УДК 519.217; 519.718

Т.О. ЛУКАШИВ, И.В. ЮРЧЕНКО, В.К. ЯСИНСКИЙ

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ИТО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ С ИМПУЛЬСНЫМИ МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ. I. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ключевые слова: *стохастическая динамическая система, автономная система, марковские переключения, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость, устойчивость по вероятности, асимптотическая устойчивость по вероятности, p-устойчивость*.

Первоначальные исследования устойчивости вероятности систем в различных постановках отражены в работах [1–5]. Однако оригинальный подход к задачам устойчивости систем со случайными параметрами впервые был предложен в [6]. Этот подход, по-видимому, позволил использовать для стохастических уравнений основные результаты классической теории устойчивости, современные методы исследования неслучайных систем, и в результате удалось установить ряд характерных свойств вероятностных систем.

В этом направлении работали видные математики XX столетия Р.З. Хасьминский [7], В.С. Королюк [8], И.И. Гихман, А.В. Скороход [9], Г.Дж. Кушнер, В.М. Константинов, Е.Ф. Царьков [10, 11], В.В. Калашников, А.М. Самойленко [12] и др.

Во всех упомянутых работах рассматривалась в основном устойчивость вероятностных процессов с непрерывными фазовыми траекториями либо реальных объектов, описываемых обобщенными стохастическими уравнениями Ито–Скорохода.

В монографии И.Я. Каца [13] описана модель стохастических уравнений с марковскими параметрами, так называемых уравнений со случайной структурой, позволяющих рассматривать устойчивость систем с разрывными фазовыми траекториями. Такая ситуация естественным образом возникает при описании многочисленных физико-технических процессов.

При этом следует обратить внимание, что анализ вероятностных процессов с разрывными фазовыми траекториями не слишком усложняет теорию стохастической устойчивости, поскольку при этих исследованиях сохраняется свойство стохастической непрерывности реализации [13].

В монографии Е.Ф. Царькова, М.Л. Свердана [10] рассмотрена устойчивость разностных и динамических систем с учетом марковских параметров и импульсных марковских переключений. В данной статье обобщены результаты монографий [10] и [13], а именно, рассмотрено стохастическое диффузионное уравнение с учетом марковских параметров, обусловливающих внутреннее изменение структуры системы с сохранениями свойства стохастической непрерывности реализации по И.Я. Кацу, а также учитываются импульсные марковские переключения в случайные моменты времени по Е.Ф. Царькову.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}\} \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq 0\})$ — вероятностный базис [14]; $\{\xi(t), t \geq 0\}$ — феллеровский марковский процесс со значениями в метрическом пространстве $\boldsymbol{Y}$ с переходной вероятностью $\boldsymbol{P}(s, y, t)$; $(\eta_k, k \geq 0)$ — феллеровская цепь Маркова со значениями в метрическом пространстве $\boldsymbol{H}$ с переходной вероятностью на k-м шаге $\boldsymbol{P}_k(h, G)$ [15].

Учитывая положения вероятностной теории устойчивости, следуя А.М. Ляпунову [13, 16], будем рассматривать стохастические уравнения возмущенного движения диффузионного типа и исследовать вопрос об устойчивости тривиального решения.

Анализируем уравнение возмущенного движения, которое будем трактовать как динамическую систему случайной структуры

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t))dt + b(t, \xi(t), x(t))dw(t) \tag{1}$$

с импульсным воздействием

$$\Delta x(t)\big|_{t=t_k} = g(t_k -, \xi(t_k -), \eta_k, x(t_k -)), \ t_k \in S \equiv \{t_n, n \in \boldsymbol{N}\}, \ \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty, \tag{2}$$

и с начальными условиями

$$\xi(t_0) = y \in \boldsymbol{Y}, \ x(t_0) = x_0 \in \boldsymbol{R}^m, \ \eta_{k_0} = h. \tag{3}$$

Предположим, что заданы:

i) измеримые по совокупности переменных отображения $a: \boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{Y} \times \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$; $b: \boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$; $g: \boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ по последнему аргументу удовлетворяют условию Липшица равномерно по всем другим аргументам:

$$\begin{gathered}\left|a(t, y, x^{(1)}) - a(t, y, x^{(2)})\right| + \left|b(t, y, x^{(1)}) - b(t, y, x^{(2)})\right| + \\ + \left|g(t, y, h, x^{(1)}) - g(t, y, h, x^{(2)})\right| \leq \Lambda \left|x^{(1)} - x^{(2)}\right|\end{gathered} \tag{4}$$

$\forall t \geq 0, y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}$, и условие

$$\left|a(t, y, 0)\right| + \left|b(t, y, 0)\right| + \left|g(t, y, h, 0)\right| = c < \infty, \ t \geq 0, \ y \in \boldsymbol{Y}, \ h \in \boldsymbol{H}; \tag{5}$$

ii) $w(t) \equiv w(t, \omega) \in \boldsymbol{R}^1$ — одномерный стандартный винеровский процесс [15].

