline{\Omega},$$

где $u=u_n$.

Определение 7. Обобщенным решением начально-краевой задачи (45) называется функция $\psi\,(x,t)\in W_d\,(0,T)$, которая $\forall\; w(x)\in V_{d_0}$ удовлетворяет системе тождеств

$$-\left(\frac{\partial \psi}{\partial t},\,w\right)+a_{\psi}\,(u;\psi,w)=l_{\psi}\,(w),\quad t\in(0,T),$$
$$(\psi,w)(T)=0, \tag{46}$$

где форма $l_\psi\,(w)$ определена соответствующим выражением (21),

$$a_{\psi}\,(u;\psi,w)=\int_0^l\left(u\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial x}-v\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\,w\right)dx+r[\psi][w]+\alpha\psi\,(l,t)w(l).$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, на каждом шаге итерационного процесса определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathrm{U}$ задачи (41), (13) вместо функции $y(u_{n+1};x,t)$ используем функцию $\widetilde{y}$ как обобщенное решение следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_n\,\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x}-v\,\widetilde{y}\right)+\widetilde{f}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta u_n\,\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right),\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

$$-\left(u_n\,\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x}-v\,\widetilde{y}\right)=\beta_1+\Delta u_n\,\frac{\partial y(u_n)}{\partial x},\quad x=0,\quad t\in(0,T),$$

$$u_n\,\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x}-v\,\widetilde{y}=-\alpha\,\widetilde{y}+\beta-\Delta u_n\,\frac{\partial y(u_n)}{\partial x},\quad x=l,\quad t\in(0,T),$$

$$\left[u_n\,\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x}-v\,\widetilde{y}\right]=-\left[\Delta u_n\,\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right],\quad x=\xi,\quad t\in(0,T), \tag{47}$$

$$\left\{u_n\,\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x}-v\,\widetilde{y}\right\}^{\pm}=r[\widetilde{y}]-\left\{\Delta u_n\,\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right\}^{\pm},\quad x=\xi,\quad t\in(0,T),$$

$$\tilde{y}\Big|_{t=0} = y_0, \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2.$$

Определение 8. Обобщенным решением начально-краевой задачи (47) называется функция $\tilde{y} \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}, w\right) + a(u_n; \tilde{y}, w) = l(y_n, \Delta u_n; w), \quad t \in (0, T),$$

$$(\tilde{y}, w)(0) = (y_0, w), \tag{48}$$

где

$$l(y_n, \Delta u_n; w) = (\tilde{f}, w) + \left(\Delta u_n \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2}, w\right) + \beta_1 w(0) + \Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\Big|_{x=0} w(0) +$$

$$+ \beta w(l) - \Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\Big|_{x=l} w(l) + \left\{\Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right\}^+ w^+ - \left\{\Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right\}^- w^-.$$

Пусть $u_n + \Delta u_n \in \mathrm{U}$. Тогда $\forall\, \lambda \in (0,1)$ $u_n + \lambda \Delta u_n \in \mathrm{U}$. На основании начально-краевой задачи (37)–(40) получаем

$$y(u_n + \lambda \Delta u_n) \Leftrightarrow y(u_n) + \lambda\, \tilde{y}_0(\Delta u_n), \tag{49}$$

где $\tilde{y}_0(\Delta u_n) = \theta$ — решение начально-краевой задачи (42) при $u = u_n$.

Поскольку

$$\lambda\, \tilde{y}_0(\Delta u_n) = \lambda(\tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)), \tag{50}$$

где $\tilde{y}(u_{n+1}) = \tilde{y}$ — решение задачи (48), выбирая в тождествах (46) вместо функции w разность $\tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (43) получаем

$$\int_0^T \sum_{i=1}^N \rho_i (y(u_n; d_i, t) - f_i)(\tilde{y}(u_{n+1}; d_i, t) - y(u_n; d_i, t))dt =$$

$$= \int_0^T \left(\frac{\partial(\tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n))}{\partial t}, \psi\right)dt + \int_0^T a_\psi(u_n; \psi, \tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n))dt =$$

$$= \int_0^T \left(\frac{\partial(\tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n))}{\partial t}, \psi\right)dt + \int_0^T a(u_n; \tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n), \psi)dt =$$

$$= \int_0^T l_\theta(\Delta u_n; \psi)dt, \tag{51}$$

т.е.

$$(\bar{Y}(u_n) - \bar{f}, \overline{\tilde{Y}}(u_{n+1}) - \bar{Y}(u_n))_\rho = \int_0^T l_\theta(\Delta u_n; \psi)dt. \tag{52}$$

Следовательно, $|J'_{u_n}, \Delta u_n| \Leftrightarrow |\tilde{\psi}_n, \Delta u_n|$, т.е.

$$J_{u_n}{}' \Leftrightarrow \tilde{\psi}_n, \tag{53}$$

где

$$\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^2, \quad \tilde{\psi}_n^1 = \int_0^T \int_0^\xi \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2} \psi dx dt +$$

$$+ \int_0^T \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\Big|_{x=0} \psi(0, t)dt - \int_0^T \left\{\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right\}^- \psi^- dt, \tag{54}$$

$$\widetilde{\psi}_n^2 = \int\limits_0^T \int\limits_\xi^l \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2} \psi \, dxdt - \int\limits_0^T \left. \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \right|_{x=l} \psi(l, t) dt + \int\limits_0^T \left\{ \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \right\}^+ \psi^+ dt.$$

Замечание 4. Если в первом тождестве системы (43) $l_\theta(\Delta u; w) = l_\theta^2(\Delta u; w)$, то $\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^2$, $\widetilde{\psi}_n^1 = -\int\limits_0^T \int\limits_0^\xi \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dxdt$, $\widetilde{\psi}_n^2 = -\int\limits_0^T \int\limits_\xi^l \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dxdt$.

