УДК 62.519

Б.Е. РЫЦАР

НОВЫЙ ПОДХОД К ДЕКОМПОЗИЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ. 4. НЕРАЗДЕЛИТЕЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ: МЕТОД p, q-РАЗБИЕНИЯ[1]

Ключевые слова: *неразделительная функциональная декомпозиция, p, q-разбиение конъюнктермов булевой функции, теоретико-множественный подход, расширенные клоны, сжатые клоны.*

При неразделительной функциональной декомпозиции [1–3], в отличие от разделительной, некоторые переменные заданной булевой функции в результате их разбиения (в простейшем случае на два класса) являются общими для подфункций от переменных этих классов.

Задача неразделительной декомпозиции булевых функций занимает особо важное место в логическом синтезе комбинационных сетей. К ней приходится прибегать в случае, когда для заданного разбиения либо для всех возможных разбиений переменных заданной функции разделительной декомпозициия не существует. Такая ситуация часто возникает при многоуровневой декомпозиции, обусловленной ограниченным форматом разбиения (например, при использовании в качестве логического базиса макроячеек программируемой матрицы типа FPGA (Field Programmable Gate Array) с числом входов 3–5) [4–7]. В практике логического синтеза цифровых устройств неразделительная декомпозиция булевых функций встречается чаще разделительной [4, 5].

Известные методы неразделительной функциональной декомпозиции преимущественно основаны на идее Куртиса [1], суть которой состоит в том, что определение условия декомпозируемости/недекомпозируемости заданной функции оценивается по картам (матрицам), а также на использовании разложения Шеннона заданной функции относительно общей (для классов разбиения) переменной либо переменных [2–12]. Однако при большом числе переменных, а также для системы функций, заданных в ДНФ, подобные матрично-аналитические подходы являются довольно громоздкими и сложными для реализиции. Следует заметить, что многие известные методы функциональной декомпозиции вообще недейственны в случае неразделительной декомпозиции [3, 12, 15].

В настоящей статье рассматривается неразделительная декомпозиция булевых функций на основе теоретико-множественного метода, являющаяся важной составляющей ряда работ автора по функциональной декомпозиции [16–18]. При этом автор исходит из того, что разделительную декомпозицию в некотором смысле можна считать частным случаем неразделительной декомпозиции. Другими словами, рассмотренные в [16–18] основные операции и процедуры, применяемые при разделительной декомпозиции, будут сохранены и для случая неразделительной декомпозиции. Вместе с тем следует подчеркнуть, что поскольку в случае неразделительной декомпозиции пересечение классов разбиения не пусто (сумма их мощностей теперь будет больше n), то некорректно применять ключевое слово «q-разбиение» вместе с производными терминами, а именно $(n-q)$- и q-разбитые конъюнктермы, клоны $(n-q)$- и q-класса и т.п. Поэтому в данном случае вместо термина «q-разбиение» будет применен термин «p, q-разбиение» (вместе с соответствующими производными терминами), под которым подразумевается более широкое понятие разбиения на два класса — когда разбиваемые классы p и q могут пересекаться.

[1] Начало см. в № 5, 2001, № 1, 2002, № 2, 2007.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Пусть задана полная булевая функция от n переменных $f(X)$, $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, т.е. $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$. Под неразделительной декомпозицией функции $f(X)$ методом p,q-разбиения конъюнктермов будем понимать ее разложение на суперпозицию функций от числа переменных, меньшего n, но большего единицы, что представляют соответствующие выражения

$$f(X)=\varphi(\varphi_1(X^p),X^q), \tag{1}$$

$$f(X)=\varphi(X^p,\varphi_2(X^q)), \tag{2}$$

$$f(X)=\varphi(\varphi_1(X^p),\varphi_2(X^q)). \tag{3}$$

Здесь X^p и X^q — подмножества множества X, причем $X^p\cup X^q=X$, которые образуют непустое пересечение $X^p\cap X^q=Z$, $Z=\{x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_c}\}$, где $q\in\{2,3,\ldots,n-2\}$, $p=n-q+c$, $c\in\{1,2,\ldots,n-3\}$, $c<q$ — число общих переменных, причем $|X^p|=p$, $|X^q|=q$; $\varphi_1(X^p)$ и $\varphi_2(X^q)$ — связывающие функции, φ — остаточная функция.

Согласно классификации [19] неразделительные декомпозиции полной функции f, представляемые суперпозициями (1)–(3), по виду блочной структуры подобны разделительным декомпозициям [16]. На рис. 1 множество общих переменных Z условно показано пунктирными линиями. Суперпозиции (1) и (2) представляют одноблочные неразделительные декомпозиции (рис. 1, *а*, *б*), а (3) — двухблочную неразделительную декомпозицию (рис. 1, *в*). При $c=0$, т.е. когда $Z=\varnothing$, суперпозиции (1), (2) и (3) представляют соответствующие виды разделительной декомпозиции функции $f(X)$ [16]. Исходя из этого суперпозиции (1), (2) и (3) будем называть простыми неразделительными декомпозициями функции $f(X)$.

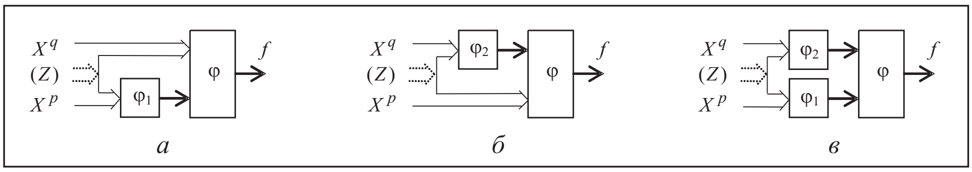

Рис. 1

Заметим, что двухблочная неразделительная декомпозиция (3) возможна для функций от числа переменных $n\ge 3$, а одноблочные неразделительные декомпозиции (1) и (2) — для функций от числа переменных $n\ge 4$. При этом с увеличением числа переменных n и числа общих переменных c количество возможных вариантов неразделительных декомпозиций, в отличие от разделительных, комбинаторно увеличивается.

