

## ЗАВИСИМОСТЬ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ CALL-ЦЕНТРА ОТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ ВЫЗОВОВ НА ОРБИТЕ

**Ключевые слова:** *система массового обслуживания с возвращениями, call-центр.*

В настоящее время для достижения успехов в бизнесе компании уделяют большое внимание неценовым методам конкуренции и, в первую очередь, качеству предлагаемых товаров и услуг, их соответствию нуждам потребителей. При этом важно не только получить качественный продукт, но и преподнести его клиенту таким образом, чтобы он остался удовлетворен обслуживанием и обратился в компанию снова.

Усовершенствовать способы ведения бизнеса и успешно решить проблему индивидуального подхода к клиентам при массовом обслуживании позволяют средства, разработанные на основе современных информационных технологий. Одним из таких средств является call-центр (call center), предназначенный для структур, которые работают с большим количеством клиентов. Особый интерес call-центры представляют для коммерческих структур — банков, торговых компаний, операторов связи, отелей, страховых и телекоммуникационных фирм и т.п. Для многих из них являются очевидными преимуществами использования современных call-центров такие, как повышение производительности работы персонала, оптимизация обслуживания и др.

**Структура call-центра.** Call-центр представляет собой набор ресурсов (персонал, компьютеры и телекоммуникационное оборудование) и предназначен для обслуживания заявок клиентов с использованием телефона. Эффективность работы call-центра во многом зависит от профессионализма операторов и руководителей. Call-центры, в первую очередь, нужны там, где обычные средства связи не могут обеспечить большое количество потенциальных заказчиков. Кроме того, обслуживание вызовов является первой ступенькой к общению с заказчиками, от которых зависит, насколько корректным будет обслуживание его запросов в рамках дальнейшей совместной работы.

К наиболее важным задачам в работе call-центров можно отнести следующие: 1) правильный прием и обработка потока входных вызовов; 2) управление работой в реальном режиме времени, что позволяет оперативно реагировать на смену потоков вызовов и обслуживать их оптимальным количеством ресурсов; 3) оценка эффективности капиталовложений в call-центр, которая выполняется благодаря наличию статистической информации о работе оператора, группы операторов, загруженности линий соединения, всего call-центра в целом. Кроме того, call-центр выполняет следующие функции:

- контроль качества работы оператора, т.е. качества обслуживания абонентов;
- повышение степени удовлетворения абонентов за счет быстрой и корректной реакции сотрудников call-центра на запросы клиентов;
- повышение степени удовлетворения работой операторов call-центра за счет грамотной организации их рабочих мест, автоматизации или упрощения рутинных процедур и т.д.;
- экономия человеческих ресурсов и различных затрат;
- уменьшение количества необслуженных вызовов и их контроль.

© С.В. Пустовая, 2009

Основной эффект от использования call-центров — снижение затрат по обслуживанию клиентов, повышение качества обслуживания, создание новых видов услуг, которые дают компании преимущества перед конкурентами.

В Украине первые call-центры появились в банках в начале XXI столетия и вытеснили традиционные многоканальные телефоны. В зависимости от используемой технологии рынок таких центров включает три сегмента: 1) инновационный — возник в результате движения IP-технологий навстречу традиционной телефонии; 2) традиционный — возник в результате развития АТС и ее слияния с IP-платформой; 3) альтернативный — сформировался самостоятельно на базе открытых систем компьютерно-телефонной интеграции.

Идентифицирование клиента и выявление цели его запроса выполняется с помощью автоматического определителя номера (АОН), цифрового кода (пароля), набранного клиентом, или путем прямого опрашивания клиента. Полученная информация используется системой автоматической (ACD, automatic call distribution) или интеллектуальной (ICR, intelligent call router) маршрутизации вызовов, которая «направляет» клиента по нужному адресу — на автомат или к оператору.

После определения цели запроса в автоматическом call-центре в режиме диалога с клиентом общается автоответчик — устройство интерактивного голосового ответа (IVRU, interactive voice response unit). При «живом» общении компьютер перед началом переговоров выводит на экран монитора оператора данные о клиенте и сути его запроса. В распоряжение оператора может, например, предоставляться следующая информация: имя клиента, его последние соглашения, операции, задолженность и др.

Call-центры постепенно приобретают признаки широкого распространения и определенного стандарта в социальной сфере и сфере обслуживания. Таким образом, построение адекватной модели call-центра с целью определения показателей эффективности на стадии проектирования является актуальной задачей.

**Используемые методы.** Инструментом математического моделирования call-центра являются средства теории массового обслуживания (ТМО) [1], с помощью которых строится аналитическая модель call-центра. На протяжении последних 20 лет интенсивно изучаются системы массового обслуживания с возвращениями (повторениями) [2, 3]. Именно эти модели адекватно описывают функционирование call-центра. Следует отметить монографию [4] по теории систем массового обслуживания (СМО) с возвращениями. В то же время Агюр [5] и другие исследователи статистических данных call-центров указывают на отрицательные последствия в связи с пренебрежением возвращений при расчете оптимального количества операторов.

**Функционирование call-центра.** Процесс функционирования call-центра в общем случае можно представить в виде схемы, изображенной на рис. 1.

На вход call-центра с определенной интенсивностью поступают вызовы от абонентов, которые называют первичными. Если в момент их поступления какой-либо из операторов свободен, то вызов получает обслуживание, после чего оставляет систему. Если все операторы заняты, то вызов размещают в очередь. На этом этапе абонент может отказаться становиться в очередь, оставить систему навсегда или сделать повторный вызов через некоторый промежуток времени. Абонент, который находится в очереди, дожидается на обслуживание или прекращает ожидание и по-

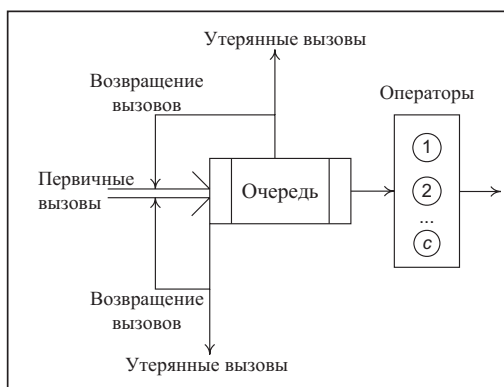


Рис. 1. Схема функционирования call-центра

вторяет вызов или навсегда оставляет систему. В реальных системах размер очереди ограничен возможностями телекоммуникационного оборудования (например, количеством телефонных линий, количеством линий голосового ответчика и т.п.). Итак, если на момент поступления вызова в call-центре все операторы и все места в очереди заняты, то абонент услышит сигнал «занято» (при этом говорят, что сигнал блокируется).

