УДК 519.7; 519.81

С.И. КОЛЕСНИКОВА

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНИВАНИЮ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ПРИЗНАКОВ В ТЕСТОВОМ РАСПОЗНАВАНИИ[1]

Ключевые слова: *интеллектуальная система, тестовое распознавание, анализ данных и знаний, мультимножество, весовые коэффициенты признаков, метод анализа иерархий*.

ВВЕДЕНИЕ

Основой одного из наиболее эффективных подходов к созданию интеллектуальных систем являются тестовые методы распознавания образов [1–3], использующие для принятия решений наборы (тесты), содержащие меньшее количество признаков и с большим весом, где под весом теста понимается сумма весовых коэффициентов признаков (ВКП) [1, 2].

Для выявления общих свойств (различий), присущих изучаемым объектам, существует ряд алгоритмов анализа обучающей выборки, включающих понятие «закономерность». Под закономерностями [3] будем понимать подмножества характеристических признаков с определенными легко интерпретируемыми свойствами, влияющими на различимость объектов из разных образов, устойчиво наблюдаемыми для объектов из обучающей выборки и проявляющимися на других объектах той же природы, а также весовые коэффициенты таких признаков, отражающие их вклад в различимость объектов.

Одним из методов определения «весов» сравниваемых признаков (объектов, альтернатив) является метод, предложенный в [4]. Он учитывает вклад признаков в распознающую способность теста с учетом их взаимозависимости и базируется на представлении совокупности всех различимых пар объектов из разных классов (образов) для каждого признака в виде мультимножества [5], а также применении метода анализа иерархий (МАИ) [6], использующего парные сравнения признаков на основе специальным образом выбранных мер относительной важности признаков, учитывающих их особенности. Однако отмеченная, например, в [7, 8] негативная сторона МАИ, связанная с эффектом единичной нормировки и приводящая к тому, что предпочтения, выявленные на всем множестве признаков, могут не совпадать с «частными» предпочтениями на подмножестве признаков, может привести к неточности в принятии решения.

В настоящей статье описывается матричный способ представления данных и знаний, дается постановка задачи, кратко излагается метод оценивания ВКП, основанный на формализме мультимножеств и МАИ [4], доказываются свойства процедуры системного учета взаимовлияния признаков (конструктивная идея которой принадлежит Ю.Я. Самохвалову [7]) применительно к оцениванию их весовых коэффициентов, позволяющая обойти противоречия МАИ, дан иллюстративный пример сравнительных характеристик приведенной процедуры и метода, ранее изложенного в [4], предлагаются пути дальнейшего развития метода.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

Изложение метода и модифицированной процедуры оценивания ВКП основано на матричной модели представления данных и знаний, включающей матрицу описаний (Q) объектов в пространстве характеристических признаков и матрицу различений (R) объектов в пространстве классификационных признаков [3].

Элемент q_{ij} матрицы Q задает значение j-го признака для i-го объекта. Если значение q_{ij} отмечено символом «–», то считается, что признак может принимать любое

[1]Работа поддержана РФФИ (проект № 07-01-00452, № 09-01-99014-р_офи).

© С.И. Колесникова, 2009

значение из соответствующего домена (например, в случае k-значных признаков — любые целочисленные значения из заданного интервала значений признака).

Элемент r_{ij} матрицы R задает принадлежность i-го объекта одному из выделенных классов по j-му механизму классификации (классификационному атрибуту). Множество всех неповторяющихся строк матрицы R сопоставлено множеству выделенных образов. Элементами образа являются объекты, которые представлены строками матрицы Q, сопоставленными одинаковым строкам матрицы R. Задача распознавания состоит в определении по матрицам Q и R образа, которому принадлежит заданный совокупностью признаков исследуемый объект, как правило, не входящий в обучающую выборку. При $q_{ij} \in \{0, 1, «–»\}$ используются следующие определения.

Признаки (атрибуты) назовем зависимыми, если имеется хотя бы одна пара объектов из разных образов, различаемая этими атрибутами. Совокупность признаков, различающих все пары объектов из разных образов, назовем диагностическим тестом (далее просто тест).

Строки матрицы тестов T соответствуют тестам, а столбцы — признакам Z, каждый из которых содержится хотя бы в одном тесте.