Определение 1. Случайный процесс $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \boldsymbol{R}^m$ назовем сильным решением задачи Коши (1), (3) с импульсным воздействием (2), если $x(t)$ согласован с потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\} \subset \mathcal{F}$ и при $t \geq t_0 \geq 0$ удовлетворяет стохастическому интегральному уравнению

$$x(t) = x(s) + \int_s^t a(\tau, \xi(\tau), x(\tau))d\tau + \int_s^t b(\tau, \xi(\tau), x(\tau))dw(\tau) \tag{6}$$

при всех $s \in [t_k, t_{k+1})$; $t \in (s, t_{k+1})$, $t_k \geq t$; при этом

$$x(t_k) = x(t_k -) + g(t_k -, \xi(t_k -), \eta_k, x(t_k -)) \tag{7}$$

при всех $t_k \geq t_0$ и $k \geq \inf\{n : t_n \geq t_0\}$.

Понятно, что наложенные выше ограничения на a, b и g гарантируют существование сильного решения задачи (1)–(3) с точностью до стохастической эквивалентности при любых $t_0 \geq 0, x_0 \in \boldsymbol{R}^m$ и заданных реализациях марковского процесса $\{\xi(t), t \geq t_0\} \in \boldsymbol{Y}$ и цепи Маркова $\{\eta_\kappa, k \geq k_0\}$ [10].

Сильное решение $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \boldsymbol{R}^m$ однозначно определяется с помощью начальных данных (3), поэтому в дальнейшем будем обозначать его $x(t, t_0, x_0, y, h)$.

Случайные изменения структуры параметра $\xi(t) \in \boldsymbol{Y}$ в диффузионном стохастическом дифференциальном уравнении (1) (СДУ), как правило, [9, 10, 13], учитывают одним из следующих способов.

1. $\xi(t)\in \boldsymbol{Y}$ — чисто разрывный скалярный марковский процесс, который допускает разложение [17]

$$\begin{gathered}\boldsymbol{P}\{\xi(t+\Delta t)\in[\beta,\beta+\Delta\beta]\,|\,\xi(t)=\alpha\neq\beta\}=p(t,\alpha,\beta)\Delta\beta\,\Delta t+o(\Delta t),\\ \boldsymbol{P}\{\xi(\tau)=\alpha,\, t<\tau<t\Delta t\,|\,\xi(t)=\alpha\}=1-p(t,\alpha)\Delta t+o(\Delta t),\end{gathered} \tag{8}$$

где $\boldsymbol{P}\{\circ\,|\,\circ\}$ — условная вероятность, $o(\Delta t)$ — бесконечно малая величина высшего порядка малости относительно Δt.

2. Скалярный процесс $\xi(t)$ — однородная марковская цепь с конечным числом состояний $\boldsymbol{Y}\equiv\{y_1, y_2,\ldots, y_k\}$ и известными параметрами q_{ij}, $q_i=\sum_{j\neq i} q_{ij}$, при этом

$$\begin{gathered}\boldsymbol{P}\{\xi(t+\Delta t)=y_j\,|\,\xi(t)=y_i\}=q_{ij}\Delta t+o(\Delta t),\\ \boldsymbol{P}\{\xi(\tau)=y_i,\, t<\tau<t+\Delta t\,|\,\xi(t)=y_i\}=1-q_i\Delta t+o(\Delta t).\end{gathered} \tag{9}$$

3. В момент τ изменения структуры системы $y_i\to y_j$ происходит случайное скачкообразное изменение фазового вектора $x(\tau-0)=x$, $x(\tau)=z$, для которого задана условная плотность $p_{ij}(\tau,z)$:

$$\boldsymbol{P}\{x(\tau)\in[z,z+dz]\,|\,x(t-0)=x\}=p_{ij}(\tau,z/x)dz+o(dz)).$$

В исследовании на устойчивость СДУ (1) с параметром $\xi(t)$ И.Я. Кац [13] предполагал, что условная плотность распределения скачков фазового вектора $p_{ij}(\tau,z/x)$ непрерывна по τ и имеет компактный носитель, удовлетворяющий условиям $h_1|x|\le|z|\le h_2|x|$; $0<h_1<h_2$; $p_{ij}(\tau,z/o)=o(z)$. Эти условия исключают попадания процесса $x(t)$ в результате скачка в точку $x=0$. Если же в некоторый момент t^* имеем $x(t^*)=0$, то с вероятностью 1 $x(t)\equiv 0$ при всех $t>t_0$.

Обсудим сначала первую особенность, возникающую при моделировании системы (1), которая подвергается внутренним (параметрическим) возмущениям $\xi(t)$ [13], т.е. (1) с начальными данными $\xi(t_0)=y\in\boldsymbol{Y}$, $x(t_0)=x_0$ (без учета импульсных воздействий (2)).

