НОВЫЕ СРЕДСТВА КИБЕРНЕТИКИ, ИНФОРМАТИКИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

В.И. ЛЕВИН

УДК 519.715

НЕПРЕРЫВНАЯ ЛОГИКА И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Ключевые слова: *непрерывная логика, комбинаторная задача, автоматная модель.*

ВВЕДЕНИЕ

Задачи обработки данных, планирования работ, проектирования систем управления объектами и многие другие сводятся математически к решению комбинаторной задачи — вычислению подходящих показателей взаиморасположения n последовательностей интервалов (временных или пространственных) и нахождению условий, при которых это взаиморасположение имеет тот или иной качественный характер. Приведем несколько примеров таких задач.

1. Пусть имеется последовательность A временных интервалов, в которых некоторое основное техническое устройство работоспособно, и последовательность B временных интервалов, в которых работоспособно резервное устройство. Система «основное и резервное устройства» является работоспособной, если работоспособно хотя бы одно из двух ее устройств — основное или резервное. Таким образом, для того чтобы установить последовательность интервалов работоспособности заданной системы, нужно определить взаиморасположение последовательностей интервалов работоспособности основного устройства (последовательность A) и резервного устройства (последовательность B) и найти те промежутки времени, в которых имеются интервалы хотя бы одной из последовательностей — A или B; они и будут интервалами работоспособности системы. Для того чтобы, например, установить, когда система работоспособна на произвольном заданном отрезке времени T, нужно найти условия, при которых на этом отрезке интервалы последовательности B накрывают промежутки между интервалами последовательности A.

2. Рассмотрим последовательность A временных интервалов, в течение которых некоторая организация (магазин, банк, ремонтная мастерская и т.д.) выполняет обслуживание клиентов, и последовательность B временных интервалов, в течение которых некоторый клиент может посетить обслуживающую организацию. Для того чтобы установить последовательность промежутков времени возможного обслуживания клиента организацией, нужно определить взаиморасположение последовательностей интервалов A и B и выявить те промежутки времени, в которых имеются интервалы обеих последовательностей — A и B; они и будут промежутками времени возможного обслуживания клиента. Для того чтобы установить, когда организация может обслужить клиента при его обращении в любой доступный для него момент времени, нужно найти условия, при которых интервалы последовательности A накрывают все интервалы последовательности B.

3. Пусть заданы последовательность A временных интервалов, в которых председатель совета может провести его заседание, и последовательности

$B_1, \dots, B_{10}$ временных интервалов, в которых члены совета $1, \dots, 10$ могут участвовать в этом заседании. Заседание совета возможно только при участии в нем председателя и не менее пяти любых членов совета. Для того чтобы установить последовательность промежутков времени, в которые возможно проведение заседания совета, нужно определить взаиморасположение последовательностей интервалов $A, B_1, \dots, B_{10}$ и найти те промежутки времени, в которых одновременно имеются интервалы последовательности A и интервалы каких-нибудь пяти или более из 10 последовательностей $B_1, \dots, B_{10}$; они и будут промежутками времени возможного проведения заседания совета. Для того чтобы установить, когда проведение заседания совета возможно на произвольном заданном отрезке времени T, нужно найти условия, при которых отрезок T накрывается каким-либо интервалом последовательности A и какими-либо пятью или более интервалами, взятыми из пяти или более соответствующих последовательностей $B_1, \dots, B_{10}$.

Задача определения показателей взаиморасположения n последовательностей интервалов, примеры которой приведены выше, является комбинаторной задачей. При решении задач данного типа можно использовать различные переборные методы. Однако существенные недостатки этих методов (быстрый рост сложности вычислений при увеличении размеров задачи; неаналитический (поисковый) характер алгоритма решения; невозможность обозримого представления алгоритма решения в случае высокоразмерной задачи) заставляют искать другие пути решения. Возможный подход заключается в том, чтобы найти для задачи готовую математическую модель, которая глубоко и детально разработана на базе какого-нибудь удобного аналитического аппарата. В настоящей статье показано, что такой моделью может служить динамический конечный автомат [1–4], а таким аппаратом — непрерывная логика [1, 2, 5, 6].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задано n конечных последовательностей непересекающихся интервалов:

$$\begin{aligned} A_1 &= (a_{11}, b_{11}), (a_{12}, b_{12}), \dots, (a_{1m_1}, b_{1m_1}); \\ A_2 &= (a_{21}, b_{21}), (a_{22}, b_{22}), \dots, (a_{2m_2}, b_{2m_2}); \\ &------------------------- \\ A_n &= (a_{n1}, b_{n1}), (a_{n2}, b_{n2}), \dots, (a_{nm_n}, b_{nm_n}). \end{aligned} \tag{1}$$