Два объекта считаются различимыми, если хотя бы один признак в описании одного из них принимает значение 1 (0), а в описании другого — инверсное (0 (1)).

Под весовым коэффициентом признака (теста) («весом» признака, теста) понимается числовая оценка его различающей способности [2, 3, 9].

Множество обязательных признаков (входящих во все безызбыточные или тупиковые [1] тесты) назовем ядром всех диагностических тестов, поскольку исключение любого признака из ядра нарушает свойство каждого из тестов быть тестом.

Реакция матрицы описаний на тест есть совокупность строк матрицы описаний, в которых значение признаков, входящих в тест, совпадает со значениями аналогичных признаков исследуемого объекта. Примеры матриц описаний Q, различений R и тестов T приведены ниже (для простоты изложения матрица различений R представлена одним столбцом):

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&0&–&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&1&0\\ 1&–&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&–&0\\ 1&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&0&1 \end{bmatrix} \end{array}; \quad R = \begin{bmatrix} 1\\2\\2\\2\\3\\4\\5\\6 \end{bmatrix};$$

$$T = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&0&0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть по матрицам Q и R построены все минимальные и все (часть) безызбыточные (тупиковые) диагностические тесты, представленные матрицей тестов T, строки которой сопоставлены тестам, а столбцы — характеристическим признакам, и определено число различающих пар «объект–объект» по каждому характеристическому признаку. Требуется определить весовые коэффициенты характеристических признаков, входящих в объединение всех (части) диагностических тестов [3] без предположения о независимости признаков.

3. СИСТЕМНЫЙ УЧЕТ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ПРИЗНАКОВ

3.1. Метод определения весовых коэффициентов признаков, основанный на формализме мультимножеств и методе анализа иерархий. Кратко изложим особенности ранее полученного метода (подробно описанного в [4]), иллюстрация к которому приведена в Приложении.

Соответствующий признаку z_i i-й столбец матрицы Q порождает совокупность P_i различимых этим признаком пар объектов из разных образов (см. пример из Приложения). Таким образом представленные признаки являются множествами P_i с повторяющимися элементами (мультимножествами) [4, 5].

Метод состоит из трех этапов, на каждом из которых формируется матрица парных сравнений (МПС) $A = \|a_{ij}\|_{g \times g}$ признаков $(z_1, z_2, \ldots, z_g)$, образующих тест Θ (для простоты изложения будем считать, что тест $\Theta = (z_1, z_2, \ldots, z_g)$ образован совокупностью первых g признаков из M исходных) на основе определенной меры относительной важности признака i над признаком j, в качестве которой поэтапно выбираются величины (верхний индекс элемента МПС a_{ij}^s обозначает номер этапа, $s \in \{1, 2, 3\}$):

$$a_{ij}^1 = \frac{|P_i|}{|P_j|}; \quad a_{ij}^2 = \frac{\delta(|P_i - P_j|)}{\delta(|P_j - P_i|)}; \quad a_{ij}^3 = \frac{\delta(/P_i - P_j/)}{\delta(/P_j - P_i/)}. \tag{1}$$

Здесь $|P_i|$, $/P_i/$ — мощность (общее количество элементов с учетом их кратности) и размерность i-го мультимножества (количество уникальных элементов), сопоставленного признаку z_i соответственно, $P_i - P_j$ — разность мультимножеств, соответствующих признакам z_i и z_j, где функция $\delta(x) = x$, если $x \neq 0$, и $\delta(x) = 1$ в противном случае. Особенностью введенных в [4] мер относительной важности (1) является возможность системно учесть не только общие свойства сравниваемых признаков (степень сходства или различия), но, что особенно важно, и их уникальные свойства (степень приоритетности одного признака над другими).

На s-м этапе по данному методу вычисляется g — компонентный вектор значений весовых коэффициентов признаков $W_s = (w_1^s, w_2^s, \ldots, w_g^s)$, совпадающий со значением нормализованной оценки (как среднее геометрическое элементов строки) главного собственного вектора МПС. Вектор $W = (W_1 W_2 W_3)^{1/3}$ предлагается принять за обобщенные значения весовых коэффициентов признаков (глобальные приоритеты), входящих в тест.

Приведем пример из работы [2], связанный с целесообразностью изменения состава тестового набора (удаление признака).

