УДК 330.46+519.866

М.Г. ОХРИМЕНКО, И.Ю. ДЗЮБАН

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ РЕКЛАМНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ И АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Ключевые слова: *оптимизация, оптимальное управление, реклама, страховая компания.*

ВВЕДЕНИЕ

Страховой рынок — определенная сфера денежных отношений, где объектом купли-продажи выступает страховая защита, формируется спрос и предложение на нее. Обязательным условием существования страхового рынка является наличие общественной потребности в страховании. В настоящее время ценовая конкуренция недостаточно действенна. Каждая компания стремится предложить качественные страховые продукты и обслуживание клиентов на высшем уровне. Все больше внимания отводится созданию привлекательного бренда, позитивного имиджа компании, привлечению клиентов. Эффективных результатов можно достичь путем разработки и проведения долгосрочной и качественной рекламной политики.

Привлечение страхователей с помощью разных видов рекламы является важным инструментом конкурентной борьбы на страховом рынке. Современная практика рекламирования не имеет широкого опыта использования экономико-математических методов и моделей, на основе которых руководство имело бы возможность разработать адаптивные к возмущениям внешней среды управленческие решения.

Кроме непосредственных затрат на рекламу (СМИ, бигборды), под рекламированием будем понимать затраты на исследование рынка, разработку новых страховых программ, повышение квалификации персонала, удержание страховых агентов и пр.

МОДЕЛЬ

Полагаем, что спрос на страховую услугу отдельного страхового подразделения формируется в результате рекламных мероприятий всех подразделений компании на рынке:

$$D_i(t) = \lambda_{0i}(t) + \beta_i F(f_1(a_1(t)), \ldots, f_n(a_n(t))), \quad i = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Здесь $D_i(t)$ — спрос на страховую услугу i-го подразделения; $\lambda_{0i}(t)$ — спрос в случае отсутствия рекламы; β_i — доля рынка i-го подразделения, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$; $F(\cdot)$ — функция результативности рекламы компании на рынке; $f_i(a_i(t))$ — функция результативности рекламы отдельного подразделения; $a_i(t)$ — затраты на рекламу i-го подразделения страховой компании.

Модели деятельности страховой компании, учитывающие затраты на рекламу страховых услуг, описаны в [1–3]. С учетом их основных положений и формулы (1) скорость изменения среднего капитала $S_i(t)$ (под капиталом в данной работе, как и в классической модели страхования, будем понимать доход с выче-

© М.Г. Охрименко, И.Ю. Дзюбан, 2009

том страховых выплат) i-го страхового подразделения опишем системой

$$\dot{S}_i(t) = p_i\, D_i(t) - a_i(t) - b_i\, \mu_i(t) + r_i\, S_i(t), \tag{2}$$

где p_i — цена договора страхования; b_i — математическое ожидание страховых выплат; $\mu_i(t)$ — интенсивность пуассоновского потока страховых выплат i-го подразделения; r_i — банковский процент.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим случай, когда функция результативности рекламы i-го страхового подразделения имеет вид [4]

$$f_i(a_i(t)) = \lambda_i a_i^{\alpha_i}, \quad \lambda_i > 0, \quad \alpha_i \in (0, 1], \tag{3}$$

и такая, что $f_a' \geq 0$, $f_a'' \leq 0$, а функция $F(\cdot)$ аддитивна. Тогда функция спроса на страховую услугу отдельного подразделения будет иметь вид

$$D_i(t) = \lambda_{0i}(t) + \beta_i \left[f_1(a_1(t)) + f_2(a_2(t)) + \ldots + f_n(a_n(t)) \right].$$

Пусть $a_i(t) = u_i(t) S_i(t)$ — функция затрат, где $u_i(t)$ — часть капитала i-го страхового подразделения, которая идет на рекламирование страховых услуг. Тогда динамику капитала (2) перепишем в виде

$$\dot{S}_i(t) = p_i \left(\lambda_{0i} + \beta_i \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (u_i(t) S_i(t))^{\alpha_i} \right) + (r_i - u_i(t)) S_i(t) - b_i\, \mu_i.$$