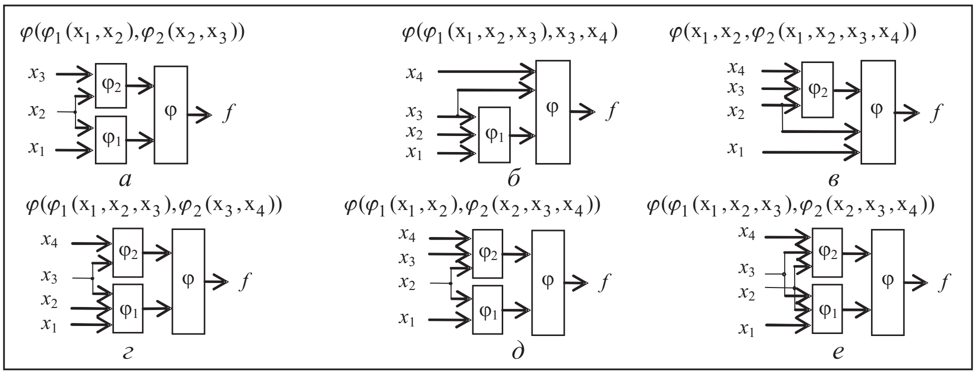

Рис. 2

На рис. 2 приведены примеры возможных простейших случаев неразделительных декомпозиций и соответствующих им декомпозиционных выражений. В частности, для функции $f(x_1, x_2, x_3)$ имеем двухблочную декомпозицию вида (3) при $c = 1\,(Z = \{x_2\})$ (рис. 2, *а*); для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеем одноблочные декомпозиции видов (1) и (2) при $c = 1\,(Z = \{x_3\}$ и $Z = \{x_2\})$ (рис. 2, *б*, *в*); двухблочные декомпозиции (3) — при $c = 1$ $(Z = \{x_3\}$ и $Z = \{x_2\})$ (рис. 2, *г*, *д*); двухблочную декомпозицию (3) — при $c = 2$ $(Z = \{x_2, x_3\})$ (рис. 2, *е*).

Декомпозируемую заданную функцию f, как полную $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, так и частичную $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1,\sim\}$, будем представлять в теоретико-множественной форме (ТМФ) [16] двумя множествами минтермов: ТМФ $Y^1 = \{m_1, m_2, \ldots, m_r\}^1$ и ТМФ $Y^0 = \{m_{r+1}, m_{r+2}, \ldots, m_v\}^0$, т.е. совершенной ТМФ $Y = \begin{cases} Y^1 \\ Y^0 \end{cases}$, где $v = 2^n - r$ в случае полной функции f, а в случае частичной функции f имеем $v < 2^n - r$; $r < |\mathbf{E}_2^n|$.

2. ДВА СПОСОБА ПОИСКА НЕРАЗДЕЛИТЕЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

По методу p,q-разбиения выделим два способа получения неразделительной декомпозиции заданной функции f, отличающиеся как видом задаваемой маски p,q-разбиения, накладываемой на двоичные минтермы совершенной ТМФ Y, так и процедурами получения разбитых минтермов и декомпозиционных клонов. Рассмотрим простейший случай поиска неразделительной декомпозиции полной булевой функции f, заданной совершенной ТМФ

$$Y = \begin{cases} \{m_1, m_2, \ldots, m_r\}^1, \\ \{m_{r+1}, m_{r+2}, \ldots, m_{2^n - r}\}^0, \end{cases}$$

когда в обоих классах разбиения присутствует одна общая переменная, т.е. когда $c = 1$. Очевидно, что рассматриваемый подход может быть обобщен и для случая $c > 1$.

2.1. Способ расширенного p,q-разбиения. В основе способа расширенного p,q-разбиения лежит идея наложения на двоичные минтермы функции f, заданной совершенной ТМФ

$$Y = \begin{cases} \{(\sigma_1 \cdots \sigma_n)_1, (\sigma_1 \cdots \sigma_n)_2, \ldots, (\sigma_1 \cdots \sigma_n)_r\}^1 \\ \{(\sigma_1 \cdots \sigma_n)_{r+1}, (\sigma_1 \cdots \sigma_n)_{r+2}, \ldots, (\sigma_1 \cdots \sigma_n)_{2^n - r}\}^0 \end{cases}, \ \sigma_i \in \{0,1\},$$

маски $\{l_{\alpha_1} \cdots l_j \cdots l_{\alpha_p} | l_{\beta_1} \cdots l_j \cdots l_{\beta_q}\}$ с общим литералом $l_j \in \{\bar{x}_j, x_j\}$ соответственно искомому виду неразделительной декомпозиции. В результате так называемого расширенного p,q-разбиения образуется совершенная ТМДФ Y заданной функции f, разбитые минтермы которой имеют в обоих классах разбиения одинаковый по значению общий элемент $\sigma_j \in \{0,1\}$:

$$\overset{P^q}{\Rightarrow} \{l_{\alpha_1} \cdots l_j \cdots l_{\alpha_p} | l_{\beta_1} \cdots l_j \cdots l_{\beta_q}\} =$$