Замечание 5. Если в задаче (37)–(40) вместо краевых условий (38) заданы условия Дирихле, то в выражениях (54), определяющих составляющие $\widetilde{\psi}_n^i$ градиента J'_{u_n}, отсутствуют вторые слагаемые.

Если рассматривается однородная среда, т.е. в случае отсутствия точки $x = \xi$ разрыва по пространственной переменной решения $y = y(u; x, t)$ задачи (37)–(40), то $\mathrm{U} = R_+$,

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n, \quad \widetilde{\psi}_n = \int\limits_0^T \int\limits_0^l \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2} \psi dxdt + \tag{55}$$
$$+ \int\limits_0^T \left. \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \right|_{x=0} \psi(0, t) dt - \int\limits_0^T \left. \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \right|_{x=l} \psi(l, t) dt.$$

Замечание 6. Если в задаче (37)–(40) отсутствует точка $x = \xi$ разрыва решения и вместо естественных условий (38) заданы краевые условия Дирихле, то вместо (55) имеем

$$\widetilde{\psi}_n = \int\limits_0^T \int\limits_0^l \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2} \psi dxdt.$$

Замечание 7. Если в задаче (37)–(40), (13) коэффициент диффузии u неизвестен лишь на одной из областей Ω_i, $i = 1, 2$, $\Omega_1 = (0, \xi)$, $\Omega_2 = (\xi, l)$, то градиент $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n^i$, где $\widetilde{\psi}_n^i$ определяется соответствующим выражением (54) для конкретного значения i.

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (14), (15) определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (41), (13) направление спуска p_n и коэффициент β_n можем определить с помощью выражений (15).

Решив задачу определения функции $z(\widetilde{\psi}_n; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}, w \right) + a(\widetilde{\psi}_n; z, w) = l(w), \quad t \in (0, T),$$
$$(z, w)(0) = (y_0, w), \tag{56}$$

получим вектор AJ'_{u_n}, что позволит реализовать метод скорейшего спуска (14), (16) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (41), (13).

Определив направление спуска p_n с помощью формул (17) и решив задачу определения функции $z \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств вида (56), где вместо $\widetilde{\psi}_n$ используем p_n, получим вектор $Ap_n = \{z_i(p_n)\}_{i=1}^N = \{z(p_n; d_i, t)\}_{i=1}^N$. Это позволит реализовать метод сопряженных градиентов (14), (17) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (41), (13).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ СКОРОСТИ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА

Пусть на области Ω_T определено параболическое уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial y}{\partial x} - uy \right) + \widetilde{f}\,. \tag{57}$$

На концах отрезка $[0, l]$ заданы краевые условия

$$-\left(k\,\frac{\partial y}{\partial x} - uy \right) = \beta_1, \quad x = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$k\,\frac{\partial y}{\partial x} - uy = -\,\alpha y + \beta, \quad x = l, \quad t \in (0, T), \tag{58}$$

где β, β_1, α известны, $\alpha = \mathrm{const} > 0$.

В точке $x = \xi$ заданы условия неидеального контакта

$$\left[k\,\frac{\partial y}{\partial x} - uy \right] = 0, \quad t \in (0, T), \quad \left\{ k\,\frac{\partial y}{\partial x} - uy \right\}^{\pm} = r[\,y], \quad t \in (0, T). \tag{59}$$

При $t = 0$ имеем начальное условие

$$y = y_0, \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2\,. \tag{60}$$

Предполагаем, что в N точках $d_i \in \Omega$ известны значения решения начально-краевой задачи (57)–(60), заданные равенствами (7).

Задача (57)–(60), (7) состоит в нахождении вектора $u = (u_1, u_2) \in \mathrm{U} = R^2$, при котором решение $y = y(u) = y(u; x, t)$ начально-краевой задачи (57)–(60) удовлетворяет равенствам (7).

Определение 9. Обобщенным решением начально-краевой задачи (57)–(60) называется функция $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}, w \right) + a\,(u;\, y, w) = l\,(w), \quad t \in (0, T), \tag{61}$$

$$(\,y, w)(0) = (\,y_0, w), \tag{62}$$

где пространства $W(0, T)$, V_0 определены в разд. 1, а форма $l\,(w)$ — в разд. 2,

$$a\,(u;\, y, w) = \int\limits_0^l \left(k\,\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} - uy\,\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + r[\,y][w] + \alpha y\big|_{x = l}\; w(l).$$

