

## НЕЙРОСЕТЕВОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ РАДИАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ РАСТИТЕЛЬНОГО ПОКРОВА<sup>1</sup>

**Ключевые слова:** *сеть плотности смеси, радиационная модель растительности, обратные задачи, дистанционное зондирование Земли, влагосодержание растительности.*

### ВВЕДЕНИЕ

Данные влажности почвы и влагосодержания растений используются для мониторинга растительности и раннего определения засух, что особенно актуально в условиях быстрого изменения климата. Усовершенствование приборов дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) и появление доступных данных ДЗЗ позволило решать задачу определения состояния растительности в глобальном и региональном масштабе [1]. На локальном уровне применение дистанционных методов является основной неинвазивной методикой определения характеристик растений [2].

Нахождение влагосодержания растений является частью более общей задачи — восстановления по спутниковым данным архитектурных и биохимических характеристик растительного покрова, таких как листовой индекс, фракция поглощенной радиации, содержание различных пигментов, в первую очередь хлорофилла. Современным и перспективным направлением в этой области является ассимиляция спутниковых измерений в прогнозные динамические модели, например модели роста культур для решения задач прогнозирования урожайности и мониторинга состояния посевов [3] и модели тепло- и влагопереноса в системе почва–растение–атмосфера для мониторинга засух, прогнозирования паводков и погоды, моделирования климата [4, 5].

Современные методы ассимиляции данных [6, 7] выдвигают к методам обработки данных ДЗЗ два существенных требования: наличие оценки ошибки измерения и вычислительная эффективность метода. Последнее требование связано с необходимостью обработки больших потоков данных (для современных спутниковых систем это миллиарды пикселей в день). Существующие методы оценки параметров растительности не удовлетворяют вышеперечисленным требованиям. В частности, вычислительно-эффективные методы, основанные на вегетационных индексах и искусственных нейронных сетях с традиционной архитектурой, не предоставляют информации об ошибке в оценках параметров. Вариационные методы и методы Монте-Карло являются вычислительно неэффективными, вычислительная эффективность методов поиска существенно зависит от размера таблиц и количества входных параметров таблицы.

Поэтому задача создания нового вычислительно-эффективного метода восстановления параметров растительности, в частности влагосодержания, предоставляющего информацию об ошибке в оценке параметров, является актуальной и необходимой для работы современных моделей роста растительности и моделей тепло- и влагопереноса в системе почва–растение–атмосфера.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Возможность восстановления параметров растительного покрова по данным в оптическом диапазоне основана на высокой чувствительности спектральных

<sup>1</sup>Настоящая статья поддержана совместным грантом УНТЦ-НАНУ «Grid Technologies for Multi-Source Data Integration» № 4928.

характеристик растения к внутренним биохимическим и биофизическим параметрам растения [8]. На рис. 1 показан характерный спектр отражения растительного покрова в диапазоне длин волн  $\lambda \in [0,4; 2,5]$  мкм и основные факторы, влияющие на спектр. Отражательная способность в видимом диапазоне в значительной степени определяется поглощением хлорофилла и других пигментов, а наличие плато в ближней инфракрасной области 0,8–1,3 мкм определяется внутренней структурой растения. Существование связи между содержанием воды в растении и спектром отражения в среднем инфракрасном диапазоне является основой для восстановления влагосодержания растения по его спектру. При этом отражательная способность растительного покрова во всем диапазоне 0,4–2,5 мкм зависит от внутренней структуры покрова,

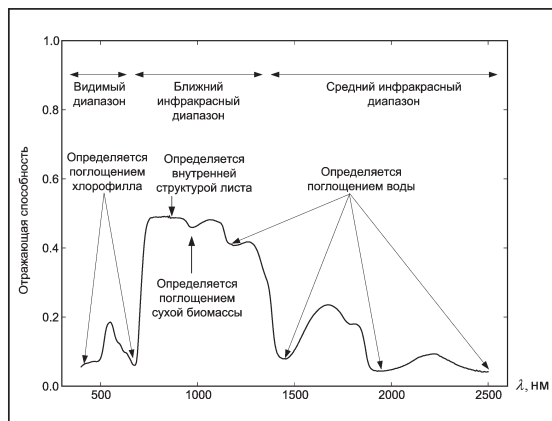


Рис. 1. Основные факторы, влияющие на спектр растения в оптическом диапазоне

поглощения «сухой» биомассы, свойств грунта, конфигурации системы наблюдения и других факторов [9], что в значительной степени усложняет задачу оценки влагосодержания, концентрации хлорофилла, листового индекса и других параметров.

За последние 25 лет достигнут значительный прогресс в области математического моделирования отражающей способности растительного покрова. Было создано ряд математических моделей распространения электромагнитного излучения на уровне отдельного листа. Из них следует отметить модели PROSPECT и LIBERTY листа растения, а также модель растительного покрова SAIL, которые широко используются при обработке данных ДЗЗ [10–13].

Задача восстановления параметров растений рассматривается как задача, обратная задаче моделирования спектральных характеристик солнечного излучения, отраженного растением. Для формулировки прямой задачи рассмотрим радиационные модели растения и атмосферы в следующем виде:

$$d = h(x). \quad (1)$$

Здесь  $h: \mathbf{R}^{n_x} \rightarrow \mathbf{R}^{n_d}$  — конечномерное отображение вход–выход, сформированное на основе математической модели радиационных процессов. Функция  $h$  отображает вектор параметров растительного покрова  $x \in X \subset \mathbf{R}^{n_x}$  в вектор измерений  $d \in D \subset \mathbf{R}^{n_d}$  — дискретизированных значений спектра отражения растительного покрова на разных длинах волн. Например, для радиационной модели листа растения PROSPECT [11] размерность вектора  $x$  равна четырем,  $x = (N, C_{ab}, C_w, C_m)^T$ , где  $N \in \mathbf{R}$  — параметр структуры листа,  $C_{ab} \in \mathbf{R}$ ,  $C_w \in \mathbf{R}$ ,  $C_m \in \mathbf{R}$  — концентрации хлорофилла, воды и сухого вещества соответственно (табл. 1). Размерность  $n_d$  вектора  $d$  равна 2100, поскольку модель PROSPECT определяет значение спектра листа растения в диапазоне длин волн 400–2500 нм с шагом дискретизации 1 нм.

Таблица 1

Параметр	Единица измерения	Диапазон изменения
$N$	—	1–4
$C_{ab}$	мкг/см <sup>2</sup>	0–100
$C_w$	г/см <sup>2</sup>	0,004–0,07
$C_m$	г/см <sup>2</sup>	0,001–0,04

Поскольку реальные измерительные приборы (особенно спутниковые) обладают невысокой спектральной разрешающей способностью,

то количество доступных измерений обычно значительно меньше, чем 2100. Например, число спектральных каналов прибора MODIS равно семи, а  $i$ -й элемент  $d^i$  вектора измерений  $d$  формируется с учетом функций чувствительности каналов данного прибора:

$$d^i = \int_{\lambda} f_i(\lambda) R_{leaf}(\lambda) d\lambda \approx \frac{1}{\Delta\lambda} \sum_j f_i(\lambda_j) R_{leaf}(\lambda_j), \quad (2)$$

$\lambda_j$  — дискретные значения длины волны  $\lambda$ ;  $f_i(\lambda)$  — функция относительной спектральной чувствительности канала  $i$ ;  $R_{leaf}$  — спектр отражения растительного покрова. Тогда размерность вектора  $d$  равна семи. Функции чувствительности каналов прибора MODIS и график спектральной кривой, полученной в результате работы модели PROSPECT, приведены на рис. 2.