Требуется: 1) определить взаиморасположение имеющейся системы последовательностей интервалов (1); 2) найти условия, при которых это взаиморасположение имеет тот или иной качественный характер. Под взаиморасположением интервалов понимается ситуация, определяемая пересечением одних и непересечением других интервалов. Первая задача нацелена на то, чтобы по заданному положению всех интервалов всех последовательностей (1) вычислить взаиморасположение любых комбинаций (по две, три и т.д.) любых подпоследовательностей последовательностей (1), вторая — найти условия, накладываемые на положение всех интервалов всех подпоследовательностей (1), при которых указанное взаиморасположение имеет тот или иной требуемый вид. Таким образом, задача 1 является задачей анализа системы последовательностей интервалов (1), а задача 2 — задачей синтеза такой системы. Задачи анализа и синтеза системы последовательностей интервалов вида (1) будем решать, используя адекватную системе (1) математическую модель конечного динамического автомата без памяти и математический аппарат непрерывной логики, необходимый для адекватного описания указанного автомата. Решение предлагается находить в аналитической форме суперпозиции непрерывно-логических операций, которая одновременно дает логический алгоритм получения численного решения.

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ И НЕПРЕРЫВНАЯ ЛОГИКА

Динамический конечный автомат (ДА) без памяти [1, 2, 4] представляет собой математическую модель в виде $(n,1)$-полюсника (рис. 1), реализующего на выходе y некоторую булеву функцию своих входов $x_1, \dots, x_n$:

$$y = f(x_1, \dots, x_n), \ x_1, \dots, x_n, \ y \in \{0,1\}. \tag{2}$$

На входы ДА рис. 1 подаются входные двоичные динамические процессы

$$\begin{aligned} &x_1(t) = 1(a_{11}, b_{11})0(-,-)1(a_{12}, b_{12})\dots 1(a_{1m_1}, b_{1m_1}); \\ &----------------------------- \\ &x_n(t) = 1(a_{n1}, b_{n1})0(-,-)1(a_{n2}, b_{n2})\dots 1(a_{nm_n}, b_{nm_n}), \end{aligned} \tag{3}$$

в которых $1(a,b)$ означают интервалы времени единичных значений процесса (импульсы), а $0(-,-)$ — промежуточные интервалы времени нулевых значений процесса (паузы). С выхода ДА снимается выходной двоичный динамический процесс

$$y(t) = 1(c_1, d_1)0(-,-)1(c_2, d_2)\dots 1(c_m, d_m), \tag{4}$$

соответствующий поданным входным процессам (3) ДА и его реализуемой булевой функции (2). Основной задачей для ДА без памяти является задача отыскания выходного динамического процесса $y(t)$ по его известным входным динамическим процессам $x_1(t), \dots, x_n(t)$ и реализуемой булевой функции f. В 1971–72 гг. автором было установлено, что эта задача может быть решена в аналитической форме для любого ДА без памяти, имеющего любые число входов, входные процессы и реализуемую функцию, с помощью математического аппарата непрерывной логики (НЛ) [1, 2, 4, 5]. Определяется НЛ следующим образом. Пусть $C = [A, B]$ — произвольный отрезок на оси вещественных чисел. Тогда для любых чисел $a, b, e \in C$ можно ввести следующие логические операции:

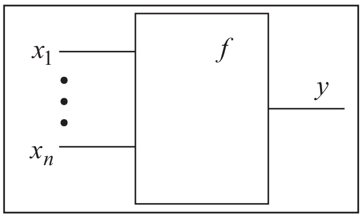

Рис. 1. Математическая модель конечного ДА

$$a \vee b = \max(a, b) \ \text{— дизъюнкция,} \tag{5}$$

$$a \wedge b = \min(a, b) \ \text{— конъюнкция,} \tag{6}$$

$$\bar{e} = A + B - e \ \text{— отрицание.} \tag{7}$$

Операции НЛ (5)–(7) подобны соответствующим операциям двузначной логики (где множество $C = \{0,1\}$) и обобщают их на случай непрерывного несущего множества. В НЛ сохраняют силу некоторые законы двузначной логики:

$$a \vee a = a, \ a \wedge a = a \ \text{— тавтологии;} \tag{8}$$

$$a \vee b = b \vee a, \ a \wedge b = b \wedge a \ \text{— переместительный;} \tag{9}$$