На основании задачи (57)–(60), пренебрегая членами второго порядка малости, для приращения $\theta = \Delta y$ решения $y = y(u)$ задачи (57)–(60), соответствующего приращению Δu, получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial \theta}{\partial x} - u\theta \right) - \Delta u\,\frac{\partial y(u)}{\partial x}, \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

$$-\left(k\,\frac{\partial \theta}{\partial x} - u\theta \right) = -\,\Delta u\; y(u), \quad x = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$k\,\frac{\partial \theta}{\partial x} - u\theta = -\,\alpha\theta + \Delta u\; y(u), \quad x = l, \quad t \in (0, T), \tag{63}$$

$$\left[k\,\frac{\partial\theta}{\partial x} - u\theta \right] = [\Delta u\, y], \quad x = \xi, \quad t \in (0, T),$$

$$\left\{ k\,\frac{\partial\theta}{\partial x} - u\theta \right\}^{\pm} = r[\theta] + \{\Delta u\, y\}^{\pm}, \quad x = \xi, \quad t \in (0, T), \ \theta|_{t=0} = 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Определение 10. Обобщенным решением начально-краевой задачи (63) называется функция $\theta(x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}, w \right) + a\,(u; \theta, w) = l_\theta(\Delta u; w), \quad t \in (0, T),$$

$$(\theta, w)(0) = 0, \tag{64}$$

где $\quad l_\theta(\Delta u; w) = l_\theta^1(\Delta u; w); \qquad l_\theta^1(\Delta u; w) = -\left(\Delta u\,\frac{\partial y(u)}{\partial x}, w \right) - \{\Delta u\, y(u)\}^+ w^+ +$

$+ \{\Delta u\, y(u)\}^- w^- - \Delta u\, y(u)|_{x=0}\, w(0) + \Delta u\, y(u)|_{x=l}\, w(l).$

Замечание 8. Задачу вида (64) для приращения θ решения $y = y(u)$, соответствующего приращению Δu, можем получить на основании обобщенной задачи (61), (62), где

$$l_\theta(\Delta u; w) = l_\theta^2(\Delta u; w), \quad l_\theta^2(\Delta u; w) = \int_0^l \Delta u\, y(u)\,\frac{\partial w}{\partial x}\,dx.$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (61), (62), (13) введем в рассмотрение сопряженную начально-краевую задачу

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + u\,\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (x, t) \in \Omega_T \setminus \gamma_d,$$

$$-k\,\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$k\,\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\alpha\psi, \quad x = l, \quad t \in (0, T),$$

$$\left[k\,\frac{\partial\psi}{\partial x} \right] = 0, \quad x = \xi, \quad t \in (0, T), \tag{65}$$

$$\left\{ k\,\frac{\partial\psi}{\partial x} \right\}^{\pm} = r[\psi], \quad x = \xi, \quad t \in (0, T),$$

$$[\psi] = 0, \quad \left[k\,\frac{\partial\psi}{\partial x} \right] = -\rho_i\,(y(u_n) - f_i), \quad x = d_i, \quad t \in (0, T), \quad i = \overline{1, N},$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad x \in \overline{\Omega},$$

где $u = u_n$.

Определение 11. Обобщенным решением начально-краевой задачи (65) называется функция $\psi(x, t) \in W_d(0, T)$, которая $\#\, w(x) \in V_{d_0}$ удовлетворяет системе тождеств

$$-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}, w \right) + a_\psi(u; \psi, w) = l_\psi(w), \quad t \in (0, T), \tag{66}$$

$$(\psi, w)(T) = 0, \tag{67}$$

где форма $l_\psi(w)$ определена соответствующим выражением (21),

$$a_\psi(u; \psi, w) = \int_0^l \left(k\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} - u\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\,w \right) dx + r[\psi][w] + \alpha\psi(l, t)w(l).$$

Выбирая в тождествах (66), (67) вместо функции w разность $\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (64) получаем

$$(\bar{Y}(u_n)-\bar{f},\overline{\widetilde{Y}}(u_{n+1})-\bar{Y}(u_n))_\rho=\int_0^T\left(\frac{\partial(\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))}{\partial t},\psi\right)dt+$$

$$+\int_0^T a_\psi(u_n;\psi,\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))dt=\int_0^T l_\theta(\Delta u_n;\psi)dt, \tag{68}$$

т.е.

$$(\bar{Y}(u_n)-\bar{f},\overline{\widetilde{Y}}(u_{n+1})-\bar{Y}(u_n))_\rho=\int_0^T l_\theta(\Delta u_n;\psi)dt,$$

где $\widetilde{y}(u_{n+1})$ — решение следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial x}-u\widetilde{y}\right)+\widetilde{f}-\Delta u\frac{\partial y(u)}{\partial x},\quad x\in\Omega_T,$$

$$-\left(k\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial x}-u\widetilde{y}\right)=\beta_1-\Delta u\;y(u),\quad x=0,\quad t\in(0,T),$$

$$k\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial x}-u\widetilde{y}=-\alpha\widetilde{y}+\beta+\Delta u\;y(u),\quad x=l,\quad t\in(0,T), \tag{69}$$

$$\left[k\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial x}-u\widetilde{y}\right]=[\Delta u\;y(u)],\quad x=\xi,\quad t\in(0,T),$$

$$\left\{k\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial x}-u\widetilde{y}\right\}^{\pm}=r[\widetilde{y}]+\{\Delta u\;y(u)\}^{\pm},\quad x=\xi,\quad t\in(0,T),$$

$$\widetilde{y}=y_0,\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2,\quad t=0.$$

Определение 12. Обобщенным решением начально-краевой задачи (69) называется функция $\widetilde{y}=\widetilde{y}(u_{n+1})=\widetilde{y}(u_{n+1};x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall\, w(x)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t},w\right)+a(u;\widetilde{y},w)=l(w)-\left(\Delta u\frac{\partial y(u)}{\partial x},w\right)-\Delta u\;y(u)|_{x=0}w(0)+$$

$$+\Delta u\;y(u)|_{x=l}\,w(l)-\{\Delta u\;y(u)\}^+w^+ +\{\Delta u\;y(u)\}^-w^-,\quad t\in(0,T), \tag{70}$$

$$(\widetilde{y},w)(0)=(y_0,w),$$

где $u=u_n$.