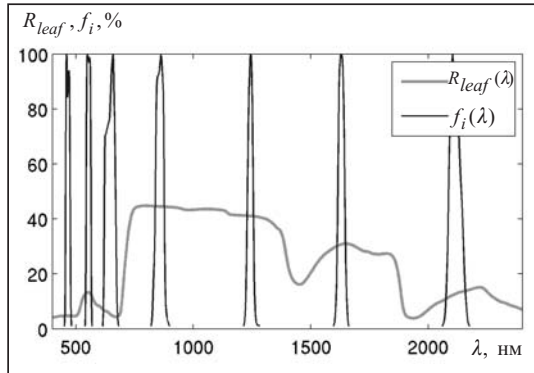


Рис. 2. Графики функций  $f_i(\lambda)$  и  $R_{leaf}(\lambda)$

Модель (1) является только аппроксимацией реальных процессов распространения фотонов в растительном покрове, а в реальных измерительных приборах присутствует шум. Поэтому взаимосвязь между входом модели  $x$  и вектором измерений  $d$  выражается с учетом характеристик помех. Данная задача характеризуется мультипликативным шумом  $\varepsilon$  [14, 15]

$$d = h(x) + h(x)\varepsilon. \quad (3)$$

Возникает обратная задача — определение параметров растительного покрова  $x$  по данным измерений  $d$  с учетом помехи в измерениях.

#### МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАСТИТЕЛЬНОГО ПОКРОВА

В настоящее время в области дистанционного зондирования Земли разработано несколько методов решения задачи восстановления характеристик растительного покрова по данным дистанционных измерений. К ним относятся методы, основанные на вегетационных индексах, построении таблиц поиска, а также нейросетевые методы, вариационные методы и методы Монте-Карло [9].

Наиболее простым способом оценки параметров растительности дистанционными методами является создание вегетационных индексов — простой комбинации значений отражательной способности в нескольких спектральных диапазонах. Индекс более чувствителен к изменению целевого параметра растительности, а также обладает малой чувствительностью к остальным факторам [16]. Среди целевых параметров следует отметить листовой индекс LAI (Leaf Area Index), фракцию солнечной радиации, поглощенной растительностью FPAR (Fraction of Photosynthetic Active Radiation), концентрацию воды, пигментов. К дополнительным факторам относятся атмосферные искажения, изменчивость спектральных свойств грунта и др.

Наиболее известным примером индекса является нормализованный дифференциальный вегетационный индекс (Normalized Difference Vegetation Index — NDVI), который используется для определения LAI и FPAR [17, 18]. Для определения влагосодержания разработан ряд так называемых водных индексов, основанных на связи между отражательной способностью в среднем инфракрасном диапазоне и количеством воды в растении. Следует отметить нормализованный дифференциальный водный индекс (Normalized Difference Water Index — NDWI) [19] и гло-

бальный индекс влагосодержания (Global Vegetaion Moisture Index — GVMI) [20], определяемые соотношениями

$$\text{NDWI} = \frac{\rho_{0,8} - \rho_{1,6}}{\rho_{0,8} + \rho_{1,6}}, \quad \text{GVMI} = \frac{(\rho_{0,8} + c_1) - (\rho_{1,6} + c_2)}{(\rho_{0,8} + c_1) + (\rho_{1,6} + c_2)}, \quad (4)$$

где  $\rho_{0,8}$  — отражательная способность в ближней инфракрасной области спектра (~0,8 мкм),  $\rho_{1,6}$  — отражательная способность в средней инфракрасной области спектра (~1,6 мкм),  $c_1$  и  $c_2$  — настраиваемые параметры, которые в работе [20] равны 0,1 и 0,02 соответственно.

Вариационные методы решают обратную задачу для радиационной модели  $h(\cdot)$  путем минимизации некоторого функционала  $J(x)$ , определяющего степень близости смоделированного спектра  $h(x)$  к измеренному спектру  $d$ , а также близости значений параметров модели  $x$  к априорной оценке  $x_0$ . Часто выбирают в качестве функционала

$$J(x) = \frac{1}{2} [(x - x_0)^T B^{-1} (x - x_0) + (d - h(x))^T R^{-1} (d - h(x))], \quad (5)$$

$B$  и  $R$  — матрицы весовых коэффициентов, определяющих степень неопределенности каждого вида информации — измерений вектора  $d$  и априорной оценки  $x_0$ .

Задача оптимизации (5) имеет следующую вероятностную интерпретацию [21]. Пусть априорное распределение случайного вектора  $x$  параметров модели является нормальным  $N(x_0, B)$  и распределение шума в измерениях также нормально ( $N(0, R)$ ). Тогда плотность апостериорного распределения случайного вектора  $x$  имеет вид

$$p(x|d) \propto \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi B)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - x_0)^T B^{-1} (x - x_0)\right) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi R)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(d - h(x))^T R^{-1} (d - h(x))\right), \quad (6)$$

а задача оптимизации (5) является задачей нахождения оценки максимального правдоподобия, т.е. максимума условной плотности

$$x^* = \underset{x}{\operatorname{argmax}}\{p(x|d)\} = \underset{x}{\operatorname{argmax}}\{p(d|x)p(x)\}. \quad (7)$$

Метод таблиц поиска состоит в создании таблицы соответствий входов радиационной модели и смоделированных спектров

$$A = \{(x_i, d_i)\} = \{(x_i, h(x_i))\}. \quad (8)$$

Для решения обратной задачи для  $h(\cdot)$ , т.е. нахождения входа модели, соответствующего измеренному спектру  $d$ , из таблицы  $A$  выбираются пары вход–выход, ближайшие к  $d$ , согласно некоторому критерию близости, например среднеквадратичному критерию

$$B(d) = \{(x_i, d_i) \mid \|d - d_i\| < \varepsilon\}. \quad (9)$$

Возможны и другие критерии, в частности относительный среднеквадратичный критерий [22], критерий, учитывающий априорную информацию о входе модели  $x$  (см. (5)), и др.

Сформировав множество  $B(d)$ , можно построить оценку входа модели и определить ее ошибку. В работе [23] решением обратной задачи полагалось усредненное значение вектора  $x$  в множестве  $B(d)$ , а ошибка оценивалась выборочной дисперсией

$$x^* = \frac{1}{n} \sum_i x_i, \quad (x_i, d_i) \in B(d),$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - x^*)^2, \quad (x_i, d_i) \in B(d), \quad (10)$$

где  $n = |B(d)|$  — количество элементов множества  $B(d)$ . Значение порога  $\varepsilon$  выбиралось согласно уровню шума в измерениях и радиационной модели. В работе [24] множество  $B(d)$  составлялось из фиксированного количества пар, ближайших к измеренному спектру  $d$ , а решение обратной задачи определялось медианой отобранных входов модели  $x_i$ .