Приведя подобные, получим систему вида

$$\begin{cases} \dot{S}_1(t) = A_{11}(u_1 S_1(t))^{\alpha_1} + A_{12}(u_2 S_2(t))^{\alpha_2} + \ldots + A_{1n}(u_n S_n(t))^{\alpha_n} + (r_1 - u_1) S_1(t) + C_1, \\ \dot{S}_2(t) = A_{21}(u_1 S_1(t))^{\alpha_1} + A_{22}(u_2 S_2(t))^{\alpha_2} + \ldots + A_{2n}(u_n S_n(t))^{\alpha_n} + (r_2 - u_2) S_2(t) + C_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{S}_n(t) = A_{n1}(u_1 S_1(t))^{\alpha_1} + A_{n2}(u_2 S_2(t))^{\alpha_2} + \ldots + A_{nn}(u_n S_n(t))^{\alpha_n} + (r_n - u_n) S_n(t) + C_n \end{cases} \tag{4}$$

с начальными условиями

$$S_1(t_0) = S_1^0, \quad S_2(t_0) = S_2^0, \ldots, S_n(t_0) = S_n^0. \tag{5}$$

Здесь $S_i(t_0)$ — средний капитал i-го подразделения страхования в начале планового периода $t \in [t_0, T]$; $A_{ij} = p_i\, \lambda_j\, \beta_i$, $i = \overline{1, n}$, $\forall j = \overline{1, n}$; $C_i = p_i\, \lambda_{0i} - b_i\, \mu_i$, $i = \overline{1, n}$. Параметр C_i отображает результат основной (операционной) деятельности i-го страхового отделения компании. Ограничения на рекламу имеют вид

$$0 \leq u_1(t) \leq \tilde{u}_1, \quad 0 \leq u_2(t) \leq \tilde{u}_2, \ldots, 0 \leq u_n(t) \leq \tilde{u}_n. \tag{6}$$

Цель проведения рекламных мероприятий каждой страховой компании сводится к максимизации величины капитала в конце рекламного периода $t \in [t_0, T]$. Следующий критерий описывает капитал компании в конце рекламной кампании:

$$L(T, t_0) = \sum_{i=1}^{n} S_i(T). \tag{7}$$

Задача оптимизации рекламной деятельности страховой компании состоит в выборе такой рекламной стратегии $u_i(t)$ на временном промежутке $t \in [t_0, T]$, которая обеспечивает максимум (7) при условиях (4)–(6).

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

С учетом формулы

$$S_i(T) = S_i(t_0) + \int_{t_0}^{T} \dot{S}_i(t)dt$$

критерий (7) будет иметь вид

$$J(T, t_0) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{T} \dot{S}_i(t)dt + \sum_{i=1}^{n} S_i(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{T} [P_{11}(u_1 S_1(t))^{\alpha_1} + P_{22}(u_2 S_2(t))^{\alpha_2} + \ldots + P_{nn}(u_n S_n(t))^{\alpha_3} + (r_1 - u_1(t))S_1(t) +$$
$$+(r_2 - u_2(t))S_2(t) + \ldots + (r_n - u_n(t))S_n(t) + C_1 + C_2 + \ldots + C_n]dt +$$
$$+ S_1(t_0) + S_2(t_0) + \ldots + S_n(t_0), \tag{8}$$

где $P_{ii} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}, \ i = \overline{1, n}.$

Оптимум критерия (7) достигается в точке, где подынтегральная функция (8) достигает максимума без ограничений (6).

Из необходимого условия существования экстремума подынтегрального выражения следует

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{[\alpha_1 P_{11}]^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{S_1}, \\ u_2 = \dfrac{[\alpha_2 P_{22}]^{\frac{1}{1-\alpha_2}}}{S_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = \dfrac{[\alpha_n P_{nn}]^{\frac{1}{1-\alpha_n}}}{S_n}. \end{cases}$$

Поскольку матрица Гессе в данном случае имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1)P_{11}u_1^{\alpha_1 - 2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (\alpha_2 - 1)P_{22}u_2^{\alpha_2 - 2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & (\alpha_n - 1)P_{nn}u_n^{\alpha_n - 2} \end{pmatrix}$$

и отрицательно-определена (главные миноры чередуют знак ($\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0, \ \ldots$), это является достаточным условием существования максимума подынтегральной функции (8).