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \ \text{— сочетательный;} \tag{10}$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \ \text{—}$$

$$\text{распределительный;} \tag{11}$$

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}, \ \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b} \ \text{— де Моргана;} \tag{12}$$

$$a \vee (a \wedge b) = a, \ a \wedge (a \vee b) = a \ \text{— поглощения.} \tag{13}$$

Кроме них, в НЛ действуют некоторые важные специфические законы, например законы оценки и упрощения логического выражения:

$$a \vee b \ge a, b; \quad a \wedge b \le a, b, \tag{14}$$

$$a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_i \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_m = a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_m$$

$$\text{при } a_i \le a_k \ (k \ne i), \tag{15}$$

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_{i-1} \wedge a_i \wedge a_{i+1} \wedge \ldots \wedge a_m = a_1 \wedge \ldots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \ldots \wedge a_m$$

$$\text{при } a_i \ge a_k \ (k \ne i). \tag{16}$$

Идея отыскания выходного процесса ДА без памяти по его заданным входным процессам и реализуемой логической функции проста. Введем следующие обозначения: 1 — двоичный динамический процесс, принимающий постоянное значение 1; 0 — двоичный динамический процесс, принимающий постоянное значение 0; $1'$— изменение значения процесса $0 \to 1$; $0'$ — изменение значения процесса $1 \to 0$; $1'_a$ — изменение $1'$ в момент времени a; $0'_b$ — изменение $0'$ в момент времени b; $1'_a 0'_b$ — импульс $1(a, b)$ в интервале времени (a, b); $0'_a 1'_b$ — пауза $0(a, b)$ в интервале времени (a, b). Любой двоичный динамический процесс можно записать в виде последовательности импульсов и пауз (как в (3)) либо последовательности изменений значения процесса. Например, процесс на рис. 2 можно записать в виде

$$x(t) = 1(-\infty, a)0(-,-)1(b, e)0(-, \infty) \ \text{ или } \ x(t) = 0'_a 1'_b 0'_e.$$

Число изменений значения двоичного процесса называется его глубиной. Например, глубина процесса на рис. 2 равна 3. Для системы (вектора) двоичных процессов соответствующим понятием является векторная глубина. Например, векторная глубина системы двух процессов $x_1(t) = 1(a, b)$, $x_2(t) = 1(c, d)$ равна $(2,2)$.

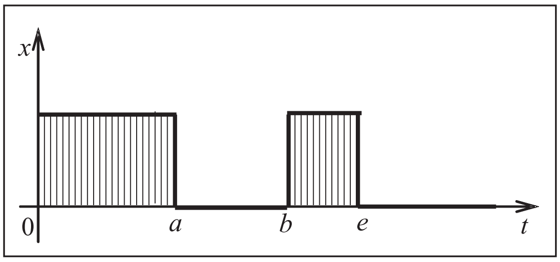

Рис. 2. Выходной процесс ДА без памяти

Покажем на примерах, как с помощью НЛ определить выходной процесс ДА без памяти по его входным процессам и реализуемой логической функции. Ограничимся простейшими ДА — двухвходовыми дизъюнкторами и конъюнкторами, реализующими булевы функции дизъюнкция $\vee$ и конъюнкция $\wedge$:

$$y = x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 0 \text{ при } x_1 = x_2 = 0, \\ 1 \text{ в противном случае;} \end{cases} \quad y = x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 1 \text{ при } x_1 = x_2 = 1, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{17}$$

и простейшими входными процессами с глубиной не свыше 1. Пусть надо найти выходной процесс конъюнктора на входные процессы $x_1(t) = 1'_a$, $x_2(t) = 0'_b$. Искомый процесс, очевидно, равен одиночному импульсу $1(a, b)$ или тождественному нулю, в зависимости от того, что больше — b или a. Поэтому, интерпретируя тождественный нуль как одиночный импульс с совмещенными началом и концом, можем записать искомый процесс в виде

$$y(t) = x_1(t) \wedge x_2(t) = 1'_a \wedge 0'_b = \begin{cases} 1(a, b) & \text{при } b > a; \\ 0 = 1(a, a) & \text{при } b \le a. \end{cases} \tag{18}$$