Методы, основанные на вегетационных индексах, являются наименее ресурсоемкими. Однако поскольку индекс является косвенной характеристикой исследуемого параметра растительности, то для получения собственно характеристик необходимы дополнительные регрессионные зависимости, которые зачастую требуют калибровки для различных типов растений, новой территории и т.д. Существенным недостатком индексов является сложность оценки погрешности восстанавливаемого параметра. При построении индексов используется ограниченный набор каналов (2–3) вместо доступных 7–15 (например, в данных приборов MODIS, MERIS, ASTER, ALI). Методы, основанные на радиационных моделях, решают задачу более точно, поскольку используют все доступные каналы приборов.

Для современных радиационных моделей вычислительная сложность вариационных методов решения обратных задач на несколько порядков превышает сложность вычисления вегетационного индекса, поэтому данные методы не используются для решения задач в оперативном режиме с большими объемами данных. Сложность методов таблиц поиска существенно образом зависит от размера таблицы, однако существенно ниже сложности вариационных методов. Вариационные методы и методы создания таблиц поиска позволяют оценивать ошибки целевых параметров.

Методы Монте-Карло имеют ограниченное применение в задачах дистанционного зондирования, поскольку требуют огромного количества вычислений, на данный момент они применяются для теоретических исследований либо в случае небольшого количества измерений [25]. Нейросетевые методы широко используются для решения обратных задач в дистанционном зондировании [14, 24], например Европейским космическим агентством для получения листовного индекса и других параметров по данным спутникового прибора MERIS [14]. Нейросетевые методы сравнимы по вычислительной сложности с вычислением вегетационных индексов, но они не позволяют оценивать ошибки целевых параметров. Поэтому усовершенствование нейросетевого подхода к решению обратных задач, позволяющее оценивать погрешность в целевых параметрах, является актуальной задачей.

#### НЕЙРОСЕТЕВОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В настоящей статье предполагается, что неопределенность в априорной оценке вектора входа модели  $x$  и в процессе измерения вектора  $d$  носит вероятностный характер. Обозначим  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\varepsilon$  случайные векторы априорной оценки входа модели, измерения и шума при измерениях;  $p(x)$ ,  $p(d)$  и  $p(\varepsilon)$  — плотности распределения этих векторов. Предполагается, что случайные векторы  $\mathbf{x}$  и  $\varepsilon$  — независимы, а плотности распределения  $p(x)$ ,  $p(\varepsilon)$  и функция  $h$  таковы, что случайные векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{d}$  имеют совместную плотность  $p(x, d)$ , а компоненты векторов обладают дисперсией.

Решением задачи, обратной к задаче (3), является плотность условного распределения вектора входа модели  $\mathbf{x}$  при известном значении вектора измерений  $\mathbf{d}$  [6, 21]:

$$p(x|d) \propto p(d|x)p(x), \quad x \in \mathbf{R}^{n_x}, \quad d \in \mathbf{R}^{n_d}. \quad (11)$$

Знание плотности условного распределения  $p(x|d)$  позволяет вычислять различные статистические характеристики оценки входа модели — среднее значение, медиану, дисперсию, доверительный интервал, наиболее вероятное значение и другие.

Для решения обратной задачи (11) в рамках традиционного нейросетевого подхода [14, 24] определяется обратное преобразование  $f: D \rightarrow X$ , которое мини-

мизирует матожидание квадрата невязки

$$M[||\mathbf{x} - f(\mathbf{d})||^2]. \quad (12)$$

Отображение  $f$  находится среди широкого класса функций  $f(\cdot, w)$ , определяемых нейронной сетью, в частности многослойным персептроном (multilayer perceptron — MLP) с одним скрытым слоем [26],

$$f(d, w) = b_2 + \sum_k [u_k \cdot S(d^T v_k + b_1^{(k)})], \quad (13)$$

где векторы  $v_k$  и  $u_k$  формируют матрицы весовых коэффициентов нейронов скрытого и выходного слоев, а векторы  $b_1$  и  $b_2$  — весовые коэффициенты связей bias-нейронов с нейронами скрытого слоя и выходного слоя соответственно,  $b_1^{(k)}$  —  $k$ -я компонента вектора  $b_1$ . В совокупности векторы  $b_1, b_2, v_k, u_k$  формируют вектор параметров нейронной сети  $w$ . В данной статье в качестве сигмоидальной функции  $S$  используется гиперболический тангенс.

Нахождение коэффициентов  $w$  происходит в процессе обучения сети. Для этого сформируем обучающую выборку из распределения  $p(x, d): \{(d_i, x_i), i = \overline{1, n}\}$ , где  $d_i$  — входной вектор нейросети,  $x_i$  — вектор выхода модели, являющийся выходным вектором нейросети,  $n$  — размер выборки. При обучении выполняется минимизация функционала ошибки

$$J(w) = \sum_i ||x_i - f(d_i, w)||^2. \quad (14)$$

Основная проблема в применении обычных нейронных сетей для решения обратных задач заключается в неадекватном выборе квадратичного функционала  $J(w)$ . В этом случае значение выхода нейросети будет приближаться к значению условного математического ожидания  $M(\mathbf{x}|\mathbf{d} = d_i) = \int xp(x|d_i) dd_i$  вектора выхода сети при условии вектора входа сети. Сформулируем этот факт в виде следующего утверждения.

**Утверждение 1.** Для любых  $\mu > 0$  и  $\eta > 0$  существует такое  $n_0 \in \mathbf{N}$ , что с вероятностью  $1 - \mu$  для любого  $n \geq n_0$  среднеквадратическая ошибка работы персептрона  $\mathbf{r}$  на выборке  $\{(d_i, x_i), i = \overline{1, n}\}$  из плотности распределения  $p(x, d)$  удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{r} > M[||\mathbf{x} - M(\mathbf{x}|\mathbf{d})||^2] + M[|f(\mathbf{d}, w) - M(\mathbf{x}|\mathbf{d})|^2] - \eta. \quad (15)$$

Доказательство утверждения 1 вынесено в Приложение.

Минимум (15) будет достигаться для функции  $f(d, w) = M(\mathbf{x}|\mathbf{d} = d)$ . Тогда при условии больших обучающих выборок функция  $f(d, w^*)$ , определяемая персептроном с оптимальными значениями весовых коэффициентов  $w^*$ , близка к условному матожиданию  $M(\mathbf{x}|\mathbf{d} = d)$ , а среднеквадратическая ошибка работы персептрона на выборке  $\{(d_i, x_i), i = \overline{1, n}\}$  определяется ошибкой аппроксимации персептроном функции  $M(\mathbf{x}|\mathbf{d} = d)$  и дисперсией условного распределения  $p(x|d)$ . Ошибку аппроксимации можно уменьшить, увеличив число нейронов в скрытом слое персептрона, а дисперсию изменить невозможно.