Предположим для упрощения, что $\xi(t)$ — простая марковская цепь с конечным числом состояний, т.е. $\boldsymbol{Y}\equiv\{y_1, y_2,\ldots, y_k\}$ (способ 2). Это означает почти кусочную постоянность всех реализаций $\xi(t)$, а переходы — переключение системы в случайные моменты времени. Тогда на случайном интервале $t\in[\tau-h,\tau]$, где $\xi(t)=y_i\in\boldsymbol{Y}$, движение будет происходить в силу СДУ (1) для $t\in[\tau-h,\tau]$:

$$dx(t)=a(t,x(t),y_i)dt+b(t,x(t),y_i)dw(t), \tag{10}$$

$$x(\tau-h)=x;\quad y(\tau-h)=y_i. \tag{11}$$

Если τ — момент перехода $\xi(\tau-0)=y_i$ к значению $\xi(\tau)=y_j\neq y_i$, то на интервале постоянства $\xi(\tau)=y_j$ следует решать СДУ уравнение (10) с y_j вместо y_i. Естественно при этом возникает проблема выбора начального условия $x(\tau)$ для нового СДУ:

$$dx(t)=a(t,x(t),y_j)dt+b(t,x(t),y_i)dw(t),\ \ t\in[\tau,\tau+h_1). \tag{12}$$

Выбор $x(\tau)$ не может определяться математическими соображениями, а полностью диктуется реальными свойствами моделируемого объекта.

Значит, уравнение (1), чисто разрывный марковский процесс $\xi(t)$ и начальное условие (3) на каждом интервале постоянства процесса $\xi(t)$ определяют марковский процесс $\{x(t),\xi(t)\}$ [15], в котором случайная составляющая $x(t)\in\boldsymbol{R}^m$ характеризует изменения вектора состояния системы, а $\xi(t)$ — случайные изменения ее структуры. Определение системы (1), как системы случайной структуры, этим и объясняется.

Наиболее интересны в большинстве случаев следующие варианты поведения траектории сильного решения СДУ (1) с начальным условием $\xi(t_0)=y\in \boldsymbol{Y}$, $x(t_0)=x_0$ без импульсного воздействия (2) [13].

B1. В момент скачкообразного изменения структуры $\xi(t)$ фазовый вектор $x(t)$ изменяется непрерывно с вероятностью 1, т.е. в момент τ изменение структуры системы

$$x(\tau-0)=x(\tau). \tag{13}$$

B2. В момент $\tau>t_0$ скачкообразного изменения структуры фазовый вектор однозначно определяется состоянием, в котором находилась система непосредственно перед изменением структуры и вызванным переходом $\xi(\tau-0)=y_i$ в $\xi(\tau)=y_j\neq y_i$.

В этом случае естественно предположить

$$x(\tau)=\varphi_{ij}(x(\tau-0)),\ i\neq j, \tag{14}$$

где $\varphi_{ij}\in C(\boldsymbol{R}^m)$, причем $\varphi_{ij}(0)=0$.

Особый интерес представляет случай линейности функций $\varphi_{ij}(x)$, тогда существуют такие матрицы A_{ij}, что

$$x(\tau)=A_{ij}x(\tau-0). \tag{15}$$

Заметим, что случай B1 (непрерывные изменения фазового вектора $x(t)\in \boldsymbol{R}^m$ с вероятностью 1) получается из (15) при $A_{ij}=E$ — единичной матрицы порядка $(m\times m)$.

B3. Наиболее общий случай возникает, когда для случайного момента τ изменения структуры системы (1) $y_i\to y_j$. Следует задать условный закон распределения начальным состоянием $x(\tau)\equiv x(\tau,\omega)\in \boldsymbol{R}^m$, $\tau\in \boldsymbol{R}_+$, $\omega\in\Omega$, для изменившейся структуры (1)

$$\boldsymbol{P}\{x(\tau)\in[z,z+dz)\,|\,x(\tau-0)=x\}=p_{ij}(\tau,z\,|x)dz+o(dz), \tag{16}$$

где $p_{ij}(\tau,z\,|x)$ обозначает условную вероятность указанного m-мерного распределения.

Замечание 1. Предполагаем, что почти все реализации процесса $x(t),\xi(t)$ непрерывны справа.

Очевидно, что случай (13), (14) получается из (16), если $p_{ij}(\tau,z\,|x)=\delta(z-x)$ или $p_{ij}(\tau,z\,|x)=\delta(z-\varphi_{ij}(x))$, где $\delta(z)$ — δ-функция Дирака [12].

Таким образом, задание системы случайной структуры предполагает:

а) СДУ (1) и начальное условие (3) $\xi(t_0)=y\in\boldsymbol{Y}$; $x(t_0)=x_0$; $\eta_{k_0}=h$;

б) вероятностные характеристики чисто разрывного процесса $\xi(t)$, определяющие случайное изменение структуры по (8) (п. 1); (9) (п. 2) или СДР с пуассоновскими возмущениями.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Пусть $\boldsymbol{P}_k((y,h),\Gamma\times G)$ — переходная вероятность цепи Маркова $\{\xi(t_k),\eta_k\}$ на k-м шаге. В соответствии с принятыми в теории марковских процессов обозначениями вероятности событий [15, 17] (связанных с этой цепью) введем индексы так, чтобы выполнялись равенства

$$\boldsymbol{P}_{y,h}^{t_k}(\xi(t_{k+1})\in\Gamma,\eta_{k+1}\in G)=\boldsymbol{P}_k((y,h),\Gamma\times G) \tag{17}$$

при всех $t_k\geq t_0$, $y\in\boldsymbol{Y}, h\in\boldsymbol{H}$ и борелевских $\Gamma\subset\boldsymbol{Y}, G\subset\boldsymbol{H}$.