Из рис. 1 видно, что возвращения являются одним из составных входного потока вызовов и их игнорирование может существенно повлиять на основные параметры функционирования call-центра. Именно поэтому из всех разнообразных аспектов функционирования call-центра наиболее интересными и важными являются вопросы, связанные с повторными попытками дозвонивания абонентов. Итак, call-центр представляет собой многоканальную СМО с входными потоками первичных и повторных вызовов, с местами ожидания и отказами.

В работах [6, 7] детально рассмотрен процесс функционирования call-центра и построена его аналитическая модель как СМО типа  $M/M/c/0$  с возвращениями и потерями, получены аналитические выражения для показателей эффективности его функционирования, а в работах [7, 8] построена статистическая модель. С практической точки зрения, наиболее важными показателями качества обслуживания абонентов call-центра являются стационарная вероятность блокирования вызова (при поступлении заявки все каналы заняты), среднее количество вызовов на цикле орбиты, среднее количество занятых каналов обслуживания, вероятность утери вызова.

Call-центр, как система с возвращением вызовов, принадлежит классу систем с дискретными событиями. Аналитическими методами их можно исследовать, лишь предварительно упростив систему. В [6–8] для упрощения были рассмотрены экспоненциальные распределения времен обслуживания и интервалов между первичными вызовами и возвращениями.

Интерес представляет эрланговское распределение вызовов на цикле орбиты как более адекватное реальной телефонной системе. А. К. Эрланг отметил чрезвычайную простоту экспоненциального распределения и увидел в нем мощное средство исследования СМО [9, с. 137]. Он отметил, что экспоненциальное распределение не всегда позволяет адекватно описать настоящую картину распределения времени обслуживания (и промежутков времени между входными вызовами), и поэтому предложил разложить распределение времени обслуживания в виде составляющих экспоненциальных распределений.

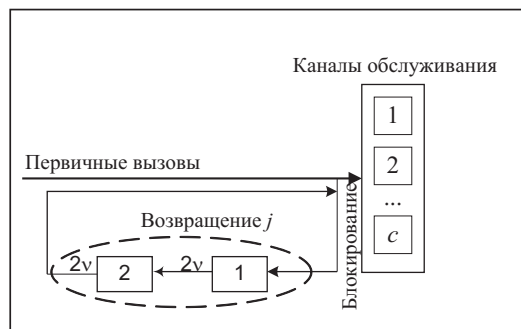


Рис. 2. СМО типа  $M/M/c/0//E_2$

**Аналитическая модель.** Рассмотрим call-центр как СМО типа  $M/M/c/0//E_2$ , т.е. как систему с экспоненциально распределенным входным потоком вызовов, экспоненциально распределенными временами обслуживания, с  $c$  каналами, без мест ожидания, с неограниченной орбитой, без потерь и с двухфазным эрланговским распределением потока требований на орбите (рис. 2).

Пусть на  $c$  каналов обслуживания поступает пуассоновский поток первичных вызовов с интенсивностью  $\lambda$  (плотность распределения  $a(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ). Если при поступлении вызова в систему какой-либо канал обслуживания свободен, то вызов немедленно занимает этот канал и оставляет систему после обслуживания. Однако если на момент прихода нового вызова все  $c$  каналов заняты, то вызов формирует источник повторных вызовов (возвращений) — орбиту.

Каждый такой источник образует двухфазный эрланговский процесс повторных вызовов с параметром  $\nu$  (плотность распределения  $d(x) = (2\nu)^2 x e^{-(2\nu)x}$ ). Иными словами, каждый повторный вызов проходит две фазы до того, как попадет на обслуживание. Если на момент поступления повторного вызова со второй фазы любой канал обслуживания свободен, то вызов обслуживается и затем оставляет систему, а источник возвращений исчезает. Если же все каналы заняты, то вызов делает попытку снова получить обслуживание.

Пусть времена обслуживания распределены экспоненциально с параметром  $\mu$  (плотность распределения  $b(x) = \mu e^{-\mu x}$ ). Предположим, что интервалы между поступлениями первичных и повторных вызовов и времена обслуживания являются взаимно независимыми.

Функционирование системы можно описать с помощью трехмерного процесса  $(X(t), Y(t), Z(t))$ , где  $X(t)$  — количество занятых каналов обслуживания (для одноканальной системы — канал занят/не занят),  $Y(t)$  и  $Z(t)$  — количество требований на орбите, которые находятся соответственно на первой и второй фазах в момент  $t$ ; сумма  $Y(t) + Z(t)$  представляет количество требований на орбите в момент времени  $t$ . Процесс  $(X(t), Y(t), Z(t))$  определен на множестве состояний  $S = \{0, 1, \dots, c\} \times \{0, 1, \dots\} \times \{0, 1, \dots\}$ .

**Одноканальная система.** СМО типа  $M/M/1/0/NL/E_2$  описывается трехмерным процессом  $(X(t), Y(t), Z(t))$ , определенным на множестве состояний  $S = \{0, 1\} \times \{0, 1, \dots\} \times \{0, 1, \dots\}$ .

Интенсивности переходов  $q_{(k,i,j)(g,m,n)}$ ,  $k, g = \{0, 1\}$ ,  $i, j, m, n = \{0, 1, \dots\}$ , (инфинитезимальные переходные интенсивности) процесса  $(X(t), Y(t), Z(t))$  за промежуток времени  $(t, t + dt)$ ,  $t \geq 0$ , определяются так:

при  $k = 0$

$$q_{(0ij)(g,m,n)} = \begin{cases} \lambda, & (g, m, n) = (1, i, j), \\ j \cdot 2\nu, & (g, m, n) = (1, i, j-1), j \geq 1, \\ i \cdot 2\nu, & (g, m, n) = (0, i-1, j+1), i \geq 1, \\ -(\lambda + i \cdot 2\nu + j \cdot 2\nu), & (g, m, n) = (0, i, j), \\ 0 & \text{в других случаях;} \end{cases}$$

при  $k = 1$

$$q_{(1ij)(g,m,n)} = \begin{cases} \lambda, & (g, m, n) = (1, i+1, j), \\ j \cdot 2\nu, & (g, m, n) = (1, i-1, j+1), i \geq 1, \\ \mu, & (g, m, n) = (0, i, j), \\ -(\lambda + i \cdot 2\nu + \mu), & (g, m, n) = (1, i, j), \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Обозначим  $p_{kij}(t) = P\{X(t) = k, Y(t) = i, Z(t) = j\}$  вероятность того, что в момент  $t$  система находится в состоянии  $(k, i, j)$ , т.е. в системе заняты  $k$  каналов (для одноканальной системы — канал занят/не занят) и на орбите находится  $(i + j)$  вызовов,  $i$  из которых — на первой,  $j$  — на второй фазе выполнения повторной попытки обслужиться;  $p_{kij}$  — соответствующие стационарные вероятности.