Пример 1. Пусть матрица Q содержит описание шести объектов, в матрице R указывается на соответствие номеров объектов и классов, которым объекты принадлежат:

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}; \quad R = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\!\!\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Для данного примера фрагмента теста $\Theta = \{z_1, z_2\}$, различающего объекты двух классов, тупиковыми тестами являются наборы признаков [2] $\Theta_1 = \{z_1, z_2, z_3\}$, $\Theta_2 = \{z_1, z_2, z_4\}$ и $\Theta_3 = \{z_2, z_3, z_4\}$. Если использовать тестовый алгоритм, то объект $S = (0, 1, 2, 1)$ не будет отнесен ни к одному из классов, однако фрагмент (0, 1), порождаемый набором $\Theta = \{z_1, z_2\}$, содержится в S и соответствующих объектах из первого класса и не содержится в объектах из второго класса, что дает основание полагать, что распознаваемый объект более близок к первому классу.

Прежде чем сформулировать и доказать результат, в котором выясняются условия, при которых бинарное отношение (предпочтения) $z_i \succ z_j$ ($z_i \prec z_j$) сохраняется на множестве Θ_2, напомним требования к матрице относительных весов [6] $A = \| a_{ij} \|_{n \times n}$, $a_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$, где w_i, w_j — компоненты весового вектора $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n\}^{T}$, n — количество сравниваемых признаков:

$$
\begin{aligned}
&1)\ a_{ij} > 0;\ i, j = \overline{1, n};\\
&2)\ a_{ij} = a_{ji}^{-1};\ i, j = \overline{1, n};\\
&3)\ a_{ij} = a_{ik} a_{kj},\ i, j = \overline{1, n};
\end{aligned}
\tag{2}
$$

4) число n является максимальным собственным значением матрицы A, и для некоторого единственного (нормированного) вектор-столбца $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n\}^{T}$ с положительными компонентами выполняется равенство $AW = nW$.

Теорема 1. Пусть для МПС $A' = \| a'_{ij} \|_{(g-1)\times(g-1)}$ ($a'_{ij} = w'_i / w'_j$) и $A = \| a_{ij} \|_{g \times g}$ ($a_{ij} = w_i / w_j$) признаков множеств $\Theta_1 = \{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}\}$ и $\Theta_2 = \{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}, z_g\}$ соответственно выполнены свойства 1–4, выраженные формулой (2). Тогда при выполнении условий

$$a'_{ij} = a_{ij},\ i, j < g, \tag{3}$$

$$(a'_{ij})^{g} > 1\ \ ((a'_{ij})^{g} < 1) \tag{4}$$

бинарные отношения (предпочтения) $z_i \succ z_j$ ($z_i \prec z_j$), z_i, $z_j \in \Theta_1 \subset \Theta_2$, $i \neq j$, индуцированные на множествах Θ_1 и Θ_2 посредством применения стандартной процедуры метода анализа иерархий, совпадают.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Следствие. При выполнении условия (3) справедлива формула, связывающая ВКП двух множеств — Θ_1 и Θ_2:

$$w_i = (w'_i)^{(g-1)/g} (a_{ig})^{1/g}. \tag{5}$$

Замечание. Условие (3), вообще говоря, является естественным (см. примеры из работы [7]), однако следует учитывать в конкретных задачах «групповой эффект» и «человеческий фактор» при экспертном оценивании признаков (альтернатив), приводящий, например, к нарушению свойства 3 формулы (2), которое, в свою очередь, приводит к некорректному использованию МАИ, так как собственный вектор такой (несовместной) МПС соответствует максимальному собственному значению, которое строго больше n, а не равно n (см. свойство 4).

3.2. Процедура системного учета взаимовлияния признаков при оценивании их весовых коэффициентов. Кратко изложим процедуру, предложенную в [7], по шагам применительно к задаче оценивания ВКП в тестовом распознавании и докажем ее основное свойство.

1. Построим МПС на каждом из ν этапов (по числу ν мер относительной важности одного признака над другим). Результатом каждого s-го этапа ($s \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$) является g-компонентный вектор нормализованных значений весовых коэффициентов признаков — $W_s = (w_1^s, w_2^s \ldots, w_g^s)$. Введем весовые коэффициенты мер относительной важности одного признака над другим, обозначенные c_s, $s \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, $\sum\limits_{s=1}^{\nu} c_s = 1$.