Теперь введем функцию

$$\boldsymbol{P}_k((y,h,x),\Gamma\times G\times C)\equiv\boldsymbol{P}_{y,h}^{t_k}(x(t_{k+1},t_k,y,h,x)\in C,\ x(t_{k+1})\in\Gamma,\eta_{k+1}\in G), \tag{18}$$

при всех $t_k\in S\cup\{t_0\}, k\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}, x\in\boldsymbol{R}^m$, $y\in\boldsymbol{Y}, h\in\boldsymbol{H}$ и борелевских $C\in\boldsymbol{R}^m$, $\Gamma\subset\boldsymbol{Y}$, $G\subset\boldsymbol{H}$.

Определение 2. Дискретный оператор Ляпунова $lv_k(y,h,x)$ на последовательности измеримых скалярных функций $v_k(y,h,x)$: $\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^1$, $k\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}$ для СДУ (1) с импульсным воздействием (2) определяется соотношением

$$lv_k(y,h,x)\equiv\int\limits_{\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{R}^m}\boldsymbol{P}_k(y,h,x)(du\times dz\times dl)v_{k+1}(u,z,l)-v_k(y,h,x). \qquad (19)$$

Определение 3. Если $t_h=k\beta$ при всех $k\in\boldsymbol{N}$ и некотором $\beta>0$ отображения a,b и g не зависят от t, процесс $\xi(t)$ и цепь Маркова ξ_k однородные, то систему (1), (2) назовем автономной.

В случае автономной системы (1), (2) индекс k функции $\boldsymbol{P}_k((y,h,x),\Gamma\times G\times C)$ можно опустить и дискретный оператор Ляпунова определить равенством

$$lv(y,h,x)\equiv\int\limits_{\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{R}^m}\boldsymbol{P}_k(y,h,x)(du\times dz\times dl)v(u,z,l)-v(y,h,x). \qquad (20)$$

При развитии второго метода Ляпунова для СДУ с импульсным воздействием (1), (2) понадобятся специальные последовательности функций $v_k(y,h,x)$, $k\in\boldsymbol{N}$.

Определение 4. Функцией Ляпунова для системы случайной структуры (1), (2) назовем последовательность неотрицательных функций $\{v_k(y,h,x),k\geq 0\}$, если:

1) при всех $k\geq 0$, $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$, $x\in\boldsymbol{R}^m$ определено выражение (19);

2) при $r\to\infty$

$$\overline{v}(r)\equiv\inf_{\substack{k\in\boldsymbol{N},\ y\in\boldsymbol{Y},\\ h\in\boldsymbol{H},\ |x|\geq r}} v_k(y,h,x)\to\infty; \qquad (21)$$

3) при $r\to 0$

$$\underline{v}(r)\equiv\sup_{\substack{k\in\boldsymbol{N},\ y\in\boldsymbol{Y},\\ h\in\boldsymbol{H},\ |x|\leq r}} v_k(y,h,x)\to 0, \qquad (22)$$

причем $\overline{v}(r)$ и $v(r)$ непрерывны и монотонны.

Рассмотрим устойчивость тривиального решения $x\equiv 0$ системы (1), (2), т.е. $c=0$ в требовании (5), в следующих вероятностных смыслах [7, 9, 10, 11, 18, 19].

Определение 5. Систему случайной структуры (1)–(3) назовем:

• устойчивой по вероятности, если из неравенства $|x|<\delta$ следует неравенство

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{t\geq t_0}|x(t,t_0,y,h,x)|>\varepsilon_1\right\}<\varepsilon_2 \qquad (23)$$

при всех $y\in\boldsymbol{Y},h\in\boldsymbol{H}$ и $t_0\geq 0$;

• асимптотически устойчивой по вероятности, если выполнено (23) и можно указать такие $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$, что для почти всех реализаций, удовлетворяющих неравенству

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{t\geq t_0}|x(t,t_0,y,h,x)|\right\}<\delta_1,$$

имеет место соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{P}\{|x(t,t_0,y,h,x)|\}=0$$

при всех $t_0\geq 0, y\in\boldsymbol{Y},h\in\boldsymbol{H}$ и $|x|<\delta_2$;

• асимптотически стохастически устойчивой, если она устойчива по вероятности и для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta_1>0$ такое, что

$$\lim_{\tau\to\infty}\boldsymbol{P}\left\{\sup_{t\geq\tau}|x(t,t_0,y,h,x)|>\varepsilon\right\}=0 \qquad (24)$$

при всех $|x|<\delta_1$, $y\in\boldsymbol{Y},h\in\boldsymbol{H}$ и $t_0\geq 0$.