Следовательно, если $l_\theta(\Delta u_n;w)=l_\theta^1(\Delta u_n;w)$, то

$$J'_{u_n}\Leftrightarrow\widetilde{\psi}_n, \tag{71}$$

где

$$\widetilde{\psi}_n=(\widetilde{\psi}_n^1,\widetilde{\psi}_n^2),\quad \widetilde{\psi}_n^1=-\int_0^T\int_0^\xi\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\psi\,dxdt-$$

$$-\int_0^T y(u_n)|_{x=0}\,\psi(0,t)dt+\int_0^T\{y(u_n)\}^-\psi^-dt,$$

$$\widetilde{\psi}_n^2 = -\int_0^T \int_\xi^l \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \, dxdt + \int_0^T y(u_n)|_{x=l} \, \psi(l, t) dt - \int_0^T \{y(u_n)\}^+ \psi^+ \, dt.$$

Если $l_\theta(\Delta u_n; w) = l_\theta^2(\Delta u_n; w)$, то

$$\widetilde{\psi}_n^1 = \int_0^T \int_0^\xi y(u_n) \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dxdt, \quad \widetilde{\psi}_n^2 = \int_0^T \int_\xi^l y(u_n) \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dxdt.$$

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (14), (15) определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (61), (62), (13) направление спуска p_n и коэффициент β_n можем определить с помощью выражений (71).

Решив задачу определения функции $z(\widetilde{\psi}_n; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}, w\right) + a(\widetilde{\psi}_n; z, w) = l(w), \quad t \in (0, T),$$

$$(z, w)(0) = (y_0, w), \tag{72}$$

получим вектор AJ'_{u_n}, что позволит реализовать метод скорейшего спуска (14), (16) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (61), (62), (13).

Определив направление спуска p_n с помощью формул (17) и решив задачу определения функции $z \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств вида (72), где вместо вектора $\widetilde{\psi}_n$ использован вектор p_n, получим вектор $Ap_n = \{z_i(p_n)\}_{i=1}^N = \{z(p_n; d_i, t)\}_{i=1}^N$. Это позволит реализовать метод сопряженных градиентов (14), (17) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (61), (62), (13).

4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРА СЛАБОПРОНИЦАЕМОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

Пусть на области Ω_T определено параболическое уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial y}{\partial x} - vy\right) + \widetilde{f}. \tag{73}$$

На концах отрезка $[0, l]$ заданы краевые условия

$$-\left(k \frac{\partial y}{\partial x} - vy\right) = \beta_1, \quad x = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$k \frac{\partial y}{\partial x} - vy = -\alpha y + \beta, \quad x = l, \quad t \in (0, T). \tag{74}$$

В точке $x = \xi$ условия сопряжения имеют вид

$$\left[k \frac{\partial y}{\partial x} - vy\right] = 0, \quad \left\{k \frac{\partial y}{\partial x} - vy\right\}^{\pm} = u[y]. \tag{75}$$

При $t = 0$ задано начальное условие

$$y|_{t=0} = y_0, \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{76}$$

Предполагаем, что в N точках $d_i \in \Omega$ известны значения решения начально-краевой задачи (73)–(76), заданные равенствами (7).

Задача (73)–(76), (7) состоит в определении параметра $u \in \mathrm{U} = C_+([0, T]) =$

$= \{v(t) \in C([0, T]) : v > 0\}$, при котором решение $y = y(u) = y(u; x, t)$ начально-краевой задачи (73)–(76) удовлетворяет равенствам (7).

Определение 13. При каждом фиксированном $u \in \mathrm{U}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (73)–(76) называется функция $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}, w\right) + a(u; y, w) = l(w), \quad t \in (0, T),$$

$$(y, w)(0) = (y_0, w), \tag{77}$$

где форма $l(w)$ определена в разд. 3,

$$a(u; y, w) = \int_0^l \left(k \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} - vy \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + u[y][w] + \alpha y|_{x=l}\; w(l).$$

На основании задачи (73)–(76), пренебрегая членами второго порядка малости, для прищения $\theta = \Delta y$ решения этой задачи, соответствующего приращению Δu, получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \theta}{\partial x} - v\,\theta \right), \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

$$-\left(k\frac{\partial \theta}{\partial x} - v\,\theta \right) = 0, \quad x = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$k\frac{\partial \theta}{\partial x} - v\,\theta = -\alpha\theta, \quad x = l, \quad t \in (0, T), \tag{78}$$

$$\left[k\frac{\partial \theta}{\partial x} - v\,\theta \right] = 0, \quad x = \xi, \quad t \in (0, T),$$

$$\left\{ k\frac{\partial\, \theta}{\partial x} - v\theta \right\}^{\pm} = u[\theta] + \Delta u[y], \quad x = \xi, \quad t \in (0, T), \; \theta|_{t=0} = 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Определение 14. Обобщенным решением начально-краевой задачи (78) называется функция $\theta(x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}, w\right) + a(u; \theta, w) = l_\theta(\Delta u; w), \quad t \in (0, T),$$

$$(\theta, w)(0) = 0, \tag{79}$$

где $l_\theta(\Delta u; w) = -\Delta u[y][w]$.