$$= \begin{cases} \{(\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_j \cdots \sigma_{\alpha_p})_1^p | (\sigma_{\beta_1} \cdots \sigma_j \cdots \sigma_{\beta_q})_1^q, (\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_j \cdots \sigma_{\alpha_p})_2^p | \\ \{(\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_j \cdots \sigma_{\alpha_p})_{r+1}^p | (\sigma_{\beta_1} \cdots \sigma_j \cdots \sigma_{\beta_q})_{r+1}^q, (\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_j \cdots \sigma_{\alpha_p})_{r+2}^p | \end{cases} \quad (4)$$

$$(\sigma_{\beta_1} \cdots \sigma_j \cdots \sigma_{\beta_q})_2^q, \ldots, (\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_j \cdots \sigma_{\alpha_p})_r^p | (\sigma_{\beta_1} \cdots \sigma_j \cdots \sigma_{\beta_q})_r^q\}^1,$$

$$(\sigma_{\beta_1} \cdots \sigma_j \cdots \sigma_{\beta_q})_{r+2}^q, \ldots, (\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_j \cdots \sigma_{\alpha_p})_{2^n - r}^p | (\sigma_{\beta_1} \cdots \sigma_j \cdots \sigma_{\beta_q})_{2^n - r}^q\}^0,$$

где $(\sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_j\cdots\sigma_{\alpha_p})_i^p|(\sigma_{\beta_1}\cdots\sigma_j\cdots\sigma_{\beta_q})_i^q$ — i-й разбитый минтерм, состоящий из субминтермов p-класса $(\sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_j\cdots\sigma_{\alpha_p})_i^p$ и q-класса $(\sigma_{\beta_1}\cdots\sigma_j\cdots\sigma_{\beta_q})_i^q$.

Далее над полученными разбитыми минтермами (4) каждой составляющей ТМДФ Y^1 и ТМДФ Y^0 выполняется процедура разделения (оператор $\overset{\sigma_j}{\Rightarrow}$) на 2^c подмножества для масок, имеющих определенные значения общего литерала $l_j \in \{0,1\}$. В случае $c=1$ образуются два подмножества для маски $\{l_{\alpha_1}\cdots 0\cdots l_{\alpha_p} \mid l_{\beta_1}\cdots 0\cdots l_{\beta_q}\}$ (оператор $\overset{0_j}{\Rightarrow}$) и два подмножества для маски $\{l_{\alpha_1}\cdots 1\cdots l_{\alpha_p} | l_{\beta_1}\cdots 1\cdots l_{\beta_q}\}$ (оператор $\overset{1_j}{\Rightarrow}$). Затем над элементами каждого подмножества выполняется операция «объединение справа» (оператор $\overset{|\cup}{\Rightarrow}$) либо «объединение слева» (оператор $\overset{\cup|}{\Rightarrow}$) в зависимости от того, какие переменные функции f согласно задания необходимо связывать для формирования определенного вида декомпозиции, что, в свою очередь, будет определять класс декомпозиционных клонов [16]. Если связываются переменные p-класса, т.е. искомыми являются декомпозиционные клоны p-класса (оператор $\overset{|clo}{\Rightarrow}$), то над элементами каждого подмножества выполняется операция «объединение справа», а если связываются переменные q-класса, т.е. искомыми являются декомпозиционные клоны q-класса (оператор $\overset{clo|}{\Rightarrow}$), то выполняется операция «объединение слева». Затем над полученными множествами выполняется процедура клонирования, в результате которой для масок $\{l_{\alpha_1}\cdots 0\cdots l_{\alpha_p} | l_{\beta_1}\cdots 0\cdots l_{\beta_q}\}$ и $\{l_{\alpha_1}\cdots 1\cdots l_{\alpha_p} | l_{\beta_1}\cdots 1\cdots l_{\beta_q}\}$ образуются так называемые расширенные p-клоны либо расширенные q-клоны, которые затем подвергаются операции объединения. При этом заметим, что вследствие процедур расширения и разделения в сформировавшихся клонах образуются неполные объединения нефиксированных субминтермов, т.е. неполные множества чисел из $\mathbf{E}_2^p$ (если это q-клоны) либо чисел из $\mathbf{E}_2^q$ (если это p-клоны), а множества их фиксированных субминтермов образуют пустые пересечения.

На примере связывания переменных p-класса и, следовательно, формирования p-клонов для $c=1$ получим множества

$$\overset{0}{\Rightarrow}\{l_{\alpha_1}\cdots 0\cdots l_{\alpha_p} | l_{\beta_1}\cdots 0\cdots l_{\beta_q}\} =$$

$$=\begin{cases}\{\ldots\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow}\{\ldots\}^1 \\ \{\ldots\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow}\{\ldots\}^0\end{cases} \overset{|clo}{\Rightarrow}\left\{\left(A\,\middle|\,\begin{matrix}B\\C\end{matrix}\right),\ldots,\left(D\,\middle|\,\begin{matrix}E\\F\end{matrix}\right)\right\}=\{C_1^0,\ \ldots\ C_{k_0}^0\},\tag{5}$$

$$\overset{1}{\Rightarrow}\{l_{\alpha_1}\cdots 1\cdots l_{\alpha_p} | l_{\beta_1}\cdots 1\cdots l_{\beta_q}\} =$$

$$=\begin{cases}\{\ldots\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow}\{\ldots\}^1 \\ \{\ldots\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow}\{\ldots\}^0\end{cases} \overset{|clo}{\Rightarrow}\left\{\left(G\,\middle|\,\begin{matrix}H\\I\end{matrix}\right),\ \ldots,\ \left(K\,\middle|\,\begin{matrix}L\\M\end{matrix}\right)\right\}=\{C_1^1,\ldots,C_{k_1}^1\},\tag{6}$$