Для преодоления указанного недостатка обычных нейронных сетей при решении обратных задач предлагается применить нейронные сети с неквадратичным критерием оптимальности — нейронные сети плотности смеси (Mixture Density Networks — MDN), позволяющие моделировать плотность условного распределения  $p(x|d)$  в виде свертки гауссовских плотностей [26]

$$p_{MDN}(x|d, w) = \sum_{l=1}^L \alpha_l(d, w) \cdot \varphi(x; m_l(d, w), \sigma_l(d, w)), \quad (16)$$

где  $\varphi(x, m, \sigma) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n_x}} \exp\left(-\frac{|x-m|^2}{2\sigma^2}\right)$  — гауссовская плотность со средним  $m$  и диагональной матрицей ковариации  $\sigma^2 I$ ;  $\alpha_l$  — коэффициенты свертки ( $\sum_l \alpha_l = 1$ ),  $L$  — количество элементов в свертке. Для построения функций  $\alpha_l(d, w)$ ,  $m_l(d, w)$  и  $\sigma_l(d, w)$  используется многослойный персептрон с модифицированным выходным слоем.

При обучении данной нейронной сети выполняется минимизация ошибки работы сети  $\mathbf{r}(w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n -\ln p_{MDN}(x_i | d_i, w)$ . Такая нейронная сеть позволяет вычислять ошибку в выходе сети. Сформулируем этот факт в виде утверждения.

**Утверждение 2.** Ошибка  $\mathbf{r}$  работы нейронной сети плотности смеси, содержащей одно ядро гауссовской плотности на выборке  $\{(d_i, x_i), i = \overline{1, n}\}$  из плотности распределения  $p(x, d)$ , удовлетворяет предельному соотношению

$$\begin{aligned} p\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{r} = n_x \ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{n_x}{2} \left[ 1 + \int \ln \left( \frac{1}{n_x} \sum_i D(\mathbf{x}^i | \mathbf{d} = d) \right) p(d) dd \right] + \\ + M \frac{\|m(\mathbf{d}, w) - M(\mathbf{x} | \mathbf{d})\|^2}{\sigma^2(\mathbf{d}, w)} + \frac{n_x}{2} M \left[ \ln k(\mathbf{d}, w) + \frac{1}{k(\mathbf{d}, w)} - 1 \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где  $D(\mathbf{x}^i | \mathbf{d} = d)$  — дисперсия условного распределения  $p(x^i | d)$   $i$ -й компоненты вектора выхода сети  $x$ , а  $k(d, w) = \frac{\sigma^2(d, w)}{\frac{1}{n_x} \sum_i D(\mathbf{x}^i | \mathbf{d} = d)}$ .

Доказательство утверждения 2 вынесено в Приложение.

Два последних слагаемых в выражении (17) зависят от весовых коэффициентов, являются неотрицательными и могут быть приближены к нулю с произвольной точностью в результате обучения нейронной сети. При этом значение выхода сети  $m(d, w)$  приближает матожидание плотности распределения  $p(x|d)$ , а  $\sigma(d, w)$  — среднее квадратичное стандартных отклонений плотностей распределений  $p(x^i | d)$ . Иными словами, нейронная сеть плотности смеси, содержащая только одно ядро гауссовской плотности, позволяет оценить помимо матожидания условного распределения  $p(x|d)$  также и его дисперсию.

#### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ С ТЕСТОВЫМИ МОДЕЛЯМИ

Рассмотрим работу сетей плотности смеси на тестовом примере, для которого распределение  $p(x|d)$  можно вычислить аналитически. Обозначим конфигурацию многослойного персептрона в виде вектора  $(n_{in}, n_{hid}, n_{out})$ , а сети плотности смеси — в виде вектора  $(n_{in}, n_{hid}, n_{mix}, n_d)$ , где  $n_{in}$ ,  $n_{hid}$ ,  $n_{out}$  — количество нейронов во входном, скрытом и выходном слоях соответственно,  $n_{mix}$  — число ядер в смеси гауссовских функций,  $n_d$  — размерность выходного пространства сети.

В тестовом примере решается обратная задача для модели  $\mathbf{d} = \mathbf{x} + \varepsilon$ , где  $\mathbf{x}$  и  $\varepsilon$  — независимые равномерно распределенные на отрезке  $[0, 1]$  случайные величины. Тогда

$$\begin{aligned} p(x|d) = \begin{cases} \frac{1}{d}, & d \in [0; 1), x \in [0; d], \\ \frac{1}{2-d}, & d \in [1; 2], x \in [d-1; 1], \end{cases} \\ m(x|d) = d/2, \quad \sigma(x|d) = \frac{1-|d-1|}{\sqrt{12}}. \end{aligned}$$

При обучении сетей используется обучающая выборка, размер которой составляет 100000 элементов. Для решения обратной задачи (восстановления  $x$  по  $d$ ) используются многослойный перцептрон в конфигурации (1,5,1) и сеть плотности смеси в конфигурации (1,5,3,1). Условное среднее и дисперсия для MDN вычисляются следующим образом:

$$m(d, w) = \sum_{l=1}^L \alpha_l(d, w) \cdot m_l(d, w),$$

$$\sigma^2(d, w) = \sum_{l=1}^L \alpha_l(d, w) \cdot \sigma_l(d, w)^2 + \sum_{l=1}^L \alpha_l(d, w) \cdot (m_l(d, w) - m(d, w))^2.$$

На рис. 3, *а* показаны точки  $(d_i, x_i)$  обучающего множества и график выхода MLP в зависимости от входных данных (прямой линией показана тождественная зависимость), на рис. 3, *б* — графики отклонения  $\Delta x$  выхода сетей MLP и MDN от теоретического значения. Обе сети хорошо аппроксимируют условное среднее выхода сети  $x$  при входе  $d$ . Однако в данном примере дисперсия плотности  $p(x|d)$  зависит от величины входа  $d$ , поэтому ее невозможно точно оценить с помощью многослойного перцептрона, поскольку при его обучении предполагается независимость дисперсии от величины входа. На рис. 3, *в* показаны графики зависимости стандартного отклонения  $\sigma$  плотности распределения  $p(x|d)$  от входа  $d$  и его оценки с помощью многослойного перцептрона и сети плотности смеси. При этом перцептрон в большинстве случаев недооценивает дисперсию, а при значениях входа, близких к единице, — переоценивает. В то же время сеть плотности смеси хорошо аппроксимирует дисперсию на всем интервале значений входа  $d$ . На рис. 3, *г* показаны графики плотности распределения  $p(x|d)$  при  $d = 1, 0$ , полученные при работе сети MDN и в результате аналитических расчетов.