Отсюда с помощью операции дизъюнкции НЛ $\vee$ окончательно находим

$$1'_a \wedge 0'_b = 1(a, a \vee b). \tag{19}$$

Выходные процессы в дизъюнкторе и конъюнкторе при всех остальных входных процессах с глубиной не выше 1 получаются аналогично:

$$0 \wedge 0'_a = 0 \wedge 1'_b = 0;\ 1 \wedge x'_a = x'_a;\ 0'_a \wedge 0'_b = 0'_{a \wedge b};\ 1'_a \wedge 1'_b = 1'_{a \vee b};\ 1'_a \wedge 0'_b = 1(a, a \vee b);$$

$$1 \vee 0'_a = 1 \vee 1'_b = 1;\ 0 \vee x'_a = x'_a;\ 0'_a \vee 0'_b = 0'_{a \vee b};\ 1'_a \vee 1'_b = 1'_{a \wedge b};\ 1'_a \vee 0'_b = 0\,(b, a \vee b). \quad (20)$$

Формулы (20) наглядно демонстрируют удобство и адекватность аппарата НЛ как средства отыскания выходных процессов ДА без памяти по их входным процессам и реализуемой логической функции.

Если входные процессы дизъюнктора или конъюнктора имеют глубину свыше 1, то отыскание их выходных процессов требует применения формальных методов. Основные из них — прямой метод, метод декомпозиции и метод инверсии. Прямой метод основан на полном переборе всех возможных случаев взаимного расположения входных процессов элемента. Для каждого случая выходной процесс элемента записывается в явном виде отдельно. Общее выражение этого процесса получается из частных с использованием НЛ. Метод декомпозиции состоит в том, что один из двух входных процессов элемента — $x_1(t)$ или $x_2(t)$, например $x_1(t)$, разбивается на два последовательных подпроцесса — $x_{11}(t)$ и $x_{12}(t)$. Затем находятся составляющие выходные процессы $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — реакции элемента на составляющие входные процессы $\{x_{11}(t), x_2(t)\}$ и $\{x_{12}(t), x_2(t)\}$. Если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ не пересекаются во времени участками, содержащими все изменения значения процесса, то искомый выходной процесс $y(t)$ определяется как последовательность процессов $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Метод инверсии основан на формулах

$$\overline{x_1(t) \vee x_2(t)} = \overline{x_1(t)} \wedge \overline{x_2(t)},\quad \overline{x_1(t) \wedge x_2(t)} = \overline{x_1(t)} \vee \overline{x_2(t)}, \quad (21)$$

вытекающих из закона де Моргана двузначной (булевой) логики и позволяющих по уже известной реакции дизъюнктора (конъюнктора) на входные процессы $x_1(t)$, $x_2(t)$ легко определить реакцию конъюнктора (дизъюнктора) на входные процессы $\overline{x_1(t)}$, $\overline{x_2(t)}$. Используя эти методы, нетрудно получить формулы для выходных процессов дизъюнктора и конъюнктора при различных входных процессах с глубиной (1,2):

$$0'_a \vee 1(b,c) = 0(a, a \vee b)1(-, a \vee c);\quad 1'_a \vee 1(b,c) = 1(a \wedge b, c)0(-, a \vee c);$$
$$0'_a \vee 0(b,c) = 0(a \vee b, a \vee c);\quad 1'_a \vee 0(b,c) = 0(a \wedge b, a \wedge c);$$
$$0'_a \wedge 1(b,c) = 1(a \wedge b, a \wedge c);\quad 1'_a \wedge 1(b,c) = 1(a \vee b, a \vee c); \quad (22)$$
$$0'_a \wedge 0(b,c) = 0(a \wedge b, c)1(-, a \vee c);\quad 1'_a \wedge 0(b,c) = 1(a, a \vee b)0(-, a \vee c);$$

входных процессах с глубиной (2,2):

$$1(a,b) \vee 1(c,d) = 1[a \wedge c, (a \wedge d) \vee (b \wedge c)]\,0(-,-)1(a \vee c, b \vee d);$$

$$1(a,b) \wedge 1(c,d) = 1\,[a \vee c, a \vee c \vee (b \wedge d)];\quad 0\,(a,b) \vee 0(c,d) = 0[(a \wedge d) \vee (b \wedge c), b \wedge d];$$

$$0(a,b) \wedge 0(c,d) = 0[a \wedge c, (a \wedge d) \vee (b \wedge c)]\,1(-, a \vee c)0(-, b \vee d); \quad (23)$$

$$0(a,b) \vee 1(c,d) = 0\,(a \wedge c, b \wedge c)\,1(-, a \vee d)0(-, b \vee d);$$

$$0(a,b) \wedge 1(c,d) = 1\,(a \wedge c, a \wedge d)\,0\,(-, b \vee c)1(-, b \vee d)$$