Для стационарного режима определенные вероятности удовлетворяют системе уравнений Колмогорова ( $p_{kij} = 0$ , если  $\forall k, \forall i, \forall j < 0$ ):

$$(\lambda + j \cdot 2\nu + i \cdot 2\nu)p_{0ij} = \mu p_{1ij} + (i+1)2\nu p_{0,i+1,j-1}, \quad i \geq 0, j \geq 0,$$

$$(\lambda + i \cdot 2\nu + \mu)p_{1ij} = \lambda p_{0ij} + \lambda p_{1,i-1,j} + (j+1)2\nu p_{0,i,j+1} + (i+1)2\nu p_{1,i+1,j-1}, \quad i \geq 0, j \geq 0,$$

и условию нормирования

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{kij} = 1.$$

**Многоканальная система.** СМО типа  $M/M/c/0//E_2$ , как уже отмечалось, описывается трехмерным процессом  $(X(t), Y(t), Z(t))$ , определенным на множестве состояний  $S = \{0, 1, \dots, c\} \times \{0, 1, \dots\} \times \{0, 1, \dots\}$ .

Выпишем интенсивности переходов процесса  $(X(t), Y(t), Z(t))$  за промежуток времени  $(t, t + dt)$ ,  $t \geq 0$ . Из состояния  $(k, i, j)$ ,  $k = 0, c, i \geq 0, j \geq 0$ , за время  $dt$  система может перейти в другое состояние с определенной вероятностью (рис. 3, 4):

- $\lambda dt$  — переходит в состояние  $(k + 1, i, j)$ ,  $k \neq c$  (поступил новый первичный вызов и сразу обслужился);
- $j \cdot 2\nu dt$  — переходит в состояние  $(k + 1, i, j - 1)$ ,  $k \neq c, j \geq 1$  (один из повторных вызовов  $j$ , который находится на второй фазе выполнения попыток обслужиться, выполнил удачную попытку обслужиться);
- $i \cdot 2\nu dt$  — переходит в состояние  $(k, i - 1, j + 1)$ ,  $i \geq 1$  (один из  $i$  повторных вызовов, который находится на первой фазе выполнения попыток обслужиться, перешел ко второй фазе);
- $k\mu dt$  — переходит в состояние  $(k - 1, i, j)$ ,  $k \neq 0$  (завершилось обслуживание требования, один из каналов освободился);
- $\lambda dt$  — переходит в состояние  $(k, i + 1, j)$ ,  $k = c$  (поступил новый первичный вызов и, найдя все каналы обслуживания занятыми, пошел на орбиту на первую фазу).

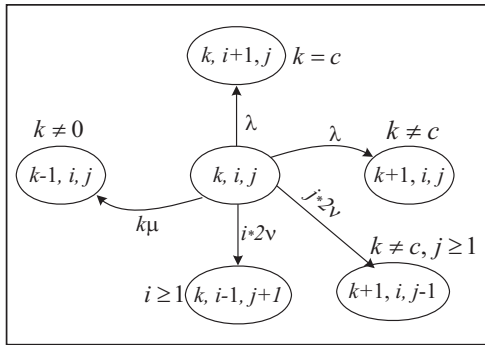


Рис. 3. Граф переходов СМО типа  $M/M/c/0//NL/E_2$  из состояния  $(k, i, j)$

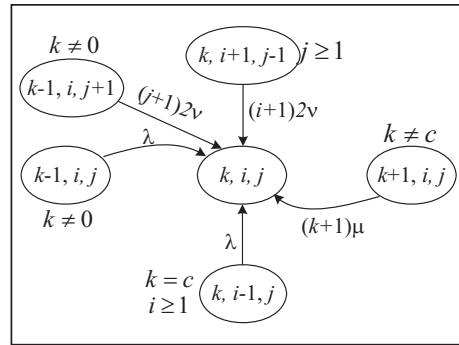


Рис. 4. Граф переходов СМО типа  $M/M/c/0//NL/E_2$  в состоянии  $(k, i, j)$

Тогда интенсивности переходов  $q_{(k,i,j)(g,m,n)}$ ,  $g, k = \overline{1, c}, i, j, m, n = \{0, 1, \dots\}$  (инфитезимальные переходные интенсивности) процесса  $(X(t), Y(t), Z(t))$  из состояния  $(k, i, j)$  в состояние  $(g, m, n)$  определяются так:

при  $0 \leq k \leq c - 1, i + j \leq N$

$$q_{(kij)(g,m,n)} = \begin{cases} \lambda, & (g, m, n) = (k + 1, i, j), \\ j \cdot 2\nu, & (g, m, n) = (k + 1, i, j - 1), j \geq 1, \\ i \cdot 2\nu, & (g, m, n) = (k, i - 1, j + 1), i \geq 1, \\ k\mu, & (g, m, n) = (k - 1, i, j), k \neq 0, \\ -(\lambda + i \cdot 2\nu + j \cdot 2\nu + k\mu), & (g, m, n) = (k, i, j), \\ 0 & \text{в других случаях;} \end{cases} \quad (1)$$

при  $k = c, i + j \leq N$

$$q_{(cij)(g,m,n)} = \begin{cases} \lambda, & (g, m, n) = (c, i + 1, j), \\ i \cdot 2\nu, & (g, m, n) = (c, i - 1, j + 1), i \geq 1, \\ c\mu, & (g, m, n) = (c - 1, i, j), \\ -(\lambda + i \cdot 2\nu + c\mu), & (g, m, n) = (c, i, j), \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2)$$

В стационарном режиме СМО типа  $M/M/c/0//E_2$  удовлетворяет системе уравнений Колмогорова (согласно рис. 3, 4) ( $p_{kij} = 0$ , если  $\forall k, \forall i, \forall j < 0$ )

$$(\lambda + j \cdot 2\nu + i \cdot 2\nu + k\mu)p_{kij} = \lambda p_{k-1,i,j} + (k+1)\mu p_{k+1,i,j} + (i+1)2\nu p_{k,i+1,j-1} + (j+1)2\nu p_{k-1,i,j+1} + \lambda p_{k-1,i,j}, \quad 0 \leq k \leq c-1, i \geq 0, j \geq 0, \quad (3)$$

$$(\lambda + i \cdot 2\nu + c\mu)p_{cij} = \lambda p_{c-1,i,j} + (i+1)2\nu p_{c,i+1,j-1} + (j+1)2\nu p_{c-1,i,j+1} + \lambda p_{c,i-1,j}, \quad k = c, i \geq 0, j \geq 0, \quad (4)$$

и условию нормирования

$$\sum_{k=0}^c \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{kij} = 1. \quad (5)$$

**Анализ некоторых показателей СМО  $M/M/1/0/2//M$  и  $M/M/1/0/2//E_2$  при малой загрузке системы.** СМО типа  $M/M/1/0/2//M$  описывается двумерным процессом  $(C(t), H(t))$  [7], где  $C(t)$  — количество занятых каналов обслуживания (для одноканальной системы — канал занят/канал не занят) в момент  $t$ ,  $H(t)$  — количество требований на орбите в момент  $t$ . Процесс  $(C(t), H(t))$  является марковским и определенным на множестве состояний  $S_1 = \{0, 1, \dots, c\} \times \{0, 1, \dots\}$ .