Определение 6. Систему случайной структуры (1)–(3) назовем:

• p-устойчивой (при $p>0$), если $\forall\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что из неравенства $|x|<\delta$ следует неравенство

$$\boldsymbol{E}\,|x(t,t_0,y,h,x)|^p<\varepsilon \tag{25}$$

при всех $t>t_0$, $t_0\ge 0$, $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$;

• асимптотически p-устойчивой (при $p>0$), если она p-устойчива и существует такое $\delta_1>0$, что из неравенства $|x|<\delta_1$ следует

$$\lim_{t\to\infty}\ \sup_{y\in\boldsymbol{Y},\,h\in\boldsymbol{H}}\ \boldsymbol{E}\,|x(t,t_0,y,h,x)|^p=0 \tag{26}$$

при всех $t\ge 0$.

Заметим, что при $p=2$ будем иметь устойчивость в среднем квадратичном (l.i.m) (25) и асимптотическую устойчивость в l.i.m.

Определение 7. Система случайной структуры (1)–(3) называется экспоненциально p-устойчивой при некотором $p>0$, если существует такое $\delta>0$, что из неравенства $|x|<\delta$ следует неравенство

$$\boldsymbol{E}\,|x(t,t_0,y,h,x)|^p\le M e^{-\gamma(t-t_0)}|x|^p \tag{27}$$

при некоторых $M>0$, $\gamma>0$ для $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$, $t_0\ge 0$, $t\ge t_0$.

Заметим, что при $p=2$ будем иметь экспоненциальную устойчивость в l.i.m.

Если (23), (24) или (25) выполняется для всех $x\in\boldsymbol{R}^m$, то к соответствующему названию устойчивости будем добавлять слова «в целом».

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ

Для дальнейших выкладок получим вначале оценки решения задачи (1), (2) на интервалах $[t_k,t_{k+1})$ через значения решения в точках t_k, $k\ge 0$.

Лемма 1. Пусть выполнено требования п. i) (неравенство Липшица (4) и неравенство равномерной ограниченности (5)).

Тогда при всех $k\ge 0$ для сильного решения задачи Коши (1)–(3) имеет место неравенство

$$\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t_k\le t\le t_{k+1}}|x(t)|^2\right\}\le 15(1+2\Lambda^2)[\boldsymbol{E}\,|x(t_k)|^2+2c^2(t_{k+1}-t_k)]\times$$

$$\times\exp\{5\Lambda^2((t_{k+1}-t_k)^2+4)(t_{k+1}-t_k)\}. \tag{28}$$

Доказательство. При всех $t\in[t_k,t_{k+1})$, $t_k\ge t_0$, из (6) легко записать неравенство

$$|x(t)|\le|x(t_k)|+\int_{t_k}^{t}|a(\tau,\xi(\tau),x(\tau)-a(\tau,\xi(\tau),0)|d\tau+\int_{t_k}^{t}|a(\tau,\xi(\tau),0)|d\tau+$$

$$+\int_{t_k}^{t}|b(\tau,\xi(\tau),x(\tau)-b(\tau,\xi(\tau),0)|dw(\tau)+\int_{t_k}^{t}|b(\tau,\xi(\tau),0)|dw(\tau). \tag{29}$$

Возведем в квадрат левую и правую части неравенства (29) $\left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\le n\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)$, вычислим sup от полученного выражения, запишем неравенство Коши–Буняковского для интеграла Римана и неравенство для оценки условного математического ожидания от квадрата sup интеграла Винера–Ито [14, 15] и с помощью неравенств (4), (5) получим

$$E\left\{ \sup_{t_k \le t \le t_{k+1}} |x(t)|^2 / \mathcal{F}_{t_k} \right\} \le 5[Ex^2(t_k) + 2c^2(t_{k+1} - t_k) + \Lambda^2((t_{k+1} - t_k)^2 + 4)] \times$$

$$\times \int_{t_k}^{t} E\left\{ \sup_{t_k \le \tau < 1} |x(\tau)|^2 / \mathcal{F}_{t_k} \right\} d\tau . \tag{30}$$

Применяя к (30) неравенство Гронуолла, видим, что

$$E\left\{ \sup_{t_k \le t < t_{k+1}} |x(t)|^2 / \mathcal{F}_{t_k} \right\} \le$$

$$\le 5[E\,|\,x(t_k)\,|^2 + 2c^2(t_{k+1} - t_k)]e^{5\Lambda^2((t_{k+1}-t_k)^2+4)(t_{k+1}-t_k)} . \tag{31}$$

Для $t = t_{k+1}$ сильное решение импульсной системы (1)–(3), очевидно, должно удовлетворять неравенству

$$E\{|\,x(t_{k+1})^2 / \mathcal{F}_{t_k}|\} \le 3[E\,\{|\,x(t_{k+1}-)^2 / \mathcal{F}_{t_k}|\} +$$

$$+2E\{|g(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}-)) - g(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, 0)\,|^2 / \mathcal{F}_{t_k}\} +$$

$$+2E\{|g(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, 0)\,|^2 / \mathcal{F}_{t_k}\}] \le$$

$$\le 3\left[(1 + 2\Lambda^2 E\left\{ \sup_{t_k \le t < t_{k+1}} |x(t)|^2 / \mathcal{F}_t + c^2 \right\} \right]. \tag{32}$$