Алгоритм решения задачи (8), (4)–(6) может быть следующим.

1. Разбиваем промежуток $[t_0, T]$ на N частей с шагом $h = \dfrac{T - t_0}{N}$. Соответственно исходным данным полагаем

$$
\left[
\begin{array}{l}
u_1^0 = \begin{cases} \tilde{u}_1, & \text{если } \dfrac{(\alpha_1 P_{11})^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{S_1^0} \ge \tilde{u}_1, \\ \dfrac{(\alpha_1 P_{11})^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{S_1^0}, & \text{если } \dfrac{(\alpha_1 P_{11})^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{S_1^0} < \tilde{u}_1, \end{cases} \\
u_2^0 = \begin{cases} \tilde{u}_2, & \text{если } \dfrac{(\alpha_2 P_{22})^{\frac{1}{1-\alpha_2}}}{S_2^0} \ge \tilde{u}_2, \\ \dfrac{(\alpha_2 P_{22})^{\frac{1}{1-\alpha_2}}}{S_2^0}, & \text{если } \dfrac{(\alpha_2 P_{22})^{\frac{1}{1-\alpha_2}}}{S_2^0} < \tilde{u}_2, \end{cases} \\
\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_n^0 = \begin{cases} \tilde{u}_n, & \text{если } \dfrac{(\alpha_n P_{nn})^{\frac{1}{1-\alpha_n}}}{S_n^0} \ge \tilde{u}_n, \\ \dfrac{(\alpha_n P_{nn})^{\frac{1}{1-\alpha_n}}}{S_n^0}, & \text{если } \dfrac{(\alpha_n P_{nn})^{\frac{1}{1-\alpha_n}}}{S_n^0} < \tilde{u}_n. \end{cases}
\end{array}
\right.
$$

2. Численно решаем задачу Коши для системы

$$
\begin{cases}
\dot{S}_1(t) = A_{11}(u_1^0 S_1(t))^{\alpha_1} + A_{12}(u_2^0 S_2(t))^{\alpha_2} + \ldots + A_{1n}(u_n^0 S_n(t))^{\alpha_n} + (r_1 - u_1^0) S_1(t) + C_1 \ , \\
\dot{S}_2(t) = A_{21}(u_1^0 S_1(t))^{\alpha_1} + A_{22}(u_2^0 S_2(t))^{\alpha_2} + \ldots + A_{2n}(u_n^0 S_n(t))^{\alpha_n} + (r_2 - u_2^0) S_2(t) + C_2 , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dot{S}_n(t) = A_{n1}(u_1^0 S_1(t))^{\alpha_1} + A_{n2}(u_2^0 S_2(t))^{\alpha_2} + \ldots + A_{nn}(u_n^0 S_n(t))^{\alpha_n} + (r_n - u_n^0) S_n(t) + C_n
\end{cases}
$$

с начальными условиями (стартовым капиталом филиалов)

$$
S_1(t_0) = S_1^0, \quad S_2(t_0) = S_2^0, \ldots, S_n(t_0) = S_n^0,
$$

$$
t \in [t_0, t_1 = t_0 + h].
$$

Обозначим капитал в конце промежутка $[t_0, t_1]$

$$
S_1^1 = S_1(t_1), \quad S_2^1 = S_2(t_1), \ \ldots, S_n^1 = S_n(t_1).
$$

3. Для каждого последующего отрезка $t \in [t_k, t_{k+1} = t_k + h]$, $k = 1, N$, повторяется процедура п. 2

$$\left[\begin{array}{l} u_1^k = \begin{cases} \tilde{u}_1, & \text{если } \dfrac{(\alpha_1 P_{11})^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{S_1^k} \ge \tilde{u}_1, \\ \dfrac{(\alpha_1 P_{11})^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{S_1^k}, & \text{если } \dfrac{(\alpha_1 P_{11})^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{S_1^k} < \tilde{u}_1, \end{cases} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n^k = \begin{cases} \tilde{u}_n, & \text{если } \dfrac{(\alpha_n P_{nn})^{\frac{1}{1-\alpha_n}}}{S_n^k} \ge \tilde{u}_n, \\ \dfrac{(\alpha_n P_{nn})^{\frac{1}{1-\alpha_n}}}{S_n^k}, & \text{если } \dfrac{(\alpha_n P_{nn})^{\frac{1}{1-\alpha_n}}}{S_n^k} < \tilde{u}_n, \end{cases} \end{array}\right.$$