2. Формируем векторы локальных относительных ВКП по каждой паре признаков z_i, z_j: $w_{ij}^s = \left(\dfrac{w_i^s}{w_i^s + w_j^s}, \dfrac{w_j^s}{w_i^s + w_j^s} \right)$, $s \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, g\}$.

3. Формируем всевозможные векторы (w_{ij}^i, w_{ij}^j) локальных относительных ВКП z_i, z_j относительно всей совокупности мер относительной важности призна-

ков, компоненты которых находим по формулам: $w_{ij}^{i}=\sum_{s=1}^{\nu} c_s \frac{w_i^s}{w_i^s+w_j^s}$, $w_{ij}^{j}=\sum_{s=1}^{\nu} c_s \frac{w_j^s}{w_i^s+w_j^s}$ и оформляем в виде матрицы $W=\| w_{ij} \|=\|(w_{ij}^{i}, w_{ij}^{j})\|$.

4. Итоговые значения ВКП считаем по одной из формул [6]: $V_i^{(1)}=\sum_{j=1}^{g} w_{ij}^{i}$ или $V_i^{(2)}=\left(\prod_{j=1}^{g} w_{ij}^{i}\right)^{1/g}$, $i \in \{1, 2, \ldots, g\}$.

Свойство данной процедуры сформулировано и доказано в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть заданы множества (наборы, тесты) признаков Θ_1 и Θ_2, $\Theta_1 \subset \Theta_2$. Бинарные отношения (предпочтения) $z_i \succ z_j$ ($z_i \prec z_j$), z_i, $z_j \in \Theta_1 \subset \Theta_2$, $i \neq j$, индуцированные посредством применения стандартной процедуры метода анализа иерархий на множестве Θ_1 и процедуры системного учета взаимовлияния признаков на множестве Θ_2 при выполнении условия (3), совпадают.

Доказательство теоремы 2 вынесено в Приложение.

Следует отметить, что доказательства теорем 1 и 2 существенно опираются на свойства МПС (2), в частности на свойства 2 и 3, т.е. эти условия (поскольку они являются условиями применения МАИ) считаются по умолчанию выполненными. Однако, как было замечено, при относительном оценивании признаков при формировании МПС эти свойства часто нарушены. Выясним практически важные предпосылки для выполнения условия 3 формулы (2) на множестве признаков $\Theta_2=\{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}, z_g\}$, если они выполнены для множества $\Theta_1=\{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}\}$.

Теорема 3. Пусть для МПС $A'=\| a'_{ij} \|_{(g-1)\times(g-1)}$ выполнены свойства 1–4, выраженные формулой (2). Тогда и для матрицы $A=\| a_{ij} \|_{g \times g}$, построенной в соответствии с формулами (3) и $a_{ig} a_{gj}=a_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, g-1\}$, свойства 1–4 выполняются.

Доказательство теоремы 3 вынесено в Приложение.

Пример 2. Пусть заданы матрицы Q, R, T, приведенные в разд. 1. Нормализованные значения ВКП теста $\Theta=(z_5, z_9, z_{11})$ по методу из [4] и по изложенной выше процедуре представлены в табл. 1.

Таблица 1. Значения весовых коэффициентов признаков z_5, z_9, z_{11}

Весовые коэффициенты	Признаки		
	z_5	z_9	z_{11}
W^1	0,326	0,349	0,326
W^2	0,316	0,375	0,308
W^3	0,385	0,308	0,308
W	0,341	0,343	0,314
V^1	0,338	0,339	0,324

Строки 1–3 таблицы содержат значения ВКП, полученных на каждом этапе по методу, основанному на мультимножествах, и представляющих самостоятельный интерес. Строка 4 содержит значения ВКП, полученных как среднее геометрическое W значений ВКП, полученных на трех этапах (различающихся мерами относительной важности признаков). Строка 5 содержит значения ВКП, полученных как среднее арифметическое V_1 (или среднее геометрическое V_2) значений ВКП соответственно, полученных по модифицированной процедуре МАИ.