Объединив два последних неравенства, получим неравенство (28) леммы 1. ■

Замечание 2. Везде далее $c = 0$, а также используем обозначение

$$k_0 \equiv \begin{cases} \sup\{k \in \boldsymbol{N} : t_k \le t_0\} & \text{при} \quad t_0 \ge t_1, \\ 0 & \text{при} \quad t \in [0, t_1). \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть:

1) $|t_{k+1} - t_k| \le \Delta,\ k \ge 0$;

2) выполнено условие Липшица (4);

3) существуют функции Ляпунова $v_k(y, h, x)$ и $a_k(y, h, x),\ k \ge 0$, такие, что в силу системы (1)–(3) имеет место неравенство

$$lv_k(y, h, x(t)) \le -a_k(y, h, x(t)). \tag{33}$$

Тогда система случайной структуры (1)–(3) асимптотически стохастически устойчива в целом.

Доказательство. Пусть F_{t_k} — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы $\xi(t)$ при всех $t \in [t_0, t_k]$ и η_n при $n \le k$. Тогда условное математическое ожидание вычислим по формуле

$$E\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1})) / \mathcal{F}_{t_k}\} =$$

$$= \int_{Y \times H \times R^m} P_k((y, h, x)(du \times dz \times dl) v_{k+1}(u, z, l)) \Big|_{\substack{y = \xi(t_k) \\ \eta = \eta_k \\ x = x(t_k)}} . \tag{34}$$

При этом по определению дискретного оператора Ляпунова $lv_k(y, h, x)$ (19) из равенства (34), учитывая (33), получим неравенство

$$E\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1})) / \mathcal{F}_{t_k}\} =$$

$$= v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) + lv_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \le \overline{v}(|x(t_k)|). \tag{35}$$

Из леммы 1 и свойств функции $\overline{v}$ следует существование условного математического ожидания левой части неравенства (35).

Теперь, используя (34), (35), запишем равенство (19) вдоль решений (1)–(3):

$$lv_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)) = \boldsymbol{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x(t_{k+1}))/\mathcal{F}_{t_k}\} - \\ - v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)) \le -a_k(\xi(t_k)) \le 0. \qquad (36)$$

Тогда при $k \ge 0$ выполняется неравенство

$$\boldsymbol{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x(t_{k+1}))/\mathcal{F}_{t_k}\} \le v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)),$$

значит, последовательность случайных величин $v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))$ образует супермартингал относительно $\mathcal{F}_{t_k}$.

Далее, вычислив математическое ожидание в неравенстве (36), просуммируем по k от $n \ge k_0$ до N полученные выражения. Очевидно, будем иметь

$$\boldsymbol{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}),\eta_{N+1},x(t_{N+1}))\} - \boldsymbol{E}\{v_N(\xi(t_N),\eta_N,x(t_N))\} =$$

$$= \sum_{k=n}^{N} \boldsymbol{E}\{lv_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))\} \le -\sum_{k=n}^{N} \boldsymbol{E}\{\alpha_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))\} \le 0. \qquad (37)$$

Поскольку случайная величина $\sup\limits_{t_k \le t < t_{k+1}} |x(t)|^2$ не зависит от событий σ-алгебры $\mathcal{F}_{t_k}$ [17, 8], то

$$\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t_k \le t < t_{k+1}} |x(t)|^2/\mathcal{F}_{t_k}\right\} = \boldsymbol{E}\left\{\sup_{t_k \le t < t_{k+1}} |x(t)|^2\right\}, \qquad (38)$$

т.е. неравенство (28) имеет место и для обычного математического ожидания

$$\boldsymbol{E}\left\{\sup_{\mathrm{t_k \le t < t_{k+1}}} |\mathrm{x(t)}|^2\right\} \le 15(1+2\Lambda^2)[\boldsymbol{E}|\mathrm{x}|^2 + 2\mathrm{c}^2\Delta]\mathrm{e}^{5\Lambda^2(\Delta^2+4)\Delta}. \qquad (28')$$

Далее имеем

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{t \ge t_0} |x(t,t_0,y,h,x)| > \varepsilon_1\right\} =$$

$$= \boldsymbol{P}\left\{\sup_{n \in N} \sup_{t_{k_0+n-1} \le t \le t_{k_0+n}} |x(t,t_0,y,h,x)| > \varepsilon_1\right\} \le$$

$$\le \boldsymbol{P}\left\{\sup_{n \in N} |x(t_{k_0+n-1},t_0,\ y,h_0,\ x)| > \varepsilon_1\right\} \le$$

$$\le \boldsymbol{P}\left\{\sup_{n \in N} v_{k_0+n-1}(\xi(t_{k_0+n-1}),\eta_{k_0+n-1},x(t_{k_0+n-1})) \ge \overline{v}(\varepsilon_1)\right\}. \qquad (39)$$

Если $\sup|x(t_k)| \ge r$, то на основании (21) должно выполняться неравенство

$$\sup_{k \ge k_0} v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k)) \ge \inf_{\substack{k \ge k_0,\ y \in \boldsymbol{Y} \\ h \in \boldsymbol{H},\ |x| \ge r}} v_k(y,h,x) = \overline{v}(r).$$

Теперь воспользуемся неравенством для неотрицательных супермартингалов [13–15]:

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{n \in N} v_{k_0+n-1}(\xi(t_{k_0+n-1}),\eta_{k_0+n-1},x(t_{k_0+n-1})) \ge \overline{v}(\varepsilon_1)\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{\overline{v}(\varepsilon_1)} v_{k_0}(y,h,x) \le \frac{v(\overline{x})}{\overline{v}(\varepsilon_1)}. \qquad (40)$$

Из (39), (40) следует неравенство (23), которое гарантирует устойчивость по вероятности в целом системы (1)–(3).