и решается задача Коши

$$\begin{cases} \dot{S}_1(t) = A_{11}(u_1^k S_1(t))^{\alpha_1} + A_{12}(u_2^k S_2(t))^{\alpha_2} + \ldots + A_{1n}(u_n^k S_n(t))^{\alpha_n} + (r_1 - u_1^k) S_1(t) + C_1 \;, \\ \dot{S}_2(t) = A_{21}(u_1^k S_1(t))^{\alpha_1} + A_{22}(u_2^k S_2(t))^{\alpha_2} + \ldots + A_{2n}(u_n^k S_n(t))^{\alpha_n} + (r_2 - u_2^k) S_2(t) + C_2 \,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{S}_n(t) = A_{n1}(u_1^k S_1(t))^{\alpha_1} + A_{n2}(u_2^k S_2(t))^{\alpha_2} + \ldots + A_{nn}(u_n^k S_n^k(t))^{\alpha_n} + (r_n - u_n^k) S_n(t) + C_n \,, \end{cases} \tag{9}$$

$$S_1(t_k) = S_1^k, \quad S_2(t_k) = S_2^k, \ldots, S_n(t_k) = S_n^k,$$

$$t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = \overline{1, N}.$$

Если на каком-то шаге $k = i,\ i = \overline{0, N}$, выполнилось условие

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(\alpha_1 P_{11})^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{S_1^i} < \tilde{u}_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{(\alpha_n P_{nn})^{\frac{1}{1-\alpha_n}}}{S_n^i} < \tilde{u}_n, \end{array}\right. \tag{10}$$

то полагаем

$$\begin{cases} u_1^i = \dfrac{(\alpha_1 P_{11})^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{S_1^i}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n^i = \dfrac{(\alpha_n P_{nn})^{\frac{1}{1-\alpha_n}}}{S_n^i}. \end{cases}$$

Подстановкой в исходную систему (9) получим

$$\begin{cases} \dot S_1(t) = A_{11}(\alpha_1 P_{11})^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} + \ldots + A_{1n}(\alpha_n P_{nn})^{\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}} - (\alpha_1 P_{11})^{\frac{1}{1-\alpha_1}} + C_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot S_n(t) = A_{n1}(\alpha_1 P_{11})^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} + \ldots + A_{nn}(\alpha_n P_{nn})^{\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}} - (\alpha_n P_{nn})^{\frac{1}{1-\alpha_n}} + C_n, \end{cases}$$

$$S_1(t_i) = S_1^i, \ \ldots, S_n(t_i) = S_n^i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{k, N}.$$

4. Вычисляем значение $J(T, t_0)$. Задача решена.

Замечание 1. В условиях применения неравномерной сетки при решении задачи (8), (4)–(6) все шаги алгоритма сохраняются в описанном виде.

Замечание 2. В условиях прибыльной деятельности филиалов страховой компании условие (10) будет выполняться начиная с некоторого шага в силу монотонного возрастания компонент вектора $S = (S_1(t), S_2(t), \ldots, S_n(t))$. Несложно заметить, что от увеличения $S_i(t)$ левые части в (10) уменьшаются, поскольку их числитель с шагом остается постоянным. Это обстоятельство позволяет утверждать, что на достаточно большом промежутке времени $T - t_0$ наступит такой момент, когда расходы на рекламу следует монотонно уменьшать. Момент и темп уменьшения определяются моментом выполнения условий (10).