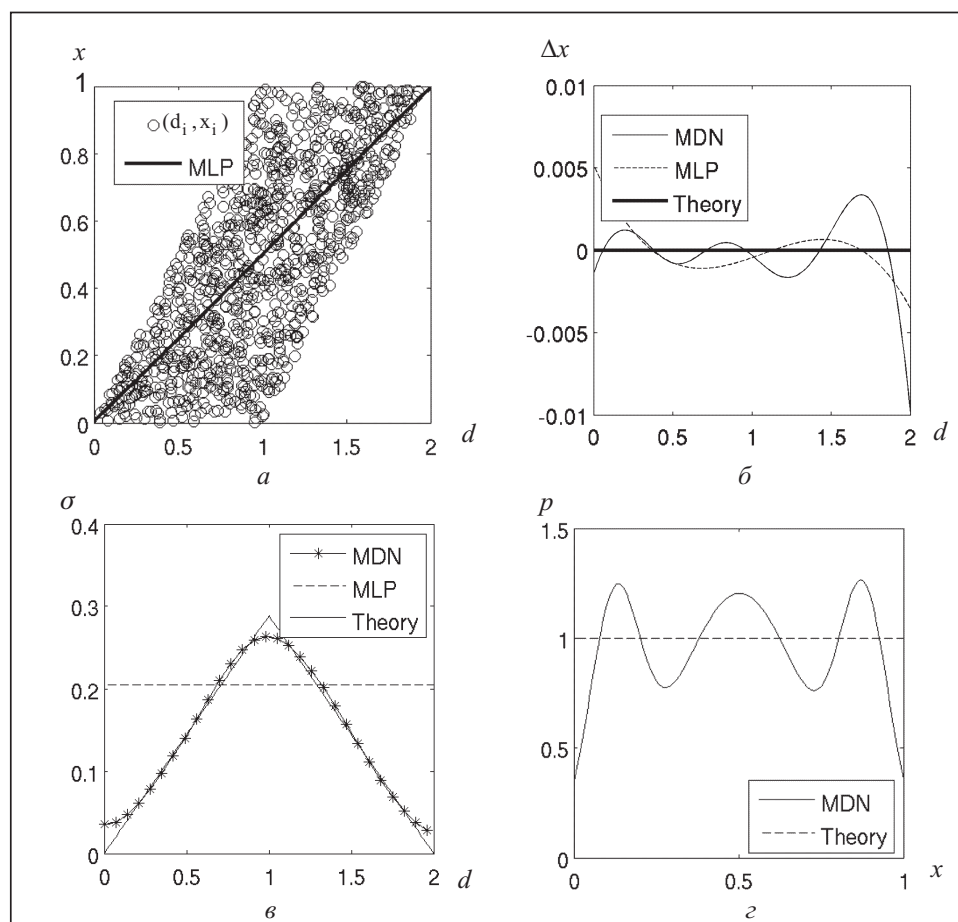


Рис. 3. Графики результатов работы сетей MLP и MDN



## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ МОДЕЛИ PROSPECT

Учитывая преимущества сетей плотности смеси, воспользуемся ими при решении обратной задачи для радиационной модели растительного покрова на примере модели PROSPECT. В данном случае вектор  $x$  состоит из четырех параметров:  $x = (N, C_{ab}, C_w, C_m)^T$ , а вектор измерений  $d$  — из семи значений спектра отражения листа растения. Для задания прямой задачи вводятся следующие предположения:

- 1) априорное распределение параметров  $p(x)$  — равномерное на всем диапазоне их изменения, при этом параметры предполагаются независимыми;
- 2) шум в каналах считается независимым в совокупности и имеет нормальное распределение.

Для оценивания ошибки восстановления параметра влагосодержания при каждом значении измерения  $d$  (а не только в среднем) обучена сеть плотности смеси в конфигурации (7,5,1,1), содержащая одно ядро гауссовской плотности (использование большего количества ядер не дает существенного улучшения качества восстановления в данной задаче). Для обучения сети используются данные с уровнем шума 5%. Обозначим эту сеть  $MDN_5$ .

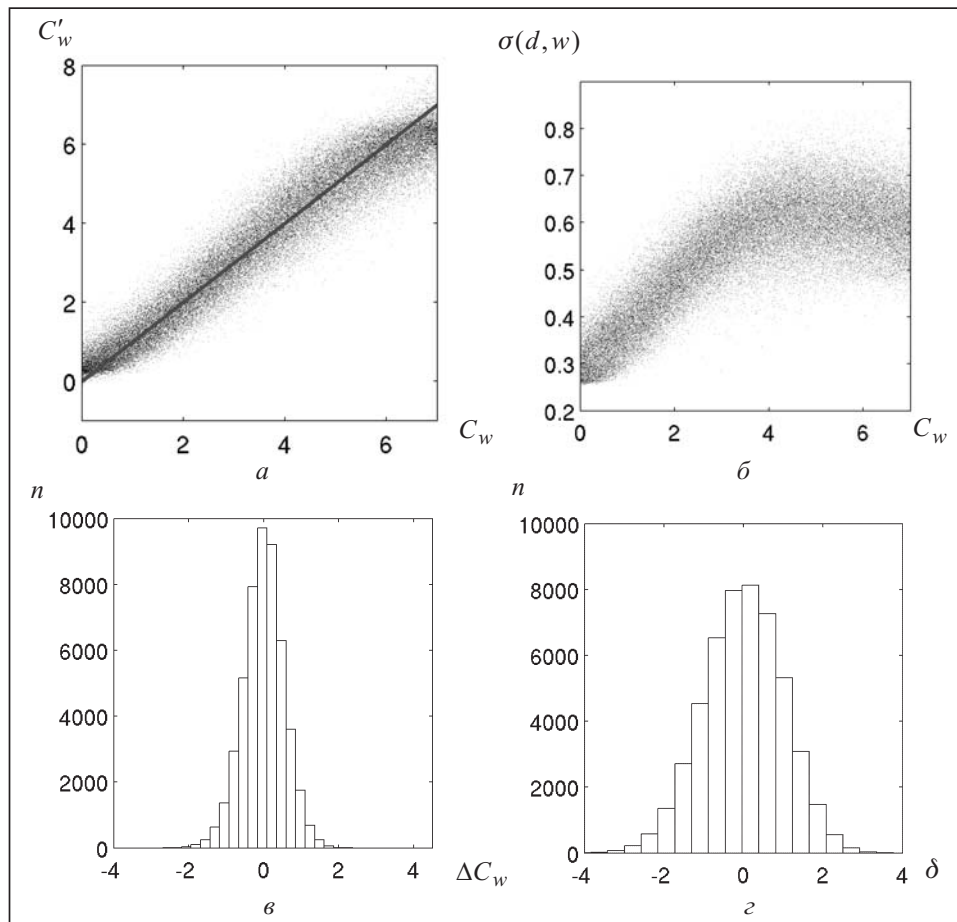


Рис. 4. Графики результатов работы сети  $MDN_5$  (а, б) и гистограммы отклонения истинного значения от оценки среднего без учета дисперсии (в) и с учетом дисперсии (з)