где $A,\ldots,D$ и $G,\ldots,K$ — множества фиксированных субминтермов расширенных p-клонов, образующие пустые пересечения $A\cap G=\varnothing$, $A\cap K=\varnothing$, $D\cap G=\varnothing$ и $D\cap K=\varnothing$; $B,C,\ldots,E,F$ и $H,I,\ldots,L,M$ — множества нефиксированных субминтермов расширенных p-клонов, составляющие неполные множества $B \cup C \neq \mathbf{E}_2^q$, $E \cup F \neq \mathbf{E}_2^q$, $H \cup I \neq \mathbf{E}_2^q$, $L \cup M \neq \mathbf{E}_2^q$; $C_1^0, \ldots, C_{k_0}^0$ и $C_1^1, \ldots, C_{k_1}^1$ — условные обозначения клонов, полученных после операции объединения, для соответствующих масок.

Образование упомянутых выше неполных множеств нефиксированных субминтермов в образовавшихся клонах заданной функции f соответствует искусственному расширению булевого пространства за счет искусственного внесения некоторого числа ее значений, которые условно назовем несуществующими и обозначим символом ×. В отличие от несущественных (sic!) значений частичной функции f: $\{0,1\}^n \to \{0,1,\sim\}$, где тильдой (~) обычно обозначают ее несущественные значения, несуществующие значения обладают, как оказалось, более гибкими свойствами для формирования определенного вида неразделительной декомпозиции. Если несущественным значениям частичной функции f в результате принятого доопределения можно приписать только одно значение — либо 0, либо 1, то несуществующим значениям, причем произвольной (полной или частичной) функции f, можно приписать значения 0 и 1 одновременно. Другими словами, заданную функцию f после процедуры расширенного p,q-разбиения можно определить следующим образом: если она полная, то f: $\{0,1\}^n \to \{0,1,\times\}$, а если она частичная, то f: $\{0,1\}^n \to \{0,1,\sim,\times\}$, где символ × обозначает ее несуществующие значения.

Приведенный ниже пример иллюстрирует рассмотренный способ.

Пример 1 [1, с. 339]. Способом расширенного p,q-разбиения найти множества расширенных p-клонов для масок $\{l_1 0 l_4 \,|\, l_2 0\}$ и $\{l_1 1 l_4 \,|\, l_2 1\}$ полной булевой функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданной совершенной ТМФ

$$Y = \begin{cases} \{0000,0010,0100,0111,1011,1110\}^1 \\ \{0001,0011,0101,0110,1000,1001,1010,1100,1101,1111\}^0 \end{cases}.$$

Решение. В результате процедуры p,q-разбиения для заданной маски $\{l_1 l_3 l_4 \,|\, l_2 l_3\}$ получим

$$\{l_1 l_3 l_4 \,|\, l_2 l_3\} = \begin{cases} \{000|00,010|01,000|10,011|11,111|01,110|11\}^1 \\ \{001|00,011|01,001|10,010|11,100|00,101|00, \\ \quad 110|01,100|10,101|10,111|11\}^0 \end{cases} \Rightarrow$$

Над разбитыми минтермами совершенной ТМДФ Y выполним процедуру разделения ($c=1$) для масок $\{l_1 0 l_4 \,|\, l_2 0\}$ и $\{l_1 1 l_4 \,|\, l_2 1\}$, а затем (перейдя для лучшего восприятия к десятичному представлению) — операцию «объединение справа»:

$$\Rightarrow \begin{cases} \overset{+0_3}{\Rightarrow} \{l_1 0 l_4 \,|\, l_2 0\} = \begin{cases} \{000|00,000|10\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{0|(0,2)\}^1 \\ \{001|00,001|10,100|00,101|00,100|10, \\ \quad 101|10\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{1|(0,2),4|(0,2),5|(0,2)\}^0 \end{cases} \overset{|clo}{\Rightarrow} \\ \overset{+1_3}{\Rightarrow} \{l_1 1 l_4 \,|\, l_2 1\} = \begin{cases} \{010|01,011|11,111|01,110|11\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{2|1,3|3,7|1,6|3\}^1 \\ \{011|01,10|11,110|01,111|11\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{3|1,2|3,6|1,7|3\}^0 \end{cases} \overset{|clo}{\Rightarrow} \end{cases}$$

После процедуры клонирования и операции объединения получим искомые множества расширенных p-клонов

$$\begin{cases} \overset{|clo}{\Rightarrow} \left\{ \left(0 \middle| \begin{matrix} 0{,}2 \\ \times \end{matrix}\right), \left(1 \middle| \begin{matrix} \times \\ 0{,}2 \end{matrix}\right), \left(4 \middle| \begin{matrix} \times \\ 0{,}2 \end{matrix}\right), \left(5 \middle| \begin{matrix} \times \\ 0{,}2 \end{matrix}\right) \right\} = \left\{ \left(0 \middle| \begin{matrix} 0{,}2 \\ \times \end{matrix}\right), \left(1{,}4{,}5 \middle| \begin{matrix} \times \\ 0{,}2 \end{matrix}\right) \right\} \\ \overset{|clo}{\Rightarrow} \left\{ \left(2 \middle| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}\right), \left(3 \middle| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\right), \left(6 \middle| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\right), \left(7 \middle| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}\right) \right\} = \left\{ \left(2{,}7 \middle| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}\right), \left(3{,}6 \middle| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\right) \right\} \end{cases},$$

где знак $\times$ символизирует множества несуществующих числовых субминтермов в расширенных p-клонах заданной функции f.

Рассмотрим теперь иной путь получения аналогичного результата.