Заметим, что приоритеты признаков, полученных по методу, предложенному в работе [4], и по приведенной в данной статье процедуре с равновесными мерами относительной важности признаков, не совпадают только для 3-го этапа метода из [4], который не учитывает взаимосвязей признаков (рассматривает признаки как независимые).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для процедуры (модификации МАИ), предложенной в [7], доказаны свойства в виде трех теорем и обосновано применение соответствующего алгоритма определения весовых коэффициентов $(V_1, V_2, \ldots, V_g)$ признаков $(z_1, z_2, \ldots, z_g)$ на основе их взаимного влияния на множестве признаков теста, рассматриваемых совокупно по всем выбранным мерам относительной важности признаков (при распознавании образов).

Дальнейшее развитие, по-видимому, должно быть связано с выяснением условий, налагаемых на исходные данные и знания (матрицы Q, R, T), позволяющие корректное применение линейной свертки $V_i = \sum_{j=1}^{g} w_{ij}^i$ (шаг 4 приведенного алгоритма), так как ее применение допустимо лишь при определенных, довольно ограничительных предположениях, изложенных, например, в работе [10].

ПРИЛОЖЕНИЕ

ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМАЛИЗМА МУЛЬТИМНОЖЕСТВ

Проиллюстрируем применение формализма мультимножеств при получении ВКП по методу из [4]. Мультимножества, порожденные соответствующими признаками, имеют следующий вид:

$$P_5 = \{4\bullet(1\text{-}2),\ 1\bullet(1\text{-}3),\ 2\bullet(1\text{-}4),\ 8\bullet(2\text{-}5),\ 4\bullet(2\text{-}6),\ 2\bullet(3\text{-}5),\ 1\bullet(3\text{-}6),\ 4\bullet(4\text{-}5),\ 2\bullet(4\text{-}6)\},$$

$$P_9 = \{4\bullet(1\text{-}2),\ 1\bullet(1\text{-}6),\ 4\bullet(2\text{-}3),\ 8\bullet(2\text{-}4),\ 8\bullet(2\text{-}5),\ 1\bullet(3\text{-}6),\ 2\bullet(4\text{-}6),\ 2\bullet(5\text{-}6)\},$$

$$P_{11} = \{2\bullet(1\text{-}4),\ 2\bullet(1\text{-}5),\ 8\bullet(2\text{-}4),\ 8\bullet(2\text{-}5),\ 2\bullet(3\text{-}4),\ 2\bullet(3\text{-}5),\ 2\bullet(4\text{-}6),\ 2\bullet(5\text{-}6)\}.$$

Запись $8\bullet(2\text{-}5)$ означает, что элемент вида (2-5) в мультимножество P_5 входит восемь раз. Мощности мультимножеств равны: $|P_5| = 28$, $|P_9| = 30$, $|P_{11}| = 28$. На первом этапе составляем МПС признаков на основе меры относительной важности (1) $a_{ij}^1 = \dfrac{|P_i|}{|P_j|}$ (табл. 2).

Т а б л и ц а 2. Значения весовых коэффициентов признаков на этапе 1

Признаки	z_5	z_9	z_{11}	W_1
z_5	1	28/30	1	0,326
z_9	30/28	1	30/28	0,349
z_{11}	1	28/30	1	0,326

На втором этапе вычисляем разности соответствующих мультимножеств и значения их мощностей:

$$P_5 - P_9 = \{1\bullet(1\text{-}3),\ 2\bullet(1\text{-}4),\ 4\bullet(2\text{-}6),\ 2\bullet(3\text{-}5),\ 4\bullet(4\text{-}5)\},$$

$$P_9 - P_5 = \{1\bullet(1\text{-}6),\ 4\bullet(2\text{-}3),\ 8\bullet(2\text{-}4),\ 2\bullet(5\text{-}6)\},$$

$$P_5 - P_{11} = \{4\bullet(1\text{-}2),\ 1\bullet(1\text{-}3),\ 4\bullet(2\text{-}6),\ 1\bullet(3\text{-}6),\ 4\bullet(4\text{-}5)\},$$

$$P_{11} - P_5 = \{2\bullet(1\text{-}5),\ 8\bullet(2\text{-}4),\ 2\bullet(3\text{-}4),\ 2\bullet(5\text{-}6)\},$$

$$P_9 - P_{11} = \{4\bullet(1\text{-}2),\ 1\bullet(1\text{-}6),\ 4\bullet(2\text{-}3),\ 1\bullet(3\text{-}6)\},$$

$$P_{11} - P_9 = \{2\bullet(1\text{-}4),\ 2\bullet(1\text{-}5),\ 2\bullet(3\text{-}4),\ 2\bullet(3\text{-}5)\}.$$

Таким образом, искомые величины равны: $|P_5 - P_9| = 13$, $|P_9 - P_5| = 15$, $|P_5 - P_{11}| = 14$, $|P_{11} - P_5| = 14$, $|P_9 - P_{11}| = 10$, $|P_{11} - P_9| = 8$. Составляем МПС на основе меры относительной важности (1) $a_{ij}^2 = \dfrac{\delta(|P_i - P_j|)}{\delta(|P_j - P_i|)}$ (табл. 3).