Зависимость среднего гауссовского распределения  $C'_w = m(d_i, w)$ , получаемого в результате работы сети  $MDN_5$  при входе  $d_i$ , от истинного значения влагосодержания  $C_w$  показаны на рис. 4, а. На рис. 4, б отражена зависимость оценки стандартного отклонения  $\sigma(d, w)$  восстановленного значения влагосодержания от ис-

тинного значения влагосодержания  $C_w$ . Значение отклонения возрастает с ростом  $C_w$  и стабилизируется в области больших значений  $C_w$  ( $4-7 \text{ г/см}^2$ ). Такой результат является ожидаемым, поскольку при увеличении влагосодержания спектр отражения выходит на постоянный уровень. На рис. 4, в показана гистограмма отклонения  $\Delta C_w = C'_w - C_w$  истинного значения влагосодержания  $C_w$  от среднего  $C'_w$ , а на рис. 4, з — значения  $\delta = \Delta C_w / \sigma(d_i, w)$  отклонения истинного значения  $C_w$  от среднего при входе  $d_i$ , соотнесенные к значению стандартного отклонения  $\sigma(d_i, w)$ . Здесь  $n$  — число элементов выборки, попавших в интервал группировки. При этом большинство значений (94%) попадают в интервал  $\pm 2\sigma$ , что свидетельствует об адекватности оценки дисперсии условного распределения  $p(C_w|d)$  с помощью сети плотности смеси.

#### ВАЛИДАЦИЯ НА РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Для валидации алгоритма восстановления влагосодержания  $C_w$  в растении по спектру отражения растения использовалась база данных LOPEX (Leaf Optical Properties EXperiment) наземных измерений спектров растений. База данных LOPEX содержит около 1250 спектров отражения растений. Спектры представлены с разрешением 1 нм в диапазоне 400–2500 нм. Из базы LOPEX отобраны 330 спектров свежих листьев 66 видов растений (по пять спектров отражения для каждого вида) с различным влагосодержанием.

Для валидации алгоритма оценки влагосодержания спектры из базы данных LOPEX приведены к диапазонам измерений спектрорадиометра MODIS согласно формуле (2). График зависимости восстановленного значения влагосодержания  $C'_w$  от измеренного значения  $C_w$  по данным LOPEX с помощью сети  $MDN_5$  приведен на рис. 5, а. На рис. 5, б показана гистограмма величины  $\delta$ . При этом большинство значений (90%) отклонения попадают в интервал  $[-2; 2]$ , что свидетельствует об адекватности оценки влагосодержания и стандартного отклонения оценки с помощью сети плотности смеси.

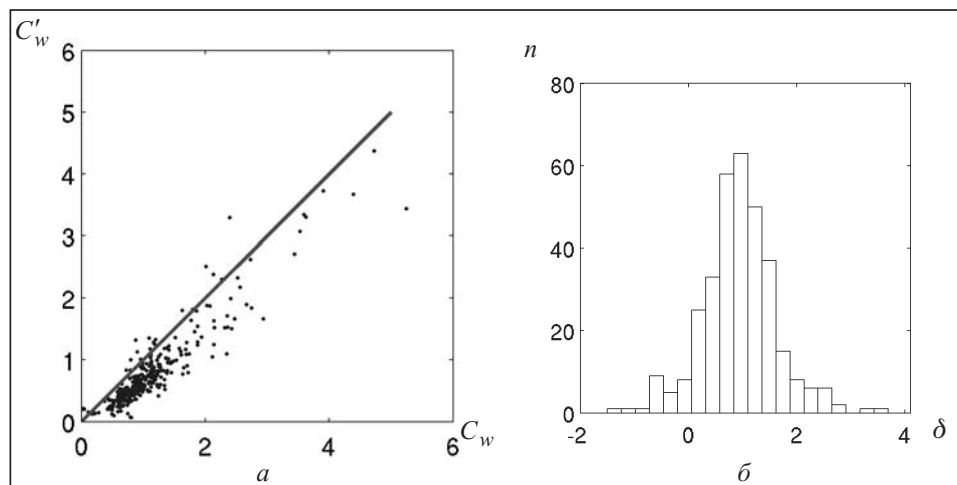


Рис. 5. График зависимости  $C'_w$  от  $C_w$  (а) и гистограмма величины  $\delta$  (б)

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нейросетевые методы являются наиболее популярными при решении задачи восстановления параметров растительного покрова по данным ДЗЗ. Это объясняется следующими причинами. С одной стороны, нейронные сети являются универсальными аппроксиматорами и способны аппроксимировать нелинейное обратное отображение вход–выход для радиационной модели. С другой стороны, нейронные сети обладают высокой вычислительной эффективностью, поскольку основные вычисления, связанные с работой радиационной модели, выполняются в режиме off-line во вре-

мья обучения нейронной сети. При непосредственной обработке данных ДЗЗ нейронная сеть работает в режиме прогона, при этом обработка данных происходит в сотни раз быстрее, чем при использовании вариационных методов, и по скорости сравнима с простейшими методами, такими как вегетационные индексы.

В то же время нейронные сети с традиционной архитектурой не позволяют определить ошибки в оценках параметров покрова для каждого набора измерений. В настоящей статье формально показано, что традиционные нейронные сети с квадратичным критерием обучения позволяют оценить только условное матожидание значения выхода сети при условии входа. Для преодоления недостатка традиционного нейросетевого подхода предложено использовать нейронную сеть с нестандартной архитектурой — нейронную сеть плотности смеси, которая позволяет аппроксимировать условное распределение выхода при условии входа. Показано, что такая сеть позволяет оценить не только матожидание, но и дисперсию условного распределения для каждого набора измерений.

Разработанный нейросетевой метод решения обратной задачи проверен на тестовой модели, в которой условные распределения можно получить аналитически, а также применен к радиационной модели PROSPECT для оценки влагосодержания листа растения по спектру отражения в семи спектральных диапазонах. Проведена валидация метода на данных реальных измерений. Результаты валидации (90% попадания измеренных значений влагосодержания в предсказанный интервал  $\pm 2\sigma$ ) свидетельствуют об эффективности разработанного метода.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

**Доказательство утверждения 1.** Пусть  $\{(\mathbf{d}_i, \mathbf{x}_i), i = \overline{1, n}\}$  — последовательность случайных векторов, соответствующая выборке  $\{(d_i, x_i), i = \overline{1, n}\}$ , т.е.  $\{(\mathbf{d}_i, \mathbf{x}_i), i = \overline{1, n}\}$  — независимые одинаково распределенные векторы с плотностью распределения  $p(x, d)$ , а выборка  $\{(d_i, x_i), i = \overline{1, n}\}$  — реализация последовательности  $\{(\mathbf{d}_i, \mathbf{x}_i), i = \overline{1, n}\}$  для некоторого исхода  $\omega$ :  $d_i = \mathbf{d}_i(\omega)$ ,  $x_i = \mathbf{x}_i(\omega)$ . Тогда  $\mathbf{r}(\omega) = \frac{1}{n} \sum_i ||x_i - f(d_i, w)||^2$ .