Пусть  $\lambda$  — интенсивность поступления входных вызовов,  $\nu$  — интенсивность повторных вызовов,  $\mu$  — интенсивность обслуживания вызовов СМО типа  $M/M/1/0/2//M$ .

Обозначим  $p_{ij}(t) = P\{C(t) = i, H(t) = j\}$  вероятность того, что в момент  $t$  система находится в состоянии  $(i, j)$ , т.е. в системе занято  $i$  каналов и на орбите находится  $j$  вызовов;  $p_{ij}$  — соответствующие стационарные вероятности.

В стационарном режиме СМО типа  $M/M/1/0/2//M$  описывается следующей системой уравнений ( $p_{ij} = 0$ , если или  $\forall j < 0$ , или  $\forall j > 2$ ):

$$(\lambda + j\nu)p_{0j} = \mu p_{1j}, \quad j \leq 2,$$

$$(\lambda + \mu)p_{1j} = \lambda p_{0j} + (j+1)\nu p_{0,j+1} + \lambda p_{1,j-1}, \quad j \leq 1, \quad (6)$$

$$(\lambda + \mu)p_{12} = \lambda p_{02} + \lambda p_{11},$$

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 p_{ij} = 1.$$

СМО типа  $M/M/1/0/1//E_2$  описывается следующей системой уравнений ( $p_{kij} = 0$ , если  $\forall k, \forall i, \forall j < 0$  или  $\forall k, \forall i, \forall j > 2$ , или  $i + j > 2$ ):

$$(\lambda + j2\nu + i2\nu)p_{0ij} = p_{1ij} + (i+1)2\nu p_{0,i+1,j-1}, \quad i \geq 0, j \geq 0, i + j \leq 2,$$

$$(\lambda + i2\nu + \mu)p_{1ij} = \lambda p_{0ij} + (i+1)2\nu p_{1,i+1,j-1} + (j+1)2\nu p_{0,i,j+1} + \lambda p_{1,i-1,j},$$

$$i \leq 1, j \leq 1, i + j \leq 2,$$

$$(4\nu + \mu)p_{120} = \lambda p_{020} + 2\nu p_{021} + \lambda p_{110}, \quad (7)$$

$$(\lambda + 1)p_{102} = \lambda p_{002} + 2\nu p_{111},$$

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 p_{kij}^l = 1, \quad i + j \leq 2.$$

Одно из уравнений систем (6) и (7) (кроме последнего) можно отбросить, заменив его последним уравнением — условием нормирования системы.

Обозначим

$$\rho = \lambda / \mu, \quad (8)$$

$$\gamma = \nu / \mu. \quad (9)$$

Разделим обе части каждого уравнения систем (6) и (7) на  $\mu$ . Тогда с учетом (8) и (9) система уравнений (6) получит вид

$$(\rho + j\gamma)p_{0j} = p_{1j}, \quad j \leq 2,$$

$$(\rho + 1)p_{1j} = \rho p_{0j} + (j + 1)\gamma p_{0,j+1} + \rho p_{1,j-1}, \quad j \leq 1, \quad (10)$$

$$(\rho + 1)p_{12} = \rho p_{02} + \rho p_{11},$$

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 p_{ij} = 1.$$

Система уравнений (7) с учетом обозначений (8) и (9) получит вид

$$(\rho + j2\gamma + i2\gamma)p_{0ij} = p_{1ij} + (i + 1)2\gamma p_{0,i+1,j-1}, \quad i \geq 0, \quad j \geq 0, \quad i + j \leq 2,$$

$$(\rho + i2\gamma + 1)p_{1ij} = \rho p_{0ij} + (i + 1)2\gamma p_{1,i+1,j-1} + (j + 1)2\gamma p_{0,i,j+1} + \rho p_{0,i-1,j},$$

$$i \leq 1, \quad j \leq 1, \quad i + j \leq 2,$$

$$(4\gamma + 1)p_{120} = \rho p_{020} + 2\gamma p_{021} + \rho p_{110}, \quad (11)$$

$$(\rho + 1)p_{102} = \rho p_{002} + 2\gamma p_{111},$$

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 p_{kij} = 1.$$

Разложим системы уравнений, которыми описываются рассматриваемые СМО, по степеням малого параметра  $\rho \rightarrow 0$  с целью нахождения решения и выражений для вероятности потери вызова при небольшой нагрузке системы.

Обозначим  $q_1$  вероятность потери вызова для СМО типа  $M / M / 1 / 0 / 1 / M$  и  $q_2$  — для СМО типа  $M / M / 1 / 0 / 1 / E_2$ . Вероятность потери вызова определяется следующим образом: вызов считается утерянным, если канал обслуживания и место на орбите (или на какой-то из фаз) заняты. Тогда

$$q_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = 1, \quad H(t) = 1\} = p_{11}, \quad (12)$$

$$q_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = 1, Y(t) + Z(t) = 1\} = p_{101} + p_{110}. \quad (13)$$

Пусть

$$p_{ij}(\rho) = p_{ij}^0 + p_{ij}^1 \rho + p_{ij}^2 \rho^2 + \dots, \quad i, j = \overline{0, 1}, \quad (14)$$

$$p_{kij}(\rho) = p_{kij}^0 + p_{kij}^1 \rho + p_{kij}^2 \rho^2 + \dots, \quad k, i, j = \overline{0, 1}, \quad i + j \leq 1. \quad (15)$$