Пример. Рассмотрим компанию, в составе которой функционирует три отделения страхования. Пусть в (3) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$. Тогда динамику капитала (4) будет описывать система

$$\begin{cases} \dot S_1(t) = A_{11}\sqrt{u_1(t)S_1(t)} + A_{12}\sqrt{u_2(t)S_2(t)} + A_{13}\sqrt{u_3(t)S_3(t)} + (r_1 - u_1(t))S_1(t) + C_1, \\ \dot S_2(t) = A_{21}\sqrt{u_1(t)S_1(t)} + A_{22}\sqrt{u_2(t)S_2(t)} + A_{23}\sqrt{u_3(t)S_3(t)} + (r_2 - u_2(t))S_2(t) + C_2, \\ \dot S_3(t) = A_{31}\sqrt{u_1(t)S_1(t)} + A_{32}\sqrt{u_2(t)S_2(t)} + A_{33}\sqrt{u_3(t)S_3(t)} + (r_3 - u_3(t))S_3(t) + C_3; \end{cases}$$

$$p_1 = \$300; \quad p_2 = \$400; \quad p_3 = \$350; \quad b_1 = \$2000; \quad b_2 = \$2500; \quad b_3 = \$3000;$$

$$\mu_1 = 0{,}05; \quad \mu_2 = 0{,}07; \quad \mu_3 = 0{,}08; \quad \lambda_{01} = 1; \quad \lambda_{02} = 1; \quad \lambda_{03} = 1; \quad t \in [0, 12];$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1; \quad \beta_1 = 0{,}25; \quad \beta_2 = 0{,}15; \quad \beta_3 = 0{,}3; \quad \tilde u_1 = \tilde u_2 = \tilde u_3 = 0{,}02\,\%;$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = 12\,\%; \quad S_1(0) = \$650000; \quad S_2(0) = \$600000; \quad S_3(0) = \$700000.$$

Результаты численного эксперимента графически приведены на рис. 1, 2. На рис. 1 отражена динамика издержек на рекламу подразделений страховой компа-

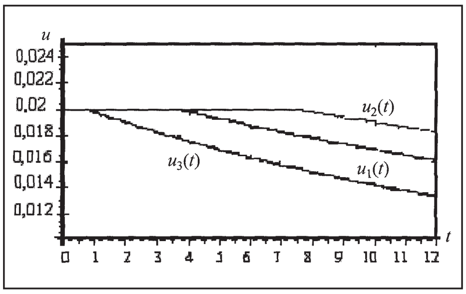

Рис. 1

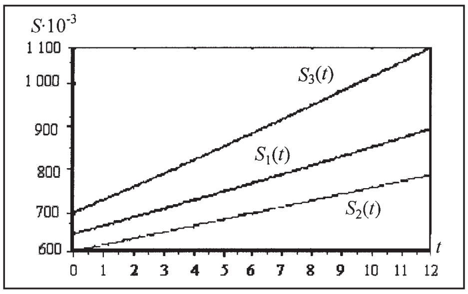

Рис. 2

нии, на рис. 2 — динамика капитала подразделений страховой компании согласно рекламной стратегии.

Значение целевой функции: $L(T, t_0) = \$2\,790\,000$. Капитал каждого подразделения страховой компании в конце рекламного периода составляет: $S_1(T) = \$1100\,000$; $S_2(T) = \$900\,000$; $S_3(T) = \$790\,000$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Специфика модели позволяет найти оптимальные управление и траекторию, избегая стандартной процедуры принципа максимума, применение которой требовало бы решения краевой задачи двойной размерности (вместо N задач Коши одинарной размерности), что имеет на порядок высшую сложность, поскольку задача оптимизации существенно нелинейная.

Особенности структуры рассмотренной модели позволяют на каждом шаге алгоритма получить оптимальное управление в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахмедова Д.Д., Терпугов А.Ф. Математическая модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу // Изв. вузов. Физика. — 2001. — № 1. — С. 25–28.
2. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А., Терпугов А.Ф. Оптимизация деятельности страховой компании с учетом расходов на рекламу // Вестн. ТГУ. — 2002. — № 275. — 2002. — С. 181–184.
3. Кац В.М., Лившиц К.И. Влияние расходов на рекламу на характеристики страховой компании // Изв. вузов. Физика. — 2001. — № 1. — С. 29–33.
4. Зенкевич Н.А., Петросян Л.А. Научные доклады. Дифференциальные игры в менеджменте. — СПб.: НИИ менеджмента, 2006. — № 38(R). — С. 20–24.

Поступила 28.10.2008