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (77), (13) введем в рассмотрение сопряженную начально-краевую задачу

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + v\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, t) \in \Omega_T \setminus \gamma_d,$$

$$-k\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$k\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\alpha\psi, \quad x = l, \quad t \in (0, T),$$

$$\left[k\frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = 0, \quad x = \xi, \quad t \in (0, T), \tag{80}$$

$$\left\{ k\frac{\partial \psi}{\partial x} \right\}^{\pm} = u[\psi], \quad x = \xi, \quad t \in (0, T),$$

$$[\psi]=0, \quad \left[k\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]=-\rho_i(y(u_n)-f_i), \quad x=d_i, \quad i=\overline{1, N}, \quad t\in(0,T),$$

$$\psi|_{t=T}=0, \quad x\in\overline{\Omega},$$

где $u=u_n$.

Определение 15. Обобщенным решением начально-краевой задачи (80) называется функция $\psi(x,t)\in W_d(0,T)$, которая # $w(x)\in V_{d_0}$ удовлетворяет системе тождеств

$$-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}, w\right)+a_\psi(u;\psi,w)=l_\psi(w), \quad t\in(0,T),$$
$$(\psi,w)(T)=0, \tag{81}$$

где форма $l_\psi(w)$ определена соответствующим выражением (21),

$$a_\psi(u;\psi,w)=\int_0^l\left(k\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}-v\frac{\partial\psi}{\partial x}w\right)dx+u[\psi][w]+\alpha\psi(l,t)w(l). \tag{82}$$

Выбирая в тождествах (81) вместо функции w разность $\tilde y(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (79) получаем

$$(\bar Y(u_n)-\bar f, \overline{\tilde Y}(u_{n+1})-\bar Y(u_n))_\rho=\int_0^T l_\theta(\Delta u;\psi)dt, \tag{83}$$

где функция $\tilde y(u_{n+1})$ определяется как решение следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial\tilde y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\tilde y}{\partial x}-v\tilde y\right)+\tilde f, \quad x\in\Omega_T,$$

$$-\left(k\frac{\partial\tilde y}{\partial x}-v\tilde y\right)=\beta_1, \quad x=0, \quad t\in(0,T),$$

$$k\frac{\partial\tilde y}{\partial x}-v\tilde y=-\alpha\tilde y+\beta, \quad x=l, \quad t\in(0,T),$$

$$\left[k\frac{\partial\tilde y}{\partial x}-v\tilde y\right]=0, \quad x=\xi, \quad t\in(0,T), \tag{84}$$

$$\left\{k\frac{\partial\tilde y}{\partial x}-v\tilde y\right\}^{\pm}=u[\tilde y]+\Delta u[y(u)], \quad x=\xi, \quad t\in(0,T),$$

$$\tilde y|_{t=0}=y_0, \quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2.$$

Определение 16. Обобщенным решением начально-краевой задачи (84) называется функция $\tilde y\in W(0,T)$, которая $\forall\, w(x)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$\left(\frac{\partial\tilde y}{\partial t}, w\right)+a(u_n;\tilde y,w)=l(w)-\Delta u_n[y(u_n)][w], \quad t\in(0,T),$$
$$(\tilde y,w)(0)=(y_0,w). \tag{85}$$

Следовательно,

$$J_{u_n}'\Leftrightarrow\tilde\psi_n, \tag{86}$$

где $\tilde\psi_n=-[y(u_n)][\psi]$, $\rceil J_{u_n}'\rceil^2\approx\int_0^T\tilde\psi_n^2dt$.

Замечание 9. Если $U = R_+$, то $\widetilde{\psi}_n = -\int\limits_0^T [y(u_n)][\psi]dt$, $\|J'_{u_n}\|^2 \approx \widetilde{\psi}_n^2$.

Таким образом, наличие градиента J'_{u_n} (86) позволяет реализовать указанные ранее градиентные методы для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in U$ задачи (77), (13).

5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Пусть на области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ $(\Omega = (0, l))$ определено уравнение

$$u_1(x)\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_2(x, t)\frac{\partial y}{\partial x} - u_3(x, t)\, y\right) + u_4(x, t). \tag{87}$$

На концах отрезка $[0, l]$ заданы краевые условия Дирихле

$$y(0, t) = \varphi_1(t), \quad y(l, t) = \varphi_2(t), \quad t \in (0, T), \tag{88}$$

а при $t = 0$ — начальное условие

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{89}$$

Полагаем, что в N точках $d_i \in \Omega$ известны значения решения начально-краевой задачи (87)–(89), заданные равенствами (7).