и т.д. Аналогично находятся НЛ-выражения выходных процессов многовходовых дизъюнкторов и конъюнкторов, реализующих многоместные булевы функции дизъюнкцию и конъюнкцию, аналогичные их двуместным прототипам (17):

$$0'_a \wedge 0'_b \wedge \ldots \wedge 0'_d = 0'_{a \wedge b \wedge \ldots \wedge d};\quad 1'_a \wedge 1'_b \wedge \ldots \wedge 1'_d = 1'_{a \vee b \vee \ldots \vee d};$$

$$1'_a \wedge 1'_b \wedge \ldots \wedge 1'_d \wedge 0'_e \wedge 0'_g \wedge \ldots \wedge 0'_f = 1[a \vee b \vee \ldots \vee d; a \vee b \vee \ldots \vee d \vee (e \wedge g \wedge \ldots \wedge f)];$$

$$0'_a \vee 0'_b \vee \ldots \vee 0'_d = 0'_{a \vee b \vee \ldots \vee d}; \; 1'_a \vee 1'_b \vee \ldots \vee 1'_d = 1'_{a \wedge b \wedge \ldots \wedge d}; \qquad (24)$$

$$1'_a \vee 1'_b \vee \ldots \vee 1'_d \vee 0'_e \vee 0'_g \vee \ldots \vee 0'_f = 0[e \vee g \vee \ldots \vee f; e \vee g \vee \ldots \vee f \vee (a \wedge b \wedge \ldots \wedge d)].$$

3. ИДЕЯ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Интерпретируем интервалы в системе последовательностей интервалов (1) как временные интервалы. Тогда системе (1) можно поставить во взаимно однозначное соответствие совокупность двоичных динамических процессов $x_i(t)$ (3). Именно, i-й процесс этой совокупности соответствует i-й последовательности системы ($i = \overline{1, n}$), причем k-й импульс процесса соответствует k-му интервалу последовательности ($k = \overline{1, m_i}$). Другими словами, двоичная переменная x_i ($i = \overline{1, n}$) является индикатором присутствия какого-то интервала i-й последовательности интервалов (1): $x_i = 1$ означает присутствие, а $x_i = 0$ — отсутствие интервала. Подадим определенную описанным образом совокупность двоичных динамических процессов $x_i(t)$ (3) на входы $x_1, \ldots, x_n$ ДА без памяти (рис. 1), который реализует некоторую выбранную булеву функцию входов $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ вида (2). Тогда ДА выдаст на выходе y некоторый двоичный динамический процесс $y(t)$ вида (4). Что характеризует этот процесс? Как известно, любая булева функция определяется заданным множеством единичных наборов значений аргументов, на которых функция принимает значение 1. Таким образом, выбранная определенная булева функция f, предназначенная для реализации в ДА без памяти (рис. 1), заставляет этот ДА вырабатывать на выходе определенный двоичный динамический процесс $y(t)$ вида (4), импульсы которого соответствуют интервалам времени, где входные процессы $x_i(t)$ (3) ДА принимают набор значений, совпадающий с одним из единичных наборов функции f. Последнее означает, что при подаче на входы ДА без памяти совокупности двоичных процессов $x_i(t)$ (3), взаимно однозначно соответствующих системе последовательностей интервалов (1), выбор для реализации в этом ДА некоторой булевой функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ означает выбор соответствующего частного показателя взаиморасположения системы последовательностей интервалов (1), а реализуемый на выходе ДА двоичный процесс $y(t)$ (4) — числовое значение этого показателя. Например, если в качестве функции f выбрана многоместная булева конъюнкция, это означает (поскольку у такой функции есть только один единичный набор $(1,1,\ldots,1)$) выбор частного показателя взаиморасположения системы последовательностей интервалов (1) в виде выделения всех случаев, когда интервалы всех n последовательностей (1) пересекаются. При этом числовое значение данного показателя имеет вид двоичного процесса $y(t)$ (4), импульсы которого соответствуют отрезкам времени, в которых интервалы всех n последовательностей (1) пересекаются.