2.2. Способ сжатого p, q-разбиения. Суть этого способа состоит в том, что над двоичными минтермами совершенной ТМФ

$$Y = \begin{cases} \{(\sigma_1 \cdots \sigma_n)_1, (\sigma_1 \cdots \sigma_n)_2, \ldots, (\sigma_1 \cdots \sigma_n)_r\}^1 \\ \{(\sigma_1 \cdots \sigma_n)_{r+1}, (\sigma_1 \cdots \sigma_n)_{r+2}, \ldots, (\sigma_1 \cdots \sigma_n)_{2^n - r}\}^0 \end{cases}, \quad \sigma_i \in \{0,1\},$$

в случае $c = 1$ сначала выполняется процедура p, q-разбиения для маски литералов $\{l_j \,|\, l_1 \cdots l_{j-1} l_{j+1} \cdots l_n\}$, где $l_j \in \{0,1\}$ — общий для обоих классов литерал маски $\{l_{\alpha_1} \cdots l_j \cdots l_{\alpha_p} \,|\, l_{\beta_1} \cdots l_j \cdots l_{\beta_q}\}$, которая задает искомый вид неразделительной декомпозиции заданной функции f. После операции «объединение справа» (оператор $\overset{|\cup}{\Rightarrow}$) полученные разбитые минтермы составляют совершенную ТМДФ Y (отдельно для Y^1 и Y^0)

$$\overset{P^q}{\Rightarrow} \{l_j \,|\, l_1 \cdots l_{j-1} l_{j+1} \cdots l_n\} =$$

$$= \begin{cases} \{(\sigma_j)_1^1 \,|\, (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_1^{n-1}, (\sigma_j)_2^1 \,| \\ \qquad (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_2^{n-1}, \ldots, (\sigma_j)_r^{n-q} \,|\, (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_r^{n-1}\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \\ \{(\sigma_j)_{r+1}^1 \,|\, (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{r+1}^{n-1}, (\sigma_j)_{r+2}^1 \,| \\ \qquad (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{r+2}^{n-1}, \ldots, (\sigma_j)_{2^n - r}^1 \,|\, (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{2^n - r}^{n-1}\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{0 \,|\, Y_{-0_j}^1, 1 \,|\, Y_{-1_j}^1\}^1 \\ \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{0 \,|\, Y_{-0_j}^0, 1 \,|\, Y_{-1_j}^0\}^0 \end{cases}. \tag{7}$$

Здесь множество $Y_{-0_j}^1 = \{(\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{\alpha_1}^{n-1}, (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{\alpha_2}^{n-1}, \ldots$ $\ldots, (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{\alpha_{r'}}^{n-1}\}^1$ и множество $Y_{-1_j}^1 = \{(\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{\beta_1}^{n-1}, (\sigma_1 \cdots$ $\cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{\beta_2}^{n-1}, \ldots, (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{\beta_{r''}}^{n-1}\}^1$, $r' + r'' = r$, представляют совершенные ТМФ подфункции $f_{\bar{x}_j} = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ и подфункции $f_{x_j} = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, , \ldots, x_n)$ соответственно, получаемые в результате разложения Шеннона заданной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по некоторой переменной x_j, т.е. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x}_i f_{\bar{x}_i} \vee x_i f_{x_i}$, а множества $Y_{-0_j}^0 = \{(\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{\alpha_1}^{n-1},$ $(\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{\alpha_2}^{n-1}, \ldots, (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{\alpha_{r'''}}^{n-1}\}^0$ и $Y_{-1_j}^0 = \{(\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots$ $\cdots \sigma_n)_{\beta_1}^{n-1}, (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{\beta_2}^{n-1}, \ldots, (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n)_{\beta_{r''''}}^{n-1}\}^0$, $r''' + r'''' = 2^n - r$, есть совершенные ТМФ инверсий этих же подфункций, т.е. $\overline{f}_{\bar{x}_j} = \overline{f}(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)$ и $\overline{f}_{x_j} = \overline{f}(x_1,\ldots,x_{j-1},1,x_{j+1},\ldots,x_n)$ соответственно.

Над элементами совершенных ТМФ подфункций (7) $Y_{-0_j} = \begin{cases} Y^1_{-0_j} \\ Y^0_{-0_j} \end{cases}$ и $Y_{-1_j} = \begin{cases} Y^1_{-1_j} \\ Y^0_{-1_j} \end{cases}$ выполняется процедура сжатого p,q-разбиения для маски $\{l_{\alpha_1}\cdots l_{j-1}l_{j+1}\cdots l_{\alpha_p} \,|\, l_{\beta_1}\cdots l_{j-1}l_{j+1}\cdots l_{\beta_q}\}$, в которой отсутствует общий литерал l_j. После этого, как и в п. 2.1, выполняются процедура клонирования и операция объединения. Таким образом, из совершенных ТМФ подфункций Y_{-0_j} и Y_{-1_j} (см. (7)) сформируются множества так называемых в данном случае сжатых p-клонов, в которых отсутствует значение общей переменной $x_j \in \{0,1\}$:

$$Y_{-0_j} = \begin{cases} \{(\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_n)_1,\ldots,(\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_n)_{r'}\}^1 \\ \{(\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_n)_1,\ldots,(\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_n)_{r'''}\}^0 \end{cases} \overset{P^q}{\Rightarrow}$$

$$\overset{P^q}{\Rightarrow} \{l_{\alpha_1}\cdots l_{j-1}l_{j+1}\cdots l_{\alpha_p} \,|\, l_{\beta_1}\cdots l_{j-1}l_{j+1}\cdots l_{\beta_q}\} = \tag{8}$$