Задача (87)–(89), (7) состоит в нахождении вектора $u = \{u_i\}_{i=1}^4 \in U = C_+(\overline{\Omega}) \times (C_+(\overline{\Omega}_T) \,|\, C^{1,0}(\Omega_T)) \times (C(\overline{\Omega}_T) \,|\, C^{1,0}(\Omega_T)) \times C(\Omega_T)$, при котором решение $y = y(u) = y(u; x, t)$ начально-краевой задачи (87)–(89) удовлетворяет равенствам (7).

Вместо классического решения начально-краевой задачи (87)–(89) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 17. При каждом фиксированном $u \in U$ обобщенным решением начально-краевой задачи (87)–(89) называется функция $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$\left(u_1\frac{\partial y}{\partial t}, w\right) + a(u; y, w) = l(u; w), \quad t \in (0, T),$$

$$y|_{t=0} = y_0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{90}$$

где

$$W(0, T) = \left\{ v(x, t) \in L^2(0, T; V) : \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; L_2(\Omega)) \right\},$$

$$V = \{ v \in \overline{V} : v(0, t) = \varphi_1, \ v(l, t) = \varphi_2, \ t \in (0, T) \},$$

$$\overline{V} = \{ v(x, t) : v \in W_2^1(\Omega), \ t \in (0, T) \}, \ V_0 = \{ v(x) \in W_2^1(\Omega) : v(0) = v(l) = 0 \},$$

$$a(u; y, w) = \int\limits_0^l \left(u_2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} - u_3\, y\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx, \ l(u; w) = (u_4, w).$$

На основании задачи (90), пренебрегая членами второго порядка малости, для приращения $\theta = \Delta y$ решения $y(u)$ задачи (90), соответствующего приращению Δu вектора u, получаем следующую задачу в слабой постановке: найти функцию $\theta \in W_0(0, T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(u_1\frac{\partial \theta}{\partial t}, w\right) + a(u; \theta, w) = l_\theta(\Delta u; w), \quad t \in (0, T),$$

$$\theta\big|_{t=0}=0, \quad x\in\overline{\Omega}, \tag{91}$$

где

$$l_\theta(\Delta u; w)=l_\theta^1(\Delta u; w), \quad W_0(0,T)=\{v(x,t)\in L^2(0,T;V^0):$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}\in L^2(0,T;L_2(\Omega))\}, \quad V^0=\{v\in\overline{V}: v(0,t)=v(l,t)=0, \ t\in(0,T)\},$$

$$l_\theta^1(\Delta u; w)=-\left(\Delta u_1\frac{\partial y(u)}{\partial t}, w\right)-a(\Delta u; y(u), w)+(\Delta u_4, w). \tag{92}$$

Замечание 10. Если $u_2, u_3=\mathrm{const}$, то на основании начально-краевой задачи (87)–(89) для приращения $\theta=\Delta y$ можем получить задачу (91), где $l_\theta(\Delta u; w)=l_\theta^2(\Delta u; w)$, $\quad l_\theta^2(\Delta u; w)=\Delta u_2\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}, w\right)-\Delta u_3\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}, w\right)-\left(\Delta u_1\dfrac{\partial y}{\partial t}, w\right)+$ $+(\Delta u_4, w)$.

Для каждого приближения u_n решения $u\in \mathrm{U}$ задачи (90), (13) введем в рассмотрение сопряженную начально-краевую задачу

$$-u_1\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+u_3\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (x,t)\in\Omega_T\setminus\gamma_d,$$

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0, \quad t\in(0,T), \tag{93}$$

$$[\psi]=0, \quad \left[u_2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]=-\rho_i(y(u_n)-f_i), \quad x=d_i, \quad i=\overline{1,N}, \quad t\in(0,T),$$

$$\psi\big|_{t=T}=0, \quad x\in\overline{\Omega},$$

где $u=u_n=\{u_{in}\}_{i=1}^3$.

Определение 18. Обобщенным решением начально-краевой задачи (93) называется функция $\psi(x,t)\in W_d(0,T)$, которая $\forall\, w(x)\in V_{d_0}$ удовлетворяет равенствам

$$-\left(u_1\frac{\partial\psi}{\partial t}, w\right)+a_\psi(u;\psi,w)=l_\psi(w), \quad t\in(0,T),$$

$$\psi\big|_{t=T}=0, \quad x\in\overline{\Omega}, \tag{94}$$

где форма $l_\psi(w)$ определена соответствующим выражением (21),

$$a_\psi(u;\psi,w)=\int_0^l\left(u_2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}-u_3\frac{\partial\psi}{\partial x}w\right)dx.$$

Выбирая в равенствах (94) вместо функции w разность $\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (91) получаем

$$(\overline{Y}(u_n)-\bar{f}, \overline{\widetilde{Y}}(u_{n+1})-\overline{Y}(u_n))_\rho=\int_0^T\left(u_1\frac{\partial(\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))}{\partial t}, \psi\right)dt+$$

$$+\int_0^T a_\psi(u;\psi,\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))dt=\int_0^T\left(u_1\frac{\partial(\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))}{\partial t}, \psi\right)dt+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\left(u_2\frac{\partial(\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}-u_3(\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dxdt=$$

$$= \int_0^T l_\theta(\Delta u_n; \psi)dt, \tag{95}$$

где на каждом шаге итерационного процесса определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathrm{U}$ задачи (90), (13) в равенствах (95) используем функцию $\tilde{y} \in W(0,T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(u_{1n} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}, w \right) + a(u_n; \tilde{y}, w) = l(y_n, \Delta u_n; w), \quad t \in (0,T), \tag{96}$$

$$\tilde{y}|_{t=0} = y_0, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{97}$$