Поскольку функция  $f(d, w)$ , определяемая персептроном, является непрерывной и ограниченной, то случайная величина  $f(\mathbf{d}, w)$  также обладает дисперсией. Согласно закону больших чисел имеем

$$\frac{1}{n} \sum_i ||\mathbf{x}_i - f(\mathbf{d}_i, w)||^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} M ||\mathbf{x} - f(\mathbf{d}, w)||^2. \quad (18)$$

Поэтому существует  $n_0 \in \mathbf{N}$  такое, что для любого  $n \geq n_0$  выполняется неравенство  $P\{\mathbf{r} - M ||\mathbf{x} - f(\mathbf{d}, w)||^2 \geq \eta\} < \mu$ . Следовательно, с вероятностью  $1 - \mu$  выполняется неравенство  $\mathbf{r} > M ||\mathbf{x} - f(\mathbf{d}, w)||^2 - \eta$ . Для упрощения дальнейших выкладок введем обозначения:  $m(\mathbf{d}) = M(\mathbf{x} | \mathbf{d} = d)$  и  $f(\mathbf{d}) = f(d, w)$ . Тогда

$$\begin{aligned} M ||\mathbf{x} - f(\mathbf{d}, w)||^2 &= M ||\mathbf{x} - m(\mathbf{d}) + m(\mathbf{d}) - f(\mathbf{d})||^2 = \\ &= M ||\mathbf{x} - m(\mathbf{d})||^2 + M ||m(\mathbf{d}) - f(\mathbf{d})||^2 - 2M(\mathbf{x} - m(\mathbf{d}))^T (m(\mathbf{d}) - f(\mathbf{d})) = \\ &= M ||\mathbf{x} - m(\mathbf{d})||^2 + M ||m(\mathbf{d}) - f(\mathbf{d})||^2, \end{aligned} \quad (19)$$

поскольку

$$\begin{aligned} M(\mathbf{x} - m(\mathbf{d}))^T (m(\mathbf{d}) - f(\mathbf{d})) &= \iint (x - m(d))^T (m(d) - f(d)) p(x, d) dx dd = \\ &= \iint (x - m(d))^T (m(d) - f(d)) p(x|d) p(d) dx dd = \\ &= \int \left[ \int (x - m(d)) p(x|d) dx \right]^T (m(x) - f(d)) p(d) dx dd = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

так как

$$\int (x - m(d))p(x|d) dx = \int xp(x|d) dx - \int m(d)p(x|d) dx = \\ = M(\mathbf{x}|\mathbf{d} = d) - m(d) = 0. \quad (21)$$

Поэтому с вероятностью  $1 - \mu$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i - f(\mathbf{d}_i, w)\|^2 > M \|\mathbf{x} - f(\mathbf{d}, w)\|^2 - \eta = \\ = M \|\mathbf{x} - m(\mathbf{d})\|^2 + M \|m(\mathbf{d}) - f(\mathbf{d}, w)\|^2 - \eta = \\ = M \|\mathbf{x} - M(\mathbf{x}|\mathbf{d})\|^2 + M \|f(\mathbf{d}, w) - M(\mathbf{x}|\mathbf{d})\|^2 - \eta. \quad (22)$$

Утверждение 1 доказано.

**Доказательство утверждения 2.** Как и при доказательстве утверждения 1, обозначим  $\{(\mathbf{d}_i, \mathbf{x}_i), i = \overline{1, n}\}$  последовательность случайных векторов, соответствующую выборке  $\{(d_i, x_i), i = \overline{1, n}\}$ . Функции  $m(d, w)$  и  $\sigma(d, w)$ , определяемые перцептроном, являются непрерывными и ограниченными. Кроме того, поскольку  $\sigma(d, w)$  больше некоторого положительного числа при всех  $d$ , то  $1/\sigma(d, w)$  — также непрерывная и ограниченная функция. Поэтому случайная величина  $p_{MDN}(\mathbf{x}|\mathbf{d}, w)$  (16) также обладает дисперсией. Тогда согласно закону больших чисел существует следующая сходимость по вероятности:

$$p\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{r} = p\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n -\ln p_{MDN}(\mathbf{x}_i|\mathbf{d}_i, w) = M[-\ln p_{MDN}(\mathbf{x}|\mathbf{d}, w)]. \quad (23)$$

Рассмотрим значение матожидания в (23):

$$M[-\ln p_{MDN}(\mathbf{x}|\mathbf{d}, w)] = \\ = M \left[ -\ln \left( \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma(\mathbf{d}, w))^{n_x}} \exp \left\{ -\frac{\|\mathbf{x} - m(\mathbf{d}, w)\|^2}{2\sigma^2(\mathbf{d}, w)} \right\} \right) \right] = \\ = n_x \ln \sqrt{2\pi} + M[n_x \ln \sigma(\mathbf{d}, w) + \frac{\|\mathbf{x} - m(\mathbf{d}, w)\|^2}{2\sigma^2(\mathbf{d}, w)}] = \\ = n_x \ln \sqrt{2\pi} + M[n_x \ln \sigma(\mathbf{d}, w)] + \int \frac{\|x - m(d, w)\|^2}{2\sigma^2(d, w)} p(x|d)p(d) dx dd. \quad (24)$$

Рассмотрим значение интеграла в выражении (24):

$$A = \int \frac{\|x - m(d, w)\|^2}{2\sigma^2(d, w)} p(x|d)p(d) dx dd = \\ = \int \frac{p(d)}{2\sigma^2(d, w)} \left( \int \|x - m(d, w)\|^2 p(x|d) dx \right) dd.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве утверждения 1, получаем

$$\int \|x - m(d, w)\|^2 p(x|d) dx = \\ = \int \|x - m(d)\|^2 + \|m(d) - m(d, w)\|^2 p(x|d) dx = \\ = \sum_i D(\mathbf{x}^i|\mathbf{d} = d) + \int \|m(d) - m(d, w)\|^2 p(x|d) dx,$$

где  $m(d) = M(\mathbf{x}|\mathbf{d} = d) = \int xp(x|d) dx$ . Тогда

$$\begin{aligned}
A &= \int \left( \sum_i D(\mathbf{x}^i | \mathbf{d} = d) + \int \|m(d) - m(d, w)\|^2 p(x|d) dx \right) \frac{p(d)}{2\sigma^2(d, w)} dd = \\
&= \int \frac{\sum_i D(\mathbf{x}^i | \mathbf{d} = d)}{2\sigma^2(d, w)} p(d) dd + \int \frac{\|m(d) - m(d, w)\|^2}{2\sigma^2(d, w)} p(x, d) dx dd = \\
&= \int \frac{\sum_i D(\mathbf{x}^i | \mathbf{d} = d)}{2\sigma^2(d, w)} p(d) dd + M \frac{\|m(\mathbf{d}, w) - M(\mathbf{x} | \mathbf{d})\|^2}{2\sigma^2(\mathbf{d}, w)}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
M[-\ln p_{MDN}(\mathbf{x} | \mathbf{d}, w)] &= n_x \ln \sqrt{2\pi} + M \frac{\|m(\mathbf{d}, w) - M(\mathbf{x} | \mathbf{d})\|^2}{2\sigma^2(\mathbf{d}, w)} + \\
&+ \int \frac{\sum_i D(\mathbf{x}^i | \mathbf{d} = d)}{2\sigma^2(d, w)} p(d) dd + M[n_x \ln \sigma(\mathbf{d}, w)].
\end{aligned} \tag{25}$$