Из неравенства (37) следуют оценки

$$\boldsymbol{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x(t_{N+1}))\} \le v_{k_0}(y, h, x), \tag{41}$$

$$\sum_{k=k_0}^{N} \boldsymbol{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\} \le v_{k_0}(y, h, x) \tag{42}$$

при всех $N \ge k_0$, $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}, x \in \boldsymbol{R}^m$.

В силу того, что последовательность $\{a_k\}$, $k \ge 0$, образует функции Ляпунова, должны существовать непрерывные строго монотонные функции $\underline{a}(r)$ и $\overline{a}(r)$, равные нулю при $r = 0$ и такие, что

$$\overline{a}(x) \le a_k(y,h,x) \le \underline{a}(|x|) \tag{43}$$

для $k \in N$, $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}$ и $x \in \boldsymbol{R}^m$.

Таким образом, из сходимости ряда в левой части неравенства (42) следует сходимость ряда $\sum_{k=k_0}^{\infty} \boldsymbol{E}\{\overline{a}(|x(t_k, t_0, y, h, x)|\}$ $\forall t_0 \ge 0$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $h \in \boldsymbol{H}, x \in \boldsymbol{R}^m$. Тогда в силу непрерывности $\underline{a}(r)$ и равенства $\underline{a}(0) = 0$ имеем

$$p \lim_{k \to \infty} |x(t_k, t_0, y, h, x)| = 0. \tag{44}$$

Из (44) следует стремление к нулю по вероятности последовательности $\overline{v}(|x(t_k, t_0, y, h, x)|)$ при $k \to \infty$ для всех $t_0 \ge 0, y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}, x \in \boldsymbol{R}^m$.

Значит, из свойств функции Ляпунова заключаем, что неотрицательный супермартингал $\{v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))$ при $k \to +\infty$ стремится к нулю по вероятности при всех реализациях процесса $\xi(t) \equiv v\xi(t, \omega)$ и последовательности η_k.

Далее неотрицательный ограниченный сверху супермартингал имеет предел с вероятностью единица [15]. Используя результат леммы 1 (неравенство (28′)), получаем асимптотическую стохастическую устойчивость в целом импульсной системы (1)–(3) в силу определения 5 (см. (24)).

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1), 2) теоремы 1, а в силу системы (1)–(3) для последовательности функции Ляпунова $\{v_k\}$, $k \ge 0$, имеет место $lv_k(y, h, x) \le 0$ для $k \in N$, $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}$ и $x \in \boldsymbol{R}^m$.

Тогда импульсная система (1)–(3) устойчива по вероятности в целом.

Доказательство. При доказательстве в теореме 1 цепочки неравенств (37)–(40) существенно использовалась неположительность lv_k, а не выражение (33).

Поэтому выполнены все условия определения 5 устойчивости по вероятности в целом (23). Значит, импульсная система (1)–(3) устойчива по вероятности в целом.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы 1, причем функции Ляпунова $\{v_k\}$, $\{a_k\}$, $k \ge 0$, удовлетворяют неравенствам

$$c_1 |x|^2 \le v_k(y, h, x) \le c_2 |x|^2, \tag{45}$$

$$c_3 |x|^2 \le a_k(y, h, x) \le c_4 |x|^2 \tag{46}$$

при некоторых $c_i > 0$, $i = \overline{1, 4}$, для всех $k \in N$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $h \in \boldsymbol{H}, x \in \boldsymbol{R}^m$.

Тогда импульсная система (1)–(3) асимптотически устойчива в среднем квадратическом в целом.

Доказательство. Используя (36) при $n = k_0$, на основании (45) легко получить неравенство

$$\boldsymbol{E}\{|x(t_{N+1})|^2\} \le \frac{1}{c_1} \boldsymbol{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x(t_{N+1}))\} \le$$

$$\le \frac{1}{c} \boldsymbol{E}\{v_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, x)\} \le \frac{c_2}{c_1} |x|^2 \tag{47}$$

для всех $N \geq k_0$, $k_0 \in N$, $x \in \boldsymbol{R}^m$ и начальных распределениях случайного вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$.

Отсюда по определению 6 (см. (25)) следует p-устойчивость (при $p = 2$) системы (1)–(3) или устойчивость в l.i.m.