На третьем этапе вычисляем размерности соответствующих мультимножеств и значения их мощностей: $/P_5 - P_9/ = 5$, $/P_9 - P_5/ = 5$, $/P_5 - P_{11}/ = 5$, $/P_{11} - P_5/ = 4$,

$/P_9 - P_{11}/ = 4$, $/P_{11} - P_9/ = 4$. Составляем МПС признаков на основе меры относительной важности (1) $a_{ij}^3 = \dfrac{\delta(/P_i - P_j/)}{\delta(/P_j - P_i/)}$ (табл. 4).

Таблица 3. Значения весовых коэффициентов признаков на этапе 2

Признаки	z_5	z_9	z_{11}	W_2
z_5	1	13/15	14/14	0,316
z_9	15/13	1	5/4	0,375
z_{11}	14/14	4/5	1	0,308

Таблица 4. Значения весовых коэффициентов признаков на этапе 3

Признаки	z_5	z_9	z_{11}	W_3^6
z_5	1	5/4	5/4	0,385
z_9	4/5	1	1	0,308
z_{11}	4/5	1	1	0,308

Найдем обобщенные значения ВКП, входящих в тест, как среднее геометрическое величин, найденных на этапах 1–3 (табл. 5).

Таблица 5. Обобщенные значения весовых коэффициентов признаков

Признаки	Весовые коэффициенты			
	W_1	W_2	W_3	W
z_5	0,326	0,316	0,385	0,341
z_9	0,349	0,375	0,308	0,343
z_{11}	0,326	0,308	0,308	0,314

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Очевидно, что для сохранения отношения $z_i \succ z_j$ на множестве Θ_2 должно выполняться неравенство $w_i > w_j$, и, поскольку автор МАИ [6] не возражает против применения в качестве приближения собственного вектора МПС такого вектора, компоненты которого вычисляются как среднее геометрическое по элементам строк, а затем нормализуются, это равносильно условию

$$\prod_{l=1}^{g} a_{il} > \prod_{l=1}^{g} a_{jl}. \tag{П1}$$

Заметим, что в силу условия (3) $\prod_{l=1}^{g} a_{il} = \prod_{l=1}^{g-1} a'_{il} a_{ig}$, $\prod_{l=1}^{g} a_{jl} = \prod_{l=1}^{g-1} a'_{jl} a_{jg}$, $i, j < g$, тогда неравенство (П1) примет вид $D'_{i,g-1} a_{ig} > D'_{j,g-1} a_{jg}$, $i, j < g$, где $D'_{t,g-1} = \prod_{l=1}^{g-1} a'_{tl}$, $t \in \{i, j\}$. Отсюда следует, что для справедливости отношения (5) должно быть справедливо отношение $\dfrac{a_{ig}}{a_{jg}} > \dfrac{D'_{j,g-1}}{D'_{i,g-1}}$, $i, j < g$. Преобразуем выражение слева от неравенства, осуществив соответствующие замены, применяя свойства 2 и 3 из формулы (2):

$$\frac{a_{ig}}{a_{jg}} = \frac{a_{ij} a_{jg}}{a_{jg}} = a_{ij} = a'_{ij},$$

$$\frac{D'_{j,g-1}}{D'_{i,g-1}} = \frac{\prod_{l=1}^{g-1} a'_{jl}}{\prod_{l=1}^{g-1} a'_{il}} = \prod_{l=1}^{g-1} \frac{a'_{jl}}{a'_{il}} = \prod_{l=1}^{g-1} \frac{a'_{ji} a'_{il}}{a'_{il}} = \prod_{l=1}^{g-1} \frac{1}{a'_{ij}} = (a'_{ij})^{1-g}.$$

Таким образом, для справедливости отношения (П1) необходимо должно выполняться неравенство $a'_{ij} > (a'_{ij})^{1-g}$, $i, j < g$, или $(a'_{ij})^g > 1$, $i, j < g$ что, очевидно, будет иметь место только в частных случаях.