Заменим в уравнениях систем (10) и (11) все переменные на (14) и (15) соответственно. Тогда система (10) получит вид

$$(\rho + j\gamma)(p_{0j}^0 + p_{0j}^1 \rho + p_{0j}^2 \rho^2 + \dots) = (p_{1j}^0 + p_{1j}^1 \rho + p_{1j}^2 \rho^2 + \dots), \quad j \leq 2,$$



$$\begin{aligned}
& (\rho+1)(p_{1j}^0 + p_{1j}^1\rho + p_{1j}^2\rho^2 + \dots) = \\
& = \rho(p_{0j}^0 + p_{0j}^1\rho + p_{0j}^2\rho^2 + \dots) + (j+1)\gamma(p_{0,j+1}^0 + p_{0,j+1}^1\rho + p_{0,j+1}^2\rho^2 + \dots) + \\
& \quad + \rho(p_{1,j-1}^0 + p_{1,j-1}^1\rho + p_{1,j-1}^2\rho^2 + \dots), \quad j \leq 1, \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho+1)(p_{12}^0 + p_{12}^1\rho + p_{12}^2\rho^2 + \dots) = \\
& = \rho(p_{02}^0 + p_{02}^1\rho + p_{02}^2\rho^2 + \dots) + \rho(p_{11}^0 + p_{11}^1\rho + p_{11}^2\rho^2 + \dots), \\
& \quad \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 p_{ij}^0 + \rho \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 p_{ij}^1 + \rho^2 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 p_{ij}^2 + \dots = 1,
\end{aligned}$$

а система уравнений (11) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
& (\rho + j2\gamma + i2\gamma)(p_{0ij}^0 + p_{0ij}^1\rho + \dots) = \\
& = (p_{ij}^0 + p_{ij}^1\rho + \dots) + (i+1)2\gamma(p_{0,i+1,j-1}^0 + p_{0,i+1,j-1}^1\rho + \dots), \\
& \quad i \geq 0, j \geq 0, i+j \leq 2, \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho + i2\gamma + 1)(p_{1ij}^0 + p_{1ij}^1\rho + \dots) = \\
& = \rho(p_{0ij}^0 + p_{0ij}^1\rho + \dots) + (i+1)2\gamma(p_{1,i+1,j-1}^0 + p_{1,i+1,j-1}^1\rho + \dots) + \\
& + (j+1)2\gamma(p_{0,i,j+1}^0 + p_{0,i,j+1}^1\rho + \dots) + \rho(p_{0,i-1,j}^0 + p_{0,i-1,j}^1\rho + \dots), \quad i \leq 1, j \leq 1, i+j \leq 2, \\
& \quad (4\gamma + 1)(p_{120}^0 + p_{120}^1\rho + \dots) = \\
& = \rho(p_{020}^0 + p_{020}^1\rho + \dots) + 2\gamma(p_{021}^0 + p_{021}^1\rho + \dots) + \rho(p_{110}^0 + p_{110}^1\rho + \dots), \\
& (\rho+1)(p_{102}^0 + p_{102}^1\rho + \dots) = \rho(p_{002}^0 + p_{002}^1\rho + \dots) + 2\gamma(p_{111}^0 + p_{111}^1\rho + \dots), \\
& \quad \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 p_{kij}^0 + \rho \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 p_{kij}^1 + \rho^2 \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 p_{kij}^2 + \dots = 1, \quad i+j \leq 2.
\end{aligned}$$

Раскроем скобки в уравнениях систем (16) и (17) и сгруппируем члены при соответствующих степенях  $\rho$ . Например, первое уравнение из (16) получит вид

$$\begin{aligned}
& j\rho p_{0j}^0 + (p_{0j}^0 + j\rho p_{0j}^1)\rho + (p_{0j}^1 + j\rho p_{0j}^2)p_{0j}^2\rho^2 + \dots = \\
& = p_{1j}^0 + p_{1j}^1\rho + p_{1j}^2\rho^2 + \dots, \quad j \leq 1. \tag{18}
\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты в правых и левых частях уравнений (16) и (17) при соответствующих степенях  $\rho$ . Например, для (18) получим  $\rho^0$ :  $j\rho p_{0j}^0 = p_{1j}^0$ ,  $\rho^1$ :  $p_{0j}^0 + j\rho p_{0j}^1 = p_{1j}^1$ ,  $\rho^2$ :  $p_{0j}^1 + j\rho p_{0j}^2 = p_{1j}^2$ , ... Отсюда путем несложных арифметических операций находим выражения для переменных  $p_{ij}^l$ ,  $p_{kij}^l$ ,  $l=0,1, \dots$

Формулы для вычисления  $p_{ij}^l$ ,  $l=0,1, \dots$ , имеют вид

$$\begin{aligned}
& p_{12}^0 = 0, p_{12}^l = p_{02}^{l-1} + p_{11}^{l-1}, \\
& p_{10}^0 = 0, p_{10}^l = p_{00}^{l-1}, \\
& p_{02}^0 = \frac{1}{2\gamma} p_{12}^0, p_{02}^l = \frac{1}{2\gamma} p_{11}^{l-1},
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
p_{01}^0 &= \frac{1}{\gamma} p_{10}^0, p_{01}^l = \frac{1}{\gamma} p_{10}^{l-1}, \\
p_{11}^0 &= 2\gamma p_{02}^0, p_{11}^l = p_{10}^{l-1} + p_{01}^{l-1}, \\
p_{00}^0 &= 1 - \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 p_{ij}^0, \quad i+j \neq 0, \quad p_{00}^l = -\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 p_{ij}^l, \quad i+j \neq 0.
\end{aligned}$$

Тогда с учетом (14) решение системы (16) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
p_{00}(\rho) &= 1 - \rho - \frac{1}{\gamma} \rho^2 - \frac{1}{2\gamma} \rho^3 + \dots, \\
p_{01}(\rho) &= \frac{1}{\gamma} \rho^2 - \frac{1}{\gamma} \rho^3 + \dots, \\
p_{02}(\rho) &= \frac{1}{2\gamma} \rho^3 + \dots, \\
p_{10}(\rho) &= \rho - \rho^2 - \frac{1}{\gamma} \rho^3 + \dots, \\
p_{11}(\rho) &= \rho^2 + \frac{1-\gamma}{\gamma} \rho^3 + \dots, \\
p_{12}(\rho) &= \rho^3 + \dots
\end{aligned}$$