$$= \begin{cases} \{\ldots\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{\ldots\}^1 \\ \{\ldots\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{\ldots\}^0 \end{cases} \overset{|clo}{\Rightarrow} \left\{\left(A' \left| \begin{matrix} B' \\ C' \end{matrix}\right.\right), \ldots, \left(D' \left| \begin{matrix} E' \\ F' \end{matrix}\right.\right)\right\} = \{C'^{\,0}_1,\ldots,C'^{\,0}_{k'_0}\},$$

$$Y_{-1_j} = \begin{cases} \{(\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_n)_1,\ldots,(\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_n)_{r''}\}^1 \\ \{(\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_n)_1,\ldots,(\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_n)_{r''''}\}^0 \end{cases} \overset{P^q}{\Rightarrow}$$

$$\overset{P^q}{\Rightarrow} \{l_{\alpha_1}\cdots l_{j-1}l_{j+1}\cdots l_{\alpha_p} \,|\, l_{\beta_1}\cdots l_{j-1}l_{j+1}\cdots l_{\beta_q}\} = \tag{9}$$

$$= \begin{cases} \{\ldots\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{\ldots\}^1 \\ \{\ldots\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{\ldots\}^0 \end{cases} \overset{|clo}{\Rightarrow} \left\{\left(G' \left| \begin{matrix} H' \\ I' \end{matrix}\right.\right), \ldots, \left(K' \left| \begin{matrix} L' \\ M' \end{matrix}\right.\right)\right\} = \{C'^{\,1}_1,\ldots,C'^{\,1}_{k'_1}\}.$$

Здесь $A', B', C', \ldots, M'$ — множества субминтермов сжатых p-клонов; $C'^{\,0}_1,\ldots,C'^{\,0}_{k'_0}$ и $C'^{\,1}_1,\ldots,C'^{\,1}_{k'_1}$ — условные обозначения сформированных после объединения полученных клонов соответствующих подфункций заданной функции f.

Над сжатыми p-клонами подфункций (8) и (9) применяется процедура расширения (оператор $\overset{+\sigma_j}{\Rightarrow}$), вносящая в оба класса разбиения одинаковые значения общей переменной $x_j = \{0,1\}$ согласно заданной маске $\{l_{\alpha_1}\cdots l_j\cdots l_{\alpha_p} \,|\, l_{\beta_1}\cdots l_j\cdots l_{\beta_q}\}$. Причем к множеству (8) $\{C'^{\,0}_1,\ldots,C'^{\,0}_{k'_0}\}$ применяется оператор $\overset{+0_j}{\Rightarrow}$, формирующий расширенные p-клоны по маске $\{l_{\alpha_1}\cdots 0\cdots l_{\alpha_p} \,|\, l_{\beta_1}\cdots 0\cdots l_{\beta_q}\}$ (оператор $\overset{+0_j}{\Rightarrow}$), а к множеству (9) $\{C'^{\,1}_1,\ldots,C'^{\,1}_{k'_1}\}$ — оператор $\overset{+1_j}{\Rightarrow}$, формирующий расширенные p-клоны по маске $\{l_{\alpha_1}\cdots 1\cdots l_{\alpha_p}\,|\,l_{\beta_1}\cdots 1\cdots l_{\beta_q}\}$, а именно

$$\{C'^{\,0}_1,\ldots,C'^{\,0}_{k'_0}\}\overset{+0_j}{\Rightarrow}\{C^0_1,\ldots,C^0_{k_0}\},\tag{10}$$

$$\{C'^{\,1}_1,\ldots,C'^{\,1}_{k'_1}\}\overset{+1_j}{\Rightarrow}\{C^1_1,\ldots,C^1_{k_1}\},\tag{11}$$

где $C^0_1,\ldots,C^0_{k_0}$ и $C^1_1,\ldots,C^1_{k_1}$ — расширенные клоны соответствующих подфункций, являющиеся теми же структурированными образованиями, полученными в (5) и (6) соответственно.

Рассмотренное выше проиллюстрируем на примере.

Пример 2. Способом сжатого p,q-разбиения найти множества расширенных p-клонов для масок $\{l_1 0 l_4\,|\,l_2 0\}$ и $\{l_1 1 l_4\,|\,l_2 1\}$ функции f из примера 1.

Решение. Из совершенной ТМФ Y заданной функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ сначала найдем совершенные ТМФ ее подфункций Y_{-0_3} и Y_{-1_3}, а затем выполним процедуру сжатого p,q-разбиения:

$$Y=\begin{cases}\{0000,0010,0100,0111,1011,1110\}^1\\ \{0001,0011,0101,0110,1000,1001,1010,1100,1101,1111\}^0\end{cases}\overset{P^q}{\Rightarrow}$$

$$\overset{P^q}{\Rightarrow}\{l_3\,|\,l_1 l_2 l_4\}=\begin{cases}\{0|000,1|000,0|010,1|011,1|101,1|110\}^1\\ \{0|001,1|001,0|011,1|010,0|100,0|101,1|100,0|110,0|111,1|111\}^0\end{cases};$$

$$Y_{-0_3}=\begin{cases}\{000,010\}^1\\ \{001,011,100,101,110,111\}^0\end{cases}\overset{P^q}{\Rightarrow}\{l_1 l_4\,|\,l_2\}=\begin{cases}\{00|0,00|1\}^1\\ \{01|0,01|1,10|0,11|0,10|1,11|1\}^0\end{cases};$$

$$Y_{-1_3}=\begin{cases}\{000,011,101,110\}^1\\ \{001,010,100,111\}^0\end{cases}\overset{P^q}{\Rightarrow}\{l_1 l_4\,|\,l_2\}=\begin{cases}\{00|0,01|1,11|0,10|1\}^1\\ \{01|0,00|1,10|0,11|1\}^0\end{cases}.$$