Пусть для определенности $z_i \succ z_j$ для $z_i, z_j \in \Theta_1$, т.е. $w'_i > w'_j$, откуда следует, что при выполнении условия (4) (в силу (5)) выполняется неравенство $\frac{w_i}{w_j} > 1$, т.е. $w_i > w_j$, и $z_i \succ z_j$ для $z_i, z_j \in \Theta_2$.

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

В соответствии с технологией МАИ при наличии ν мер относительной важности сформируем МПС — A'^s, A^s $(s \in \{1, 2, \ldots, \nu\})$ на множествах признаков $\Theta_1 = \{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}\}$, $\Theta_2 = \{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}, z_g\}$, $\Theta_1 \subset \Theta_2$ соответственно. Собственные векторы МПС A'^s, A^s обозначим $W'^s = (w'^s_1, w'^s_2, \ldots, w'^s_{g-1})^{\mathrm{T}}$ и $W^s = (w^s_1, w^s_2, \ldots, w^s_g)^{\mathrm{T}}$.

Результатом применения МАИ на множестве признаков $\Theta_1 = \{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}\}$ являются ВКП, определяющиеся по формуле $w'_i = \sum_{s=1}^{\nu} c_s w'^s_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, g-1\}$.

По условию теоремы 2 на множестве Θ_1 задано отношение предпочтения $z_i \succ z_j$, т.е. $w_i > w_j$. Покажем, что это отношение предпочтения ($z_i \succ z_j$) сохранится на множестве Θ_2 в случае использования процедуры группового учета признаков при оценивании их весовых коэффициентов, т.е. должно выполняться неравенство $w_i > w_j$.

В соответствии с процедурой весовые коэффициенты w_i, w_j признаков z_i, z_j равны $w_i = \sum_{l=1}^{g} w^i_{il} = \sum_{l=1}^{g} \sum_{s=1}^{\nu} c_s \frac{w^s_i}{w^s_i + w^s_l}$, $w_j = \sum_{l=1}^{g} w^j_{jl} = \sum_{l=1}^{g} \sum_{s=1}^{\nu} c_s \frac{w^s_j}{w^s_j + w^s_l}$. Рассмотрим разность: $w_i - w_j = \sum_{l=1}^{g} \sum_{s=1}^{\nu} c_s \left(\frac{w^s_i}{w^s_i + w^s_l} - \frac{w^s_j}{w^s_j + w^s_l} \right)$.

Применяя свойства 2 и 3 МПС формулы (2), заметим, что $\frac{w^s_i}{w^s_i + w^s_l} = \frac{1}{1 + w^s_l / w^s_i} = \frac{1}{1 + a^s_{li}}$, и, проведя серию преобразований с применением свойств 2 и 3 формулы (2) и условия теоремы, получим

$$w_i - w_j = \sum_{l=1}^{g} \left(\frac{w^s_i}{w^s_i + w^s_l} - \frac{w^s_j}{w^s_j + w^s_l} \right) = \sum_{l=1}^{g} \left(\frac{1}{1 + a^s_{li}} - \frac{1}{1 + a^s_{lj}} \right) = \sum_{l=1}^{g} \frac{a^s_{lj} - a^s_{li}}{(1 + a^s_{li})(1 + a^s_{lj})} =$$

$$= \sum_{l=1}^{g} \frac{a^s_{li}(a^s_{ij} - 1)}{(1 + a^s_{li})(1 + a^s_{lj})} = (a^s_{ij} - 1) \sum_{l=1}^{g} \frac{1}{(1 + a^s_{il})(1 + a^s_{lj})} = (a'^s_{ij} - 1) \sum_{l=1}^{g} \frac{1}{(1 + a^s_{il})(1 + a^s_{lj})}.$$

Справедливость четвертого и пятого равенств следует из свойства МПС: $a^s_{lj} = a^s_{li} a^s_{ij}$, $a^s_{lj} = 1 / a^s_{il}$, справедливость последнего равенства — из факта $a'^s_{ij} = a^s_{ij}$ для $i, j < g$. Знак последнего выражения определяется знаком выражения $a'^s_{ij} - 1$. Но в силу предположения теоремы 2 $a'^s_{ij} = \frac{w'^s_i}{w'^s_j} > 1$ при $s = 1$, следовательно, $w_i - w_j = \sum_{l=1}^{g} \left(\frac{w^1_i}{w^1_i + w^1_l} - \frac{w^1_j}{w^1_j + w^1_l} \right) > 0$.