Формулы для вычисления  $p_{kij}^l$ ,  $l=0,1,\dots$ , имеют вид

$$\begin{aligned}
p_{100}^0 &= 0, p_{100}^l = p_{000}^{l-1}, \\
p_{001}^0 &= 2\gamma p_{100}^0, p_{001}^l = \frac{1}{2\gamma} p_{100}^{l-1}, \\
p_{120}^0 &= 0, p_{120}^l = \frac{1}{4\gamma+1} (p_{020}^{l-1} + p_{110}^{l-1}), \\
p_{111}^0 &= \frac{4\gamma p_{120}^0}{2\gamma+1}, p_{111}^l = \frac{1}{2\gamma+1} (4\gamma p_{120}^l + p_{011}^{l-1} + p_{101}^{l-1} - p_{111}^{l-1}), \\
p_{102}^0 &= 2\gamma p_{111}^0, p_{102}^l = 2\gamma p_{111}^l + p_{002}^{l-1} - p_{102}^{l-1}, \\
p_{020}^0 &= \frac{1}{4\gamma} p_{120}^0, p_{020}^l = \frac{1}{4\gamma} (p_{120}^l - p_{020}^{l-1}), \\
p_{011}^0 &= p_{020}^0, p_{011}^l = \frac{1}{4\gamma} (p_{111}^l + 4\gamma p_{020}^l - p_{011}^{l-1}), \\
p_{110}^0 &= p_{011}^0, p_{110}^l = \frac{1}{1+2\gamma} (p_{010}^{l-1} + p_{100}^{l-1}), \\
p_{110}^l &= \frac{1}{2\gamma+1} (2\gamma p_{011}^l + p_{010}^{l-1} + p_{100}^{l-1} - p_{110}^{l-1}), \\
p_{002}^0 &= p_{102}^0 + 2\gamma p_{011}^0, p_{002}^l = \frac{1}{4\gamma} (p_{102}^l + 2\gamma p_{011}^l - p_{002}^{l-1}), \\
p_{010}^0 &= \frac{1}{2\gamma} p_{110}^0, p_{010}^l = \frac{1}{2\gamma} (p_{110}^l - p_{010}^{l-1}), \\
p_{000}^0 &= 1 - \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 p_{kij}^0, \quad i+j+k \neq 0, \\
p_{000}^l &= -\sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 p_{kij}^l, \quad i+j+k \neq 0.
\end{aligned}$$

Тогда с учетом (15) решение системы (17) будет иметь вид

$$p_{000}(\rho) = 1 - \rho - \frac{\gamma + 1}{\gamma(2\gamma + 1)}\rho^2 + \frac{120\gamma^4 + 304\gamma^3 + 360\gamma^2 + 142\gamma + 17}{8\gamma(2\gamma + 1)^3(4\gamma + 1)}\rho^3 + \dots,$$

$$p_{001}(\rho) = \frac{1}{2\gamma}\rho^2 - \frac{1}{2\gamma}\rho^3 + \dots,$$

$$p_{002}(\rho) = \frac{32\gamma^3 + 32\gamma^2 + 8\gamma + 1}{8\gamma(2\gamma + 1)^2(4\gamma + 1)}\rho^3 + \dots,$$

$$p_{010}(\rho) = \frac{1}{2\gamma(2\gamma + 1)}\rho^2 - \frac{24\gamma^3 + 40\gamma^2 + 28\gamma + 5}{4\gamma(2\gamma + 1)^3(4\gamma + 1)}\rho^3 + \dots,$$

$$p_{011}(\rho) = \frac{8\gamma^2 + 8\gamma + 1}{4\gamma(2\gamma + 1)^2(4\gamma + 1)}\rho^3 + \dots,$$

$$p_{020}(\rho) = \frac{1}{4\gamma(2\gamma + 1)(4\gamma + 1)}\rho^3 + \dots,$$

$$p_{100}(\rho) = \rho - \rho^2 + \frac{\gamma + 1}{\gamma(2\gamma + 1)}\rho^3 + \dots,$$

$$p_{101}(\rho) = \frac{2\gamma}{2\gamma + 1}\rho^2 - \frac{64\gamma^5 + 46\gamma^4 - 24\gamma^3 - 12\gamma^2 + 3\gamma + 1}{2\gamma(2\gamma + 1)^3(4\gamma + 1)}\rho^3 + \dots,$$

$$p_{110}(\rho) = \frac{1}{2\gamma + 1}\rho^2 - \frac{24\gamma^4 + 24\gamma^3 + 8\gamma^2 - 3\gamma - 1}{2\gamma(2\gamma + 1)^3(4\gamma + 1)}\rho^3 + \dots,$$

$$p_{111}(\rho) = \frac{2\gamma(4\gamma + 3)}{(2\gamma + 1)^2(4\gamma + 1)}\rho^3 + \dots,$$

$$p_{120}(\rho) = \frac{1}{(2\gamma + 1)(4\gamma + 1)}\rho^3 + \dots$$

Согласно (12) и (13) имеем

$$q_1 = p_{12}(\rho) = \rho^3 + \dots \approx \rho^3,$$

$$q_2 = p_{101}(\rho) + p_{110}(\rho) = \left( \frac{4\gamma^2(4\gamma + 3)}{(2\gamma + 1)^2(4\gamma + 1)}\rho^3 + \dots + \frac{2\gamma(4\gamma + 3)}{(2\gamma + 1)^2(4\gamma + 1)}\rho^3 + \dots \right) \approx$$

$$\approx \frac{8\gamma^2 + 6\gamma + 1}{(2\gamma + 1)(4\gamma + 1)}\rho^3 = \rho^3.$$

Тогда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{q_1}{q_2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \frac{\rho^3 + \dots}{\rho^3 + \dots} \right) = 1.$$

Итак, при малой загрузке системы вероятность потери вызова в случае эрланговского и марковского распределений на орбите почти одинакова.

Если обозначить вероятность занятости канала через  $B_1$  и  $B_2$  для СМО типов  $M/M/1/0/2//M$  и  $M/M/1/0/2//E_2$  соответственно, то

$$B_1 = p_{10}(\rho) + p_{11}(\rho) + p_{12}(\rho) = \rho - \rho^2 - \frac{1}{\gamma}\rho^3 + \rho^2 + \frac{1-\gamma}{\gamma}\rho^3 + \rho^3 + \dots \approx \rho,$$

$$B_2 = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 p_{1ij}(\rho) = \rho - \rho^2 + \frac{\gamma + 1}{\gamma(2\gamma + 1)}\rho^3 + \frac{2\gamma}{2\gamma + 1}\rho^2 -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{64\gamma^5 + 46\gamma^4 - 24\gamma^3 - 12\gamma^2 + 3\gamma + 1}{2\gamma(2\gamma + 1)^3(4\gamma + 1)} \rho^3 + \\
& + \frac{1}{2\gamma + 1} \rho^2 - \frac{24\gamma^4 + 24\gamma^3 + 8\gamma^2 - 3\gamma - 1}{2\gamma(2\gamma + 1)^3(4\gamma + 1)} \rho^3 + \\
& + \frac{2\gamma(4\gamma + 3)}{(2\gamma + 1)^2(4\gamma + 1)} \rho^3 + \frac{1}{(2\gamma + 1)(4\gamma + 1)} \rho^3 + \dots \approx \rho + \frac{5\gamma^4 - 16\gamma^2 - 8\gamma - 1}{\gamma(2\gamma + 1)^3(4\gamma + 1)} \rho^3, \quad i + j \leq 2.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{B_1}{B_2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \frac{\rho}{\rho + \frac{5\gamma^4 - 16\gamma^2 - 8\gamma - 1}{\gamma(2\gamma + 1)^3(4\gamma + 1)} \rho^3} \right) = 1.$$

Итак, при малой загрузке системы вероятность занятости канала в случае эрланговского и марковского распределений на орбите почти одинакова для данных систем.