Над полученными ТМДФ Y_{-0_3} и Y_{-1_3} выполним процедуру клонирования, операцию объединения образовавшихся сжатых клонов, а затем процедуры их расширения $\overset{+0_3}{\Rightarrow}$ для Y_{-0_3} и $\overset{+1_3}{\Rightarrow}$ для Y_{-1_3}:

$$\overset{|clo}{\Rightarrow}\{\left(00\left|\begin{matrix}0,1\\ \varnothing\end{matrix}\right.\right),\left(01\left|\begin{matrix}\varnothing\\ 0,1\end{matrix}\right.\right),\left(10\left|\begin{matrix}\varnothing\\ 0,1\end{matrix}\right.\right),\left(11\left|\begin{matrix}\varnothing\\ 0,1\end{matrix}\right.\right)\}=\{\left(00\left|\begin{matrix}0,1\\ \varnothing\end{matrix}\right.\right),\left(01,10,11\left|\begin{matrix}\varnothing\\ 0,1\end{matrix}\right.\right)\}\overset{+0_3}{\Rightarrow}$$

$$\overset{+0_3}{\Rightarrow}\{l_1 0 l_4\,|\,l_2 0\}=\{\left(000\left|\begin{matrix}00,10\\ \times\end{matrix}\right.\right),\left(001,100,101\left|\begin{matrix}\times\\ 00,10\end{matrix}\right.\right)\};$$

$$\overset{|clo}{\Rightarrow}\{\left(00\left|\begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\right.\right),\left(01\left|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right.\right),\left(10\left|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right.\right),\left(11\left|\begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\right.\right)\}=\{\left(00,11\left|\begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\right.\right),\left(01,10\left|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right.\right)\}\overset{+1_3}{\Rightarrow}$$

$$\overset{+1_3}{\Rightarrow}\{l_1 1 l_4\,|\,l_2 1\}=\{\left(010,111\left|\begin{matrix}01\\ 11\end{matrix}\right.\right),\left(011,110\left|\begin{matrix}11\\ 01\end{matrix}\right.\right)\}.$$

В результате получаем те же множества p-клонов, как и при использовании способа расширенного p,q-разбиения (см. п. 2.1)

$$\begin{cases}\{\left(0\left|\begin{matrix}0,2\\ \times\end{matrix}\right.\right),\left(1,4,5\left|\begin{matrix}\times\\ 0,2\end{matrix}\right.\right)\}\\ \{\left(2,7\left|\begin{matrix}1\\ 3\end{matrix}\right.\right),\left(3,6\left|\begin{matrix}3\\ 1\end{matrix}\right.\right)\}\end{cases}.$$

Вид неразделительной декомпозиции, как и число возможных ее решений, определяется (как при разделительной декомпозиции) на основании так называемых расширенных максимальных клонов заданной функции f. Последние образуются из расширенных клонов путем поэлементной выборки по одному разному элементу из каждого их множества, а затем в образовавшемся множестве каждой выборки окончательно формируются операцией объединения в множество расширенных максимальных клонов заданной функции f. Число возможных поэлементных выборок (а значит, и число образовавшихся множеств) определяется комбинаторно, с одной стороны, максимальным числом множеств расширенных клонов, которое зависит от c и равно 2^c, а с другой — мощностью k_i каждого такого множества. Таким образом, после каждого полного прослеживания по всем разным элементам множеств расширенных клонов и последующего их объединения сформируется одно множество расширенных максимальных клонов, представляющее одно из решений, а после исчерпания всех возможных способов выборки — полное множество возможных решений неразделительной декомпозиции заданной функции f. При этом заметим, что чем больше значения c и k_i, тем больше число выборок, а следовательно больше возможных решений декомпозиции.

Для рассмотренного выше примера, иллюстрирующего случай $c=1$, вследствие полных попарных выборок расширенных клонов из двух множеств (5) и (6) либо (10) и (11) после операции объединения образуются два искомых множества расширенных максимальных клонов:

$$\begin{cases} \{C_1^0,\ldots,C_{k_0}^0\} \\ \{C_1^1,\ldots,C_{k_1}^1\} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{\{C_1^0,C_1^1\},\ldots,\{C_{k_0}^0,C_{k_1}^1\}\} = \{\{C_1^0 \cup C_1^1\},\ldots,\{C_{k_0}^0 \cup C_{k_1}^1\}\} = \{C_{11}^{01},\ldots,C_{k_0k_1}^{01}\} \\ \{\{C_1^0,C_{k_1}^1\},\ldots,\{C_{k_0}^0,C_1^1\}\} = \{\{C_1^0 \cup C_{k_1}^1\},\ldots,\{C_{k_0}^0 \cup C_1^1\}\} = \{C_{1k_1}^{01},\ldots,C_{k_01}^{01}\} \end{cases}, \tag{12}$$

где $C_{11}^{01},\ldots,C_{k_0k_1}^{01}$ и $C_{1k_1}^{01},\ldots,C_{k_01}^{01}$ — условные обозначения расширенных максимальных клонов соответствующих решений неразделительной декомпозиции функции f для случая $c=1$. Нетрудно убедиться, что при $k_0=k_1=2$ из двух возможных выборок по два клона образуется всего два множества расширенных максимальных клонов заданной функции f.