Здесь

$$\tilde{y} = \tilde{y}(u_{n+1}), \quad u = u_n = \{u_{in}\}_{i=1}^4, \quad y_n = y(u_n),$$

$$l(y_n, \Delta u_n; w) = -\left(\Delta u_{1n} \frac{\partial y_n}{\partial t}, w \right) - a(\Delta u_n; y_n, w) + (u_{4n}, w) + (\Delta u_{4n}, w). \tag{98}$$

Замечание 11. Если в задаче (90), (13) $u_1, u_2 = \mathrm{const}$, правую часть равенства (96) на основании начально-краевой задачи (87)–(89) можем представить следующим образом:

$$l(y_n, \Delta u_n; w) = -\left(\Delta u_{1n} \frac{\partial y_n}{\partial t}, w \right) + \Delta u_{2n} \left(\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}, w \right) -$$

$$- \Delta u_{3n} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x}, w \right) + (u_{4n}, w) + (\Delta u_{4n}, w). \tag{98'}$$

Пусть $u_n + \Delta u_n \in \mathrm{U}$. Тогда $\forall\, \lambda \in (0,1)$ $u_n + \lambda \Delta u_n \in \mathrm{U}$. На основании задач (90), (96), (97) получаем

$$y(u_{n+1} + \lambda \Delta u_n) \Leftrightarrow y(u_n) + \lambda\, \tilde{y}_0(\Delta u_n), \tag{99}$$

где $\tilde{y}_0(\Delta u_n)$ — решение задачи, состоящей в нахождении функции $\tilde{y}_0(\Delta u_n) = \tilde{y}_0 \in W_0(0,T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(u_{1n} \frac{\partial \tilde{y}_0}{\partial t}, w \right) + a(u_n; \tilde{y}_0, w) = l_\theta(\Delta u_n; w), \quad t \in (0,T),$$

$$\tilde{y}_0|_{t=0} = 0, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{100}$$

Следовательно,

$$\overline{Y}(u_n + \lambda \Delta u_n) - \overline{Y}(u_n) \Leftrightarrow \lambda(\tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)). \tag{101}$$

Тогда

$$|\, J'_{u_n}, \Delta u_n| \Leftrightarrow (\overline{Y}(u_n) - \bar{f}, \overline{\tilde{Y}\ (u_{n+1}) - \overline{Y}(u_n)})_\rho. \tag{102}$$

Учитывая (95), (99), (101), на основании (102) получаем

$$J'_{u_n} \Leftrightarrow \tilde{\psi}_n, \tag{103}$$

где $\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^3$, $\tilde{\psi}_n^1 = -\int_0^T \frac{\partial y_n}{\partial t} \psi dt|_\Omega$, $\tilde{\psi}_n^2 = -\frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}\Big|_{\Omega_T}$, $\tilde{\psi}_n^3 = y_n \frac{\partial \psi}{\partial x}\Big|_{\Omega_T}$,

$\tilde{\psi}_n^4 = \psi|_{\Omega_T}$, $||\, J'_{u_n}||^2 = \int_0^l (\tilde{\psi}_n^1)^2 dx + \sum_{i=2}^4 \int_0^T \int_0^l (\tilde{\psi}_n^i)^2 dxdt.$

Замечание 12. Если $u_2, u_3 = \mathrm{const}$, то $\widetilde{\psi}_n^2 = -\int\limits_0^T \int\limits_0^l \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dxdt$, $\widetilde{\psi}_n^3 = \int\limits_0^T \int\limits_0^l y_n \frac{\partial \psi}{\partial x} dxdt$, $\rceil J_{u_n}{}' \rceil^2 = \int\limits_0^l (\widetilde{\psi}_n^1)^2 dx + \int\limits_0^T \int\limits_0^l (\psi)^2 dxdt + \sum\limits_{i=2}^3 (\widetilde{\psi}_n^i)^2$ или, с учетом (98′), имеем $\widetilde{\psi}_n^2 = \int\limits_0^T \left(\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}, \psi \right) dt$, $\widetilde{\psi}_n^3 = -\int\limits_0^T \left(\frac{\partial}{\partial x} y_n, \psi \right) dt$, где $y_n = y(u_n) = y(u_n; x, t)$.

6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим задачу идентификации параметров (87)–(89), (13). Предположим, что $u \in H_m = H_m^1 \times H_m^2 \times H_m^3 \times H_m^4$, где $\{\varphi_i^j(x, t)\}_{i=1}^{m_j}$ — системы линейно независимых функций множеств H_m^j, $m = \sum\limits_{j=1}^4 m_j$. Функции множеств H_m^j представляются в виде

$$u_{jm} = \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i^j \varphi_i^j, \tag{104}$$

где $u \in \mathrm{U} = R_+^{m_1} \times R_+^{m_2} \times R^{m_3} \times R^{m_4}$; $u_{1m}, u_{2m} > 0$.