**Система с ограниченной емкостью орбиты.** Поскольку для данной системы достаточно сложно получить аналитическое решение, то ограничим емкость орбиты большой константой  $N$  (метод, предложенный Уилкинсоном (Wilkinson)), т.е. рассмотрим СМО типа  $M/M/c/0/N/E_2$ . Тогда система уравнений (3)–(5) будет конечной, а СМО — эргодичной при любых условиях. Формулы (1), (2) преобразуются к виду

при  $0 \leq k \leq c-1, i+j \leq N$

$$q_{(kij)(g,m,n)} = \begin{cases} \lambda, & (g,m,n) = (k+1,i,j), \\ j \cdot 2\nu, & (g,m,n) = (k+1,i,j-1), \quad j \geq 1, \\ i \cdot 2\nu, & (g,m,n) = (k,i-1,j+1), \quad i \geq 1, \quad j \leq N-1, \\ k\mu, & (g,m,n) = (k-1,i,j), \quad k \neq 0, \\ -(\lambda + i \cdot 2\nu + j \cdot 2\nu + k\mu), & (g,m,n) = (k,i,j), \\ 0 & \text{в других случаях;} \end{cases} \quad (19)$$

при  $k=c, i+j \leq N$

$$q_{(cij)(g,m,n)} = \begin{cases} \lambda, & (g,m,n) = (c,i+1,j), \quad i \leq N-1, \quad i+j \leq N-1, \\ i \cdot 2\nu, & (g,m,n) = (c,i-1,j+1), \quad i \geq 1, \quad j \leq N-1, \\ c\mu, & (g,m,n) = (c-1,i,j), \\ -(N \cdot 2\nu + c\mu), & (g,m,n) = (c,i,j), \quad i=N, \quad j=0, \\ -(\lambda + c\mu), & (g,m,n) = (c,i,j), \quad i=0, \quad j=N, \\ -(\lambda + i \cdot 2\nu + c\mu), & (g,m,n) = (c,i,j), \quad i \leq N-1, \quad j \leq N-1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (20)$$

Для формул (3)–(5) согласно (6), (7) ( $p_{kij} = 0$ , если  $\forall k, \forall i, \forall j < 0$  или  $\forall k, \forall i, \forall j > N$ , или  $i+j \leq N$ ) имеем

$$(\lambda + j2\nu + i2\nu + k\mu)p_{kij} = \lambda p_{k-1,i,j} + (k+1)\mu p_{k+1,i,j} + (i+1)2\nu p_{k,i+1,j-1} + (j+1)2\nu p_{k-1,i,j+1} + \lambda p_{k-1,i,j}, \quad 0 \leq k \leq c-1, \quad i \geq 0, \quad j \geq 0, \quad i+j \leq N, \quad (21)$$

$$(\lambda + i2\nu + c\mu)p_{cij} = \lambda p_{c-1,i,j} + (i+1)2\nu p_{c,i+1,j-1} +$$

$$+(j+1)2\nu p_{c-1,i,j+1} + \lambda p_{c,i-1,j}, \quad k=c, \quad 0 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq j \leq N-1, \quad i+j \leq N, \quad (22)$$

$$(N2\nu + c\mu)p_{cN0} = \lambda p_{c-1,N,0} + 2\nu p_{c-1,N,1} + \lambda p_{c,N-1,0}, \quad k=c, \quad i=N, \quad j=0, \quad (23)$$

$$(\lambda + c\mu)p_{c0N} = \lambda p_{c-1,0,N} + 2\nu p_{c,1,N-1}, \quad k=c, \quad i=0, \quad j=N, \quad (24)$$

и условие нормирования

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M p_{kij} = 1, \quad i+j \leq N. \quad (25)$$

Система (21)–(25) может быть решена на компьютере с помощью стандартных процедур. Однако количество памяти, необходимой под выделение матрицы системы, является значительным, хотя большинство ее элементов — нулевые. Поэтому решение системы (21)–(25) было выполнено путем использования технологии разреженных матриц (Sparse Matrixes) [10] в среде Matlab<sup>®</sup>. Разреженными называют такие матрицы, большинство элементов которых являются нулевыми. Практически матрицу размера  $n \times n$  можно считать разреженной, если количество ее ненулевых элементов имеет порядок  $n$ . Элементы таких матриц заполняются следующим образом: если значение элемента не равно нулю, то он вместе со своими индексами записывается, в противном случае — не записывается. Таким образом, сохраняется большой объем оперативной памяти машины.

Для работы с разреженными матрицами следует использовать численные методы, позволяющие упрощать арифметические операции с нулевыми элементами (например, получение нуля при умножении на нуль или пропуск операций добавления и вычитания при использовании этих операций с нулевыми элементами матриц). Для таких матриц создано ряд функций, которые обеспечивают эффективную работу с ними и устраняют тривиальные операции с нулевыми элементами матриц.

Технология разреженных матриц позволяет значительно сократить не только использование оперативной памяти компьютера, а и время вычисления. Доказано, что для разреженной матрицы время обработки ее элементов пропорционально количеству ее ненулевых элементов.

В табл. 1 получены результаты зависимости вероятности занятости канала  $B = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = c\}$  от значения ограничения  $N$  для систем  $M/M/c/0/N//E_2 (B_E)$  и  $M/M/c/0/N//M (B_M)$  при  $\nu = 0.5$ ,  $\mu = 1$ ,  $c = 1$  и различных значениях  $\lambda$ . Как видно, с увеличением  $N$  разность  $|B_E - B_M|$  почти не изменяется и представляет собой довольно малую величину.

В результате работы программы была получена следующая зависимость вероятности занятости канала  $B = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = c\}$  от среднего времени ожидания  $\tau = 1/\nu$  на орбите и от интенсивности  $\lambda$  входного потока (рис. 5): с увеличением интенсивности входного потока вероятность занятости канала увеличивается. При высокой нагрузке системы, когда  $\lambda/(c\nu) \rightarrow 1$ , вероятность занятости канала становится довольно большой. Из графика видно, что возвращения влияют на вероятность занятости канала — с увеличением длительности между возвращениями вероятность занятости канала уменьшается.