Таким образом, в качестве адекватной математической модели для решения задачи анализа системы последовательностей интервалов (1) можно выбрать ДА без памяти на рис. 1. Входными двоичными динамическими процессами этого ДА является совокупность процессов (3), взаимно однозначно соответствующая системе последовательностей интервалов (1), т.е. совокупность процессов, моделирующая эту систему. ДА реализует некоторую, выбранную булеву функцию $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, являющуюся некоторым частным показателем взаиморасположения системы последовательностей интервалов. Тогда на выходе ДА вырабатывается двоичный динамический процесс $y(t)$ (4), дающий числовое значение выбранного частного показателя взаиморасположения интервалов (более точно, выделяющий отрезки времени, в которых интервалы системы (1) находятся в данном взаиморасположении). Иначе говоря, выходной процесс (4) ДА-модели рис. 1 моделирует числовое значение того или иного частного показателя взаиморасположения системы последовательностей интервалов (1), соответствующего выбранной булевой функции f, реализуемой ДА.

Алгоритм решения задачи анализа системы последовательностей интервалов (1) в соответствии с изложенной идеей имеет следующий вид.

Шаг 1. Выбирается некоторый частный показатель П, характеризующий взаиморасположение интервалов системы (1) (если показатель П уже задан условиями задачи, шаг 1 опускается).

Шаг 2. Строится булева функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$, соответствующая показателю Π.

Шаг 3. Строится математическая модель задачи — схема (рис. 1) ДА без памяти, реализующая функцию f и получающая на n своих входах двоичные динамические процессы $x_i(t)$ (3), совокупность которых взаимно однозначно соответствует заданной системе последовательностей интервалов (1). Выходной двоичный процесс ДА $y(t)$ (4) моделирует показатель взаиморасположения системы интервалов (1) (выделяет периоды, в течение которых интервалы находятся в данном взаиморасположении).

Шаг 4. Методами теории ДА [1–4] по входным процессам ДА-модели $x_1(t), \dots, x_n(t)$ и его реализуемой функции f находится его выходной процесс $y(t)$ (4). Параметры (моменты изменения значений) этого процесса выражаются через аналогичные параметры входных процессов ДА-модели в аналитической форме с помощью операций дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$ НЛ.

Шаг 5. Развернув найденные на шаге 4 аналитические выражения параметров выходного процесса ДА-модели $y(t)$, получаем алгоритмы вычисления этих параметров в терминах операций НЛ $\vee$ и $\wedge$.

Шаг 6. Вычислив параметры выходного процесса ДА-модели $y(t)$ по алгоритмам, найденным на шаге 5, получаем числовое значение этого процесса, являющееся числовым значением выбранного частного показателя П (или f) взаиморасположения системы последовательностей интервалов.

Конец алгоритма.

Заметим, что в общем случае решение задачи анализа системы последовательностей интервалов (1) может потребовать использования не одного, а нескольких частных показателей взаиморасположения интервалов данной системы (1). В этом случае получается общая задача анализа, распадающаяся на несколько частных задач, соответствующих указанным частным показателям. Для решения общей задачи анализа следует решить с помощью описанного алгоритма все частные задачи и объединить полученные решения.

Алгоритм решения задачи синтеза системы последовательностей интервалов (1), соответствующей заданным требованиям к взаиморасположению интервалов, строится с использованием описанного алгоритма решения задачи анализа системы (1). Он состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Решение частичной задачи анализа (путем выполнения шагов 1–4 алгоритма анализа) для подлежащей синтезу системы последовательностей интервалов (1) в предположении, что задан показатель взаиморасположения интервалов, а все параметры системы (1) (координаты начала и конца всех интервалов) заданы в буквенной форме. В результате получается двоичный процесс $y(t)$, моделирующий заданный показатель взаиморасположения интервалов (1) (точнее, содержащий импульсы-периоды, в течение которых интервалы находятся в заданном взаиморасположении).

Шаг 2. Составление системы уравнений и неравенств, выражающих в математической форме заданные требования к взаиморасположению интервалов (1). Данная система получается путем выписывания требуемых соотношений $(>, =)$ между координатами начала и конца соответствующих импульсов процесса $y(t)$. Поскольку эти координаты выражаются через параметры интервалов (1) с помощью операций НЛ, полученная система является системой уравнений и неравенств НЛ.