С учетом (104) система (87)–(89) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i^1 \varphi_i^1(x) \frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m_2} \alpha_i^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_i^2(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m_3} \alpha_i^3 \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_i^3(x, t) y) = \sum_{i=1}^{m_4} \alpha_i^4 \varphi_i^4(x, t),$$

$$y(0, t) = \varphi_1(t), \quad y(l, t) = \varphi_2(t), \quad t \in (0, T),$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{105}$$

Учитывая (104), (105), слагаемые первого равенства системы (91) запишем следующим образом:

$$\left(u_1 \frac{\partial \theta}{\partial t}, w \right) = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_{in}^1 \left(\varphi_i^1 \frac{\partial \theta}{\partial t}, w \right),$$

$$a(u, \theta; w) = \int_0^l \left(\sum_{i=1}^{m_2} \alpha_{in}^2 \varphi_i^2(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \sum_{i=1}^{m_3} \alpha_{in}^3 \varphi_i^3(x, t)\, y \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx,$$

$$l_\theta(\Delta u; w) = l_\theta^1(\Delta u; w),$$

$$l_\theta^1(\Delta u; w) = -\sum_{i=1}^{m_1} \Delta\alpha_{in}^1 \left(\varphi_i^1 \frac{\partial y(u)}{\partial t}, w \right) - \sum_{i=1}^{m_2} \Delta\alpha_{in}^2 \int_0^l \varphi_i^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m_3} \Delta\alpha_{in}^3 \int_0^l \varphi_i^3\, y \frac{\partial w}{\partial x} dx + \sum_{i=1}^{m_4} \Delta\alpha_{in}^4 (\varphi_i^4, w). \tag{106}$$

С учетом (106) вектор $\widetilde{\psi}_n$ (103) принимает вид

$$\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^j\}_{j=1}^4, \quad \widetilde{\psi}_n^j = \{\widetilde{\psi}_{in}^j\}_{i=1}^{m_j}, \quad j=\overline{1,4}, \quad \widetilde{\psi}_{in}^1 = -\int_0^T \left(\varphi_i^1 \frac{\partial y(u_n)}{\partial t}, \psi\right) dt,$$

$$\widetilde{\psi}_{in}^2 = -\int_0^T \left(\varphi_i^2 \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt, \quad \widetilde{\psi}_{in}^3 = \int_0^T \left(\varphi_i^3 \; y(u_n), \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt,$$

$$\widetilde{\psi}_{in}^4 = \int_0^T (\varphi_i^4, w) dt. \tag{107}$$

В этом случае $\| J'_{u_n} \|^2 = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{m_j} (\widetilde{\psi}_{in}^j)^2$.

Замечание 13. С учетом (98′), (105) для правой части первого равенства системы (91) получаем $l_\theta(\Delta u; w) = l_\theta^2(\Delta u; w)$, где

$$l_\theta^2(\Delta u; w) = -\sum_{i=1}^{m_1} \Delta\alpha_{in}^1 \left(\varphi_i^1 \frac{\partial y_n}{\partial t}, w\right) + \sum_{i=1}^{m_2} \Delta\alpha_{in}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_i^2 \frac{\partial y_n}{\partial x}\right), w\right) -$$

$$-\sum_{i=1}^{m_3} \Delta\alpha_{in}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_i^3 y_n), w\right) + \sum_{i=1}^{m_4} \Delta\alpha_{in}^4 (\varphi_i^4, w). \tag{108}$$

Учитывая (108), вместо (107) градиент $J'_{u_n} \Leftrightarrow \widetilde{\psi}_n$ можем записать в виде

$$\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^j\}_{j=1}^4, \quad \widetilde{\psi}_n^j = \{\widetilde{\psi}_{in}^j\}_{i=1}^{m_j}, \quad j=\overline{1,4}; \quad \widetilde{\psi}_{in}^1 = -\int_0^T \left(\varphi_i^1 \frac{\partial y_n}{\partial t}, \psi\right) dt,$$

$$\widetilde{\psi}_{in}^2 = \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_i^2 \frac{\partial y_n}{\partial x}\right), \psi\right) dt, \quad \widetilde{\psi}_{in}^3 = -\int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_i^3 \; y_n), \psi\right) dt,$$

$$\widetilde{\psi}_{in}^4 = \int_0^T (\varphi_i^4, \psi) dt, \quad \rceil J_{u_n}{}' \rceil^2 = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{m_j} (\widetilde{\psi}_{in}^j)^2.$$

Наличие градиента $J'_{u_n} \Leftrightarrow \widetilde{\psi}_n$ позволяет реализовать используемые градиентные методы идентификации параметров задачи (87)–(89), (13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение граничных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4. — С. 49–73.
2. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Там же. — 2007. — № 5. — С. 48–71.
3. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач для псевдопараболических многокомпонентных распределенных систем // Пробл. управления и информатики. — 2007. — № 4. — С. 33–58.
4. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач для гиперболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 2. — С. 55–80.
5. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач для псевдогиперболических многокомпонентных распределенных систем // Пробл. управления и информатики. — 2008. — № 1. — С. 54–78.

6. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
7. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. — New York: Kluwer Acad. Publ., 2005. — 400 p.
8. Дейнека В.С. Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2005. — 364 с.

Поступила 18.09.2008