Также получена зависимость вероятности занятости канала  $B$  от средней интенсивности возвращений  $\nu$  на цикле орбиты в зависимости от типа распределения вызовов на орбите. Из рис. 6 видно, что вероятность занятости канала больше в случае эрланговского распределения, однако на незначительную величину — приблизительно на 0,002–0,01. Это говорит о том, что при некоторых параметрах системы можно использовать на орбите экспоненциальное время распределения, при котором будет адекватно описываться орбита реальной системы.

**Таблица 1**

$\lambda$	$N$	$B_M$	$B_E$	$ B_E - B_M $
0,5	1	0,400000000	0,404444444	0,004444444
	2	0,440000000	0,445869368	0,005869368
	3	0,464285714	0,469735038	0,005449324
	4	0,478991597	0,483285488	0,004293892
	5	0,487804878	0,490871231	0,003066353
	50	0,499999999	0,500000000	0,000000001
0,9	1	0,547339323	0,553420824	0,006081501
	2	0,601861374	0,613777889	0,011916515
	3	0,643809215	0,660405695	0,016596480
	4	0,677050406	0,697037694	0,019987288
	5	0,704013207	0,726269004	0,022255797
	50	0,894909777	0,897889686	0,002979910
2	1	0,709677419	0,707070707	0,002606712
	2	0,743455497	0,739669807	0,003785690
	3	0,770581778	0,766268547	0,004313232
	4	0,792778227	0,788202752	0,004575475
	5	0,811233139	0,806481221	0,004751918
	50	0,963709466	0,955768451	0,007941015
	55	0,966722933	0,958899039	0,007823894
	70	0,973362087	0,965941754	0,007420333

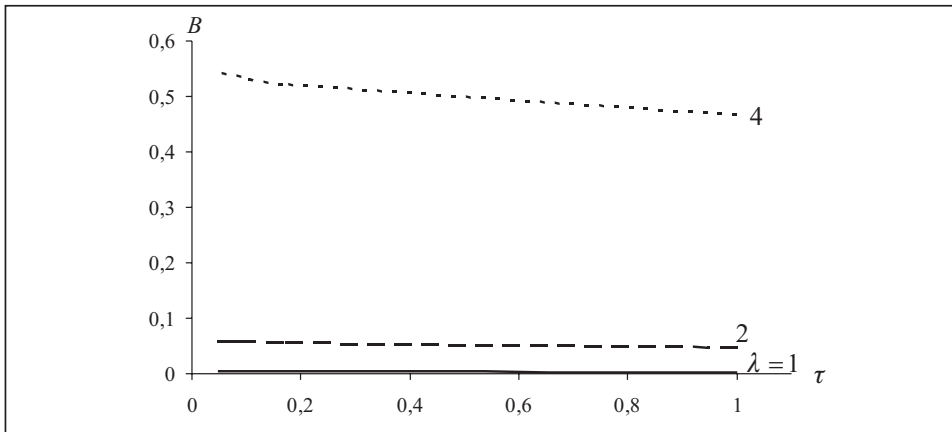


Рис. 5. Зависимость  $B$  от  $\tau$  и  $\lambda$  при  $c=5, N=50, \mu=1$

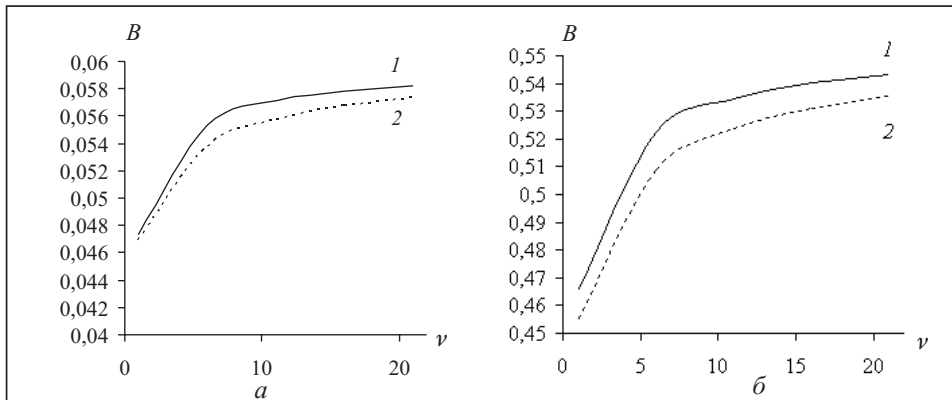


Рис. 6. Зависимость  $B$  от  $\nu$  и эрланговского (1) и экспоненциального (2) типов распределений на орбите при  $N=50, c=5, \lambda=2$  (а) и  $\lambda=4$  (б)

В настоящей статье раскрыты принципы функционирования call-центра, построена его аналитическая модель с двухфазным эрланговским распределением на орбите и выполнен сравнительный анализ СМО типов  $M/M/c/0/N//M$  и  $M/M/c/0/N//E_2$ . Выполнен асимптотический анализ некоторых параметров систем  $M/M/c/0/2//M$  и  $M/M/c/0/2//E_2$ . При исследовании системы использовались технология разреженных матриц и метод рядов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. — 3-е изд., пер. и доп. — М.: КомКнига, 2005. — 400 с.
2. Коба Е.В. Об условии устойчивости системы обслуживания  $M/D/1$  с повторяющимися заявками и ограниченным временем пребывания // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 2. — С. 184–186.
3. Коба Е.В. Условие устойчивости некоторых типовых систем обслуживания с возвращением заявок // Там же. — 2005. — 41, № 1. — С. 124 — 127.
4. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial queues. — London: Chapman & Hall, 1997. — 395 p.
5. Aguir M. S., Karaesmen F., Aksin Z., Chauvet F. The impact of retrials on call center performance // OR Spectrum. — 2004. — 26, N 3 — P. 353–376.
6. Pustova S. Modeling call center operation with taking into account repeated attempts of subscribers // Вісник НАУ. — 2006. — 3, N 29. — С. 21–24.
7. Коба О.В., Пустова С.В. Аналітична модель функціонування call-центру // Доп. НАН України. — 2007. — № 2. — С. 19–25.
8. Пустова С.В. Статистична модель функціонування call-центру // Матеріали VIII Міжнарод. наук.-техн. конф. «АВІА-2007». — Т.1. — Київ: НАУ, 2007. — С. 13.61–13.64.
9. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. под ред. В. И. Неймана. — М.: Машиностроение, 1979. — 432 с.
10. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. — М.: Мир, 1977. — 190 с.

*Поступила 26.06.2008*