Шаг 3. Решение системы уравнений и неравенств НЛ, полученной на шаге 2, с помощью специальных методов [1, 2, 5, 6], основанных на принципе последовательного расчленения отдельного уравнения (неравенства) НЛ на несколько более простых уравнений (неравенств). В результате решения указанной системы уравнений (неравенств) НЛ находятся условия на параметры отдельных интервалов (1), при выполнении которых взаиморасположение этих интервалов отвечает заданным требованиям.

Конец алгоритма.

4. ПРИМЕР

Магазин открыт в течение дня с a_{11} до b_{11} и с a_{12} до b_{12} часов ($b_{11} < a_{12}$). Двое сотрудников собираются вместе его посетить. Первый из них свободен и может это сделать в промежутке времени с a_{21} до b_{21} часов, аналогично второй — в промежутке с a_{31} до b_{31} часов. Требуется определить периоды времени, в каждом из которых они могут реализовать план посещения магазина, и установить, при каких условиях это посещение возможно, т.е. указанные периоды существуют (не вырождены).

Сотрудники могут реализовать свой план посещения магазина в те и только те периоды времени, когда он открыт, а оба они свободны. Следовательно, для ответа на первый вопрос нужно решить задачу анализа системы последовательностей интервалов

$$A_1 = (a_{11}, b_{11}), (a_{12}, b_{12}); \; A_2 = (a_{21}, b_{21}); \; A_3 = (a_{31}, b_{31}),$$

т.е. определить нужное взаиморасположение интервалов этой системы. Конкретно, представляют интерес те периоды времени, в течение которых взаиморасположение таково, что присутствуют интервалы всех трех последовательностей: A_1, A_2, A_3. Для решения задачи применим алгоритм анализа разд. 3.

Шаг 1. Показатель П, характеризующий нужное взаиморасположение интервалов системы A_1, A_2, A_3, содержательно уже задан условиями задачи.

Шаг 2. Булева функция $y = f(x_1, x_2, x_3)$, соответствующая показателю П, есть трехместная конъюнкция $y = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$.

Шаг 3. Математическая модель задачи — ДА без памяти с 3 входами и 1 выходом, реализующий на выходе указанную функцию f своих входов (рис. 3). На входы ДА-модели поступают двоичные процессы

$$x_1(t) = 1(a_{11}, b_{11})0(-,-)1(a_{12}, b_{12}), \; x_2(t) = 1(a_{21}, b_{21}), \; x_3(t) = 1(a_{31}, b_{31}),$$

взаимно однозначно соответствующие заданной системе интервалов (A_1, A_2, A_3). С выхода ДА снимается двоичный процесс $y(t)$ вида (4), моделирующий показатель П взаиморасположения системы интервалов (A_1, A_2, A_3).

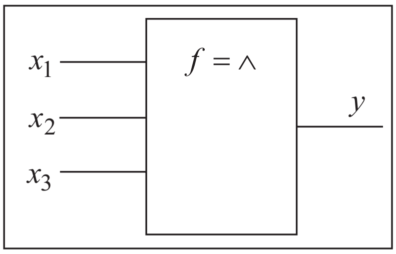

Рис. 3. ДА без памяти, реализующий 3-местную конъюнкцию

Шаг 4. По входным процессам $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ ДА-модели и его реализуемой функции $f = \wedge$ находим его выходной процесс $y(t)$ [1, 2, 4], используя готовую формулу $1(a,b) \wedge 1(c,d) = 1[a \vee c, a \vee c \vee (b \wedge d)]$:

$$y(t) = x_1(t) \wedge x_2(t) \wedge x_3(t) = x_1(t) \wedge [x_2(t) \wedge x_3(t)] = [1(a_{11}, b_{11})0(-,-)1(a_{12}, b_{12})] \wedge$$
$$\wedge [1(a_{21}, b_{21}) \wedge 1(a_{31}, b_{31})] = [1(a_{11}, b_{11})0(-,-)1(a_{12}, b_{12})] \wedge$$
$$\wedge 1[a_{21} \vee a_{31}, a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31})] = \{1(a_{11}, b_{11}) \wedge 1[\cdot]\}0(-,-)\{1(a_{12}, b_{12}) \wedge 1[\cdot]\} =$$
$$= 1\{a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31}, a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31} \vee [b_{11} \wedge (a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31}))]\}0(-,-)1\{a_{12} \vee$$
$$\vee a_{21} \vee a_{31}, a_{12} \vee a_{21} \vee a_{31} \vee [b_{12} \wedge (a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31}))]\}.$$

Шаг 5. Найденные на шаге 4 аналитические выражения параметров A, B, C, D выходного процесса $y(t) = 1(A, B)0(-,-)1(C, D)$ ДА-модели дают алгоритмы вычисления этого процесса в терминах операций НЛ $\vee$ (max) и $\wedge$ (min). Например, $A = \max(a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $B = \max(A, \min(b_{11}, \max(a_{21}, a_{31}, \min(b_{21}, b_{31}))))$ и т.д.