Далее, используя (37), (45) и (46), получаем неравенство

$$\sum_{k=k_0}^{N} \boldsymbol{E}\{|x(t_{N+1})|^2\} \leq \frac{1}{c_3} \sum_{k=k_0}^{N} \boldsymbol{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c} \boldsymbol{E}\{v_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, x)\} \leq \frac{c_2}{c_3} |x|^2,$$

гарантирующее сходимость ряда, членами которого выступают $\boldsymbol{E}\{|x(t_k)|^2\}$ для любых начальных данных $x(t_{k_0}) = x$ и начальных распределений случайного вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$.

Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in\boldsymbol{Y},\, h\in\boldsymbol{H}} \boldsymbol{E}\{|x(t_k, t_0, y, h, x)|^2\} = 0$$

при всех $t_0 \geq 0$, что и доказывает теорему 3.

Следствие. Если выполнены условия теоремы 2 и имеет место неравенство (45), то импульсная система (1)–(3) устойчива в l.i.m. в целом.

Доказательство следует из рассуждений теоремы 1.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1 и существует такое число $\Delta_1 > 0$, что

$$|t_{k+1} - t_k| \geq \Delta_1 \tag{48}$$

при всех $k \in N$.

Тогда импульсная система (1)–(3) экспоненциально устойчива в l.i.m. в целом.

Доказательство. В силу неравенства (28) достаточно доказать, что неравенство (38) выполняется для $x \in \boldsymbol{R}^m$ при всех $t \in S$, так как для $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k > n$, из определения k_0 следует неравенство

$$e^{-\gamma(t_k - t_{k_0})} \leq e^{-\gamma(t_k - t_0)} e^{\gamma\Delta}. \tag{49}$$

Из теоремы 1 и формулы (35) имеем

$$\boldsymbol{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1})) / \mathcal{F}_{t_k}\} =$$

$$= v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) + l v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \tag{50}$$

для $k \in N, t \geq 0$ начальных значений $x(t_0)$, $\xi(t_0)$, η_{k_0}.

Из условий теоремы 3 следует неравенство

$$l v_k(y, h, x) \leq -a_k(y, h, x) \leq -c_3 |x|^2 \leq -\frac{c_3}{c_2} v_k(y, h, x).$$

Тогда легко записать

$$\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{E}\{v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) / \mathcal{F}_{t_k}\}\} \leq \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^{k-k_0} \boldsymbol{E}\{v_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, x(t_{k_0}))\}.$$

Отсюда, используя условие теоремы 3, получаем

$$\boldsymbol{E}\{|x(t_k, t_{k_0}, y, h, x)|^2\} \leq \frac{1}{c_1} \boldsymbol{E}\{v(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k, t_{k_0}, y, h, x))\} \leq$$

$$\leq \frac{c_2}{c_1} \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^{k-k_0} |x|^2.$$

Не теряя общности, можно считать $c_2 > c_3$. Тогда $\left(1-\frac{c_3}{c_2}\right) \in (0, 1)$.

Остается воспользоваться неравенством (49), что и доказывает теорему 3. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С., Витт А.А. О стохастическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТТ. — 1933. — Вып. 3, № 3. — С. 165–180.
2. Ворович Н.Н. Об устойчивости движения при случайных возмущениях // Изв. АН СССР. Сер. математика. — 1965. — **20**, № 1. — С. 43–48.
3. Мильмар В.Д., Мышкис А.Д. Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. мат. журн. — 1960. — **1**, № 2. — С. 233–237.
4. Моисеев Н.Н. О вероятностной трактовке понятия «устойчивости движения» // Уч. зап. Ростовского-на-Дону гос. ун-та. — 1953. — **18**, вып. 3. — С. 23–28.
5. Степанов В.В. К определению вероятностной устойчивости // Докл. АН СССР. — 1938. — **18**, № 3. — С. 151–153.
6. Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. — 1960. — **2**, вып. 5. — С. 809–823.
7. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях от параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
8. Korolyuk V.S. A veraging and stability of dynamical system with rapid Markov switchings. — Univ. of Umea, s-90167, Umea, 1991. — Febr. — 15 p.
9. Скороход А.В. Асимптотические методы в теории стохастических дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1987. — 328 с.
10. Свердан М.Л., Царьков Е.Ф. Устойчивость стохастических импульсных систем. — Рига: РТУ, 1994. — 300 с.
11. Tsarkov Ye. A veraging in dynamical systems with Markov jumps // Just of Dynamic. Syst. — 1993. — N 282. — 41 p.
12. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 287 с.
13. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. — Екатеринбург: Изд-во Уральск. госакадемии путей сообщения, 1998. — 222 с.
14. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. — М.: Физмат. изд., 1994. — Т. 1. — 544 с.; Т. 2. — 473 с.
15. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз., 1963. — 859 с.
16. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостех. изд., 1958. — 472 с.
17. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1956. — 605 с.
18. Morozan T. Stability and control of linear discrete-time systems with jump Markov distrurbances // Rev. Roun. Math Pures et Appl., 1981. — **26**, N 1. — P. 101–120.
19. Рогoль С.Л., Ясинский В.К. Анализ экспоненциальной устойчивости линейного стохастического осциллятора при малых диффузионных возмущениях // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 2. — С. 63–72.

Поступила 04.12.2007