Обозначим  $B$  сумму последних двух слагаемых в (25) и  $D(d) = \frac{1}{n_x} \sum_i D(\mathbf{x}^i | \mathbf{d} = d)$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
B &= \int \frac{n_x}{2k(d, w)} p(d) dd + \int n_x \ln \sigma(d, w) p(d) dd = \\
&= \int \frac{n_x}{2k(d, w)} + n_x \ln \sqrt{k(d, w)D(d)} p(d) dd = \\
&= \frac{n_x}{2} \int (1 + \ln D(d)) p(d) dd + \frac{n_x}{2} \int \left( \frac{1}{k(d, w)} + \ln k(d, w) - 1 \right) p(d) dd.
\end{aligned}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned}
M[-\ln p_{MDN}(\mathbf{x} | \mathbf{d}, w)] &= n_x \ln \sqrt{2\pi} + M \frac{\|m(\mathbf{d}, w) - M(\mathbf{x} | \mathbf{d})\|^2}{2\sigma^2(\mathbf{d}, w)} + \\
&+ \frac{n_x}{2} M[1 + \ln D(\mathbf{d})] + \frac{n_x}{2} M \left[ \frac{1}{k(\mathbf{d}, w)} + \ln k(\mathbf{d}, w) - 1 \right].
\end{aligned}$$

Утверждение 2 доказано.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kogan F., Stark R., Gitelson A. et al. Derivation of pasture biomass in Mongolia from AVHRR-based vegetation health indices // *Int. J. Remote Sens.* — 2004. — **25**, N 14. — P. 2889–2896.
2. Richardson A., Duigan S., Berlyn G. An evaluation of noninvasive methods to estimate foliar chlorophyll content // *New Phytologist.* — 2002. — **153**, N 1. — P. 185–194.
3. Куssуль Н.Н., Ильин Н.И., Скакун С.В., Лавренюк А.Н. Оценка состояния растительности и прогнозирование урожайности озимых культур Украины по спутниковым данным // *Int. Book Series Decision Making and Business Intelligence, Strategies and Techniques.* — 2008. — N 3. — P. 103–109.
4. Куssуль Н.Н., Шелестов А.Ю., Скакун С.В., Кравченко А.Н. Интеллектуальные вычисления в задачах обработки данных наблюдения Земли. — К.: Наук. думка, 2007. — 196 с.

5. Кравченко А.Н., Куссуль Н.Н., Лупян Е.А. и др. Мониторинг водных ресурсов на основе интеграции разнородных данных и высокопроизводительных вычислений // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 4. — С. 179–188.
6. Evensen G. Data assimilation: the ensemble Kalman filter. — Berlin: Springer, 2006. — 280 p.
7. Kussul N., Shelestov A., Skakun S., Kravchenko O. Data assimilation technique for flood monitoring and prediction // Int. J. on Inform. Theory and Appl. — 2008. — **15**, N 1. — P. 76–84.
8. Liang S. Quantitative remote sensing of land surfaces. — New York: Wiley, 2004. — 534 p.
9. Baret F., Buis S. Estimating canopy characteristics from remote sensing observations: review of methods and associated problems / S. Liang (ed.), Advances in Land Remote Sensing. — Dordrecht: Springer, 2008. — P. 173–201.
10. Jacquemoud S., Baret F. PROSPECT: a model of leaf optical properties spectra // Remote Sens. of Env. — 1990. — **34**, N 2. — P. 75–91.
11. Feret J.B., François C., Asner G.P. et al. PROSPECT-4 and 5: advances in the leaf optical properties model separating photosynthetic pigments // Ibid. — 2008. — **112**, N 6. — P. 3030–3043.
12. Dawson T., Curran P., Plummer S. LIBERTY — modelling the effects of leaf biochemical concentration on reflectance spectra // Ibid. — 1998. — **65**, N 1. — P. 50–60.
13. Verhoef W. Light scattering by leaf layers with application of to canopy reflectance modeling: the SAIL model // Ibid. — 1984. — **16**, N 2. — P. 125–141.
14. Bacour C., Baret F., Béal D., Weiss M., Pavageau K. Neural network estimation of LAI, fAPAR, fCover and LAI×Cab, from top of canopy MERIS reflectance data: principles and validation // Ibid. — 2006. — **105**, N 4. — P. 313–325.
15. Vermote E.F., El Saleous N.Z., Justice C.O. Atmospheric correction of MODIS data in the visible to middle infrared: first results // Ibid. — 2002. — **83**, N 1. — P. 97–111.
16. Verstraete M., Pinty B. Designing optimal spectral indexes for remote sensing applications // IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sens. — 1996. — **34**, N 5. — P. 1254–1265.
17. Carlson T.N., Ripley D.A. On the relation between NDVI, fractional vegetation cover, and leaf area index // Remote Sens. of Env. — 1998. — **62**, N 3. — P. 241–252.
18. Baret F., Guyot G. Potentials and limits of vegetation indexes for LAI and APAR assessment // Ibid. — 1991. — **35**, N 2. — P. 161–173.
19. Gao B.C. NDWI — a normalized difference water index for remote sensing of vegetation liquid water from space // Ibid. — 1996. — **58**, N 3. — P. 257–266.
20. Ceccato P., Gobron N., Flasse S. et al. Designing a spectral index to estimate vegetation water content from remote sensing data. Part 1. Theoretical approach // Ibid. — 2002. — **82**, N 2. — P. 188–197.
21. Tarantola A. Inverse problem theory problem and methods for model parameter estimation. — Philadelphia: SIAM, 2005. — 358 p.
22. Weiss M., Baret F., Myneni R. et al. Investigation of a model inversion technique for the estimation of crop characteristics from spectral and directional reflectance data // Agronomie. — 2000. — **20**, N 1. — P. 3–22.
23. Knyazikhin Y., Martonchik J.V., Myneni R.B. et al. Synergistic algorithm for estimating vegetation canopy leaf area index and fraction of absorbed photosynthetically active radiation from MODIS and MISR data // J. Geophys. Res. — 1998. — **103**. — P. 32257–32274.
24. Combal B., Baret F., Weiss M. et al. Retrieval of canopy biophysical variables from bidirectional reflectance using prior information to solve the ill-posed inverse problem // Remote Sens. of Env. — 2002. — **84**, N 1. — P. 1–15.
25. Qingyuan Z., Xiangming X., Braswell B. et al. Estimating light absorption by chlorophyll, leaf and canopy in a deciduous broadleaf forest using MODIS data and a radiative transfer model // Ibid. — 2005. — **99**, N 3. — P. 357–371.
26. Bishop C. Pattern recognition and machine learning. — New York: Springer, 2006. — 740 p.

*Поступила 29.01.2009*