Далее справедливость доказываемого утверждения легко устанавливается по индукции.

Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

В соответствии с технологией МАИ собственные векторы МПС A', A обозначим $W' = (w'_1, w'_2, \ldots, w'_{g-1})^{\mathrm{T}}$ и $W = (w_1, w_2, \ldots, w_g)^{\mathrm{T}}$ соответственно. Справедливость свойств 1 и 2 формулы (2) МПС $A = \| a_{ij} \|_{g \times g}$ следует непосредственно из условия (3). Докажем свойство 3, используя следствие теоремы 1, а именно формулу (5).

Обозначим отношение $\alpha_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, g\}$, и покажем, что в условиях (3) теоремы 1 $\alpha_{ij} = a_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, g\}$. Для этого рассмотрим $\alpha_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$, $i, j \in$ $\in \{1, 2, \ldots, g-1\}$:

$$\alpha_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \frac{(w'_i)^{(g-1)/g} (a_{ig})^{1/g}}{(w'_j)^{(g-1)/g} (a_{jg})^{1/g}} = \left(\frac{w'_i}{w'_j} \right)^{(g-1)/g} \left(\frac{a_{ig}}{a_{jg}} \right)^{1/g} = (a'_{ij})^{(g-1)/g} (a_{ig} a_{gj})^{1/g}.$$

Если (по условию теоремы) $a_{ig} a_{gj} = a_{ij}$, то

$$\alpha_{ij} = (a'_{ij})^{(g-1)/g} (a_{ig} a_{gj})^{1/g} = (a'_{ij})^{(g-1)/g} (a_{ij})^{1/g} = (a_{ij})^{(g-1)/g} (a_{ij})^{1/g} = a_{ij}.$$

Свойство 3 доказано.

Справедливость свойства 4 устанавливается использованием специального вида МПС A. Характеристическое уравнение для нее можно записать в виде [6]

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} (1-\lambda) & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & (1-\lambda) & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & (1-\lambda) \end{bmatrix} = (-1)^g \lambda^{g-1} (\lambda - g) = 0,$$

из которого следует, что матрица A имеет только два собственных значения, при этом значение g является максимальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев Ю.И., Гуревич И.Б. Распознавание образов и анализ изображений // Искусственный интеллект. В 3-х кн. Кн. 2. Модели и методы: Справочник / Под ред. Д.А. Поспелова. — М.: Радио и связь, 1990. — С. 149–190.
2. Дюкова Е.В., Песков Н.В. Построение распознающих процедур на базе элементарных классификаторов (www.ccas.ru/frc/papers/djukova05construction.pdf).
3. Янковская А.Е. Логические тесты и средства когнитивной графики в интеллектуальной системе // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур: Докл. 3-й Всерос. конф. с междунар. участием. — Томск: Изд-во СО РАН, 2000. — С. 163–168.
4. Янковская А.Е., Колесникова С.И. Методы определения весовых коэффициентов признаков в интеллектуальных системах // Вестн. Томск. гос. ун-та. — 2004. — Приложение № 9. — С. 76–83.
5. Петровский А.Б. Упорядочивание и классификация объектов с противоречивыми признаками // Новости искусств. интеллекта. — 2003. — № 4. — С. 34–43.
6. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.: Радио и связь, 1989. — 311 с.
7. Самохвалов Ю.Я. Особенности применения метода анализа иерархий при оценке проблем по метрическим критериям // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 5. — С. 15–19.
8. Самохвалов Ю.Я. Групповой учет относительного превосходства альтернатив в задачах принятия решений // Там же. — 2003. — № 6. — С. 141–145.
9. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов. — М.: Мир, 1978. — 411 с.
10. Ногин В.Д. Обобщенный принцип Эджворта–Парето и границы его применимости // Экономика и мат. методы. — 2005. — **41,** № 3. — С. 128–134.

Поступила 31.07.2008