Шаг 6. По алгоритмам, найденным на шаге 5, определяем параметры выходного процесса $y(t)$ ДА-модели, соответствующие конкретным значениям параметров a_{ij}, b_{ij} входных процессов $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$. Например, при $a_{11} = 9$, $a_{12} = 14$, $b_{11} = 13$, $b_{12} = 20$, $a_{21} = 12$, $b_{21} = 16$, $a_{31} = 11$, $b_{31} = 15$ находим $A = 12$, $B = 13$, $C = 14$, $D = 15$. Таким образом, имеются два периода времени, в течение которых оба сотрудника могут совместно посетить магазин: (12,13) и (14,15).

Для того чтобы установить, при каких общих условиях возможно совместное посещение магазина двумя сотрудниками, нужно определить, когда существуют периоды времени, в которые они могут совместно посетить магазин. Таким образом, для ответа на второй вопрос нужно решить задачу синтеза системы последовательностей интервалов (A_1, A_2, A_3), т.е. найти условия, при которых взаиморасположение интервалов этой системы имеет нужный качественный характер, благодаря чему и обеспечивается существование указанных периодов времени. Для решения задачи применим алгоритм синтеза из разд. 3.

Шаг 1. Уже выполнен и содержится в шагах 1–4 алгоритма анализа системы (A_1, A_2, A_3), выполненных выше.

Шаг 2. Систему уравнений и неравенств НЛ, выражающих требования к взаиморасположению интервалов системы (A_1, A_2, A_3), обеспечивающие нужные периоды времени, получаем, потребовав, чтобы найденный в процессе анализа системы (A_1, A_2, A_3) выходной процесс $y(t) = 1(A, B)0(-,-)1(C, D)$ ДА-модели, моделирующий заданный показатель взаиморасположения интервалов, имел невырожденные импульсы, моделирующие требуемые периоды времени: $B > A$ или $D > C$. Подставив сюда выражения для A, B, C, D из развернутого выражения процесса $y(t)$, приведенного выше, получим

$$a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31} \vee [b_{11} \wedge (a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31}))] > a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31}$$

или

$$a_{12} \vee a_{21} \vee a_{31} \vee [b_{12} \wedge (a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31}))] > a_{12} \vee a_{21} \vee a_{31}.$$

Шаг 3. Упростив полученные на шаге 2 неравенства НЛ, получим

$$b_{11} \wedge [a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31})] > a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31}$$

или

$$b_{12} \wedge [a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31})] > a_{12} \vee a_{21} \vee a_{31}.$$

Взаиморасположение интервалов системы (A_1, A_2, A_3), отвечающее хотя бы одному из выписанных неравенств, обеспечивает наличие периодов времени, в течение которых сотрудники могут совместно посетить магазин. Еще раз обратим внимание, что обе части выписанных неравенств (условий) представляют собой выражения, построенные из параметров интервалов системы (A_1, A_2, A_3) с помощью операций НЛ — дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что изучение класса комбинаторных задач, эквивалентных комбинаторной задаче определения взаиморасположения n последовательностей интервалов, можно осуществлять с помощью математической модели динамического конечного автомата без памяти и математического аппарата непрерывной логики. Такой подход позволяет формально находить алгоритмы решения указанных задач, а также формально анализировать эти решения, например, находить необходимые и достаточные условия их существования. Другим преимуществом предложенного подхода является его применимость к решению задач произвольно высокой размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин В.И. Введение в динамическую теорию конечных автоматов. — Рига: Зинатне, 1975. — 376 с.
2. Bochmann D., Roginskij V.N., Levin V.I. Dinamische Processe in Automaten. — Berlin: Technik, 1977. — 280 с.
3. Левин В.И. Динамика логических устройств и систем. — М.: Энергия, 1980. — 230 с.
4. Левин В.И. Теория динамических автоматов. — Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1995. — 407 с.
5. Левин В.И. Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики. — М.: Радио и связь, 1982. — 176 с.
6. Левин В.И. Структурно-логические методы исследования сложных систем. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

Поступила 04.07.2007