Для рассмотренной выше функции (см. примеры 1 и 2) вследствие взаимно попарных выборок и объединения расширенных клонов $\{C_1^0 \cup C_1^1, C_2^0 \cup C_2^1\}$ и $\{C_1^0 \cup C_2^1, C_2^0 \cup C_1^1\}$ получим два множества расширенных максимальных клонов $\{C_{11}^{01},C_{22}^{01}\}$ и $\{C_{12}^{01},C_{21}^{01}\}$, определяющих решения неразделительной декомпозиции этой функции:

$$1.\ \left\{\left(0\left|\begin{matrix}0,2\\ \times\end{matrix}\right.\right)\cup\left(2,7\left|\begin{matrix}1\\ 3\end{matrix}\right.\right),\left(1,4,5\left|\begin{matrix}\times\\ 0,2\end{matrix}\right.\right)\cup\left(3,6\left|\begin{matrix}3\\ 1\end{matrix}\right.\right)\right\}=\left\{\left(0,2,7\left|\begin{matrix}0,1,2\\ 3\end{matrix}\right.\right),\left(1,3,4,5,6\left|\begin{matrix}3\\ 0,1,2\end{matrix}\right.\right)\right\};$$

$$2.\ \left\{\left(0\left|\begin{matrix}0,2\\ \times\end{matrix}\right.\right)\cup\left(3,6\left|\begin{matrix}3\\ 1\end{matrix}\right.\right),\left(1,4,5\left|\begin{matrix}\times\\ 0,2\end{matrix}\right.\right)\cup\left(2,7\left|\begin{matrix}1\\ 3\end{matrix}\right.\right)\right\}=\left\{\left(0,3,6\left|\begin{matrix}0,2,3\\ 1\end{matrix}\right.\right),\left(1,2,4,5,7\left|\begin{matrix}1\\ 0,2,3\end{matrix}\right.\right)\right\}.$$

Рис. 3 иллюстрирует описанный выше способ расширенного p,q-разбиения на декомпозиционных картах [16], где символ $\Rightarrow$ указывает на переход к следующему этапу преобразования. В частности, на рис. 3, *а* показаны карты для масок $\{l_1 0 l_4 \mid l_2 0\}$ и $\{l_1 1 l_4 \mid l_2 1\}$, иллюстрирующие процедуру разделения; упрощенные карты относительно рис. 3, *а* получены вследствие операции объединения (рис. 3, *б*). Карта для заданной маски $\{l_1 l_3 l_4 \mid l_2 l_3\}$, образованная из карт на рис. 3, *б*, иллюстрирует процедуру клонирования, где каждая строка этой карты отображает один из расширенных клонов C_1^0, C_2^0, C_1^1, C_2^1, т.е. подфункции (рис. 3, *в*). Карты, полученные из рис. 3, *в* вследствие объединений $\{C_1^0 \cup C_1^1, C_2^0 \cup C_2^1\}$ и $\{C_1^0 \cup C_2^1, C_2^0 \cup C_1^1\}$, даны на рис. 3, *г*. Карты, отображающие расширенные максимальные клоны $\{C_{11}^{01}, C_{22}^{01}\}$ и $\{C_{12}^{01}, C_{21}^{01}\}$ и представляющие решения неразделительной декомпозиции, показаны на рис. 4, *д*. Заштрихованные участки карт визуализируют значимые элементы карт рис. 3, *б* в результате выполнения процедуры (12).

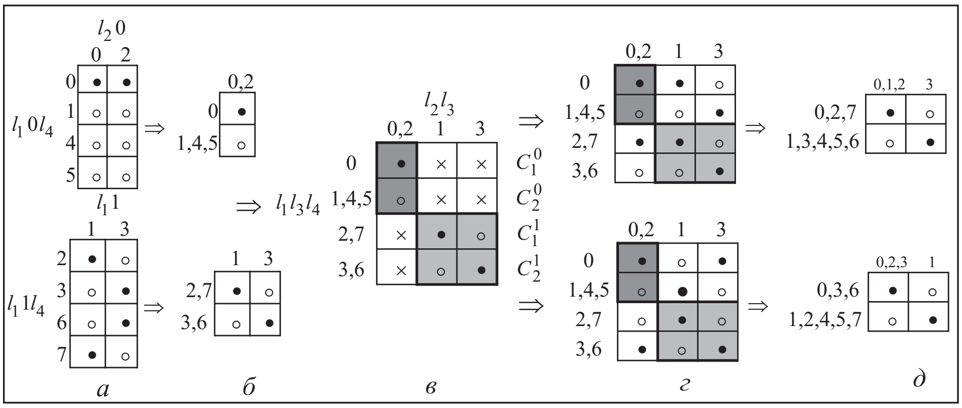

Рис. 3

На основании вышеизложенного сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$, заданная совершенной ТМФ $Y = \begin{cases} Y^1 \\ Y^0 \end{cases}$, допускает простую неразделительную декомпозицию одного из видов (1), (2) и (3) для $Z = \{x_j\}$ тогда и только тогда, когда хотя бы для одной маски p, q-разбиения $\{l_{\alpha_1} \cdots l_{j-1} l_{j+1} \cdots l_{\alpha_p} | l_{\beta_1} \cdots l_{j-1} l_{j+1} \cdots l_{\beta_q}\}$ в результате процедуры клонирования ее подфункций относительно $x_j = \{0, 1\}$, представленных совершенными ТМФ Y_{-0_j} и Y_{-1_j}, можно получить не более двух максимальных клонов этих подфункций.

Доказательство теоремы очевидно, исходя из определения понятия максимального клона и теоремы о существовании простой разделительной декомпозиции по методу q-разбиения, что можно проиллюстрировать на декомпозиционных картах [16], а также на основании теоретико-множественной интерпретации разложения Шеннона относительно одной (в данном случае $x_j = \{0, 1\}$) переменной произвольной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$. Кроме того, в работах по функциональной декомпозиции, основанных на разложении Шеннона [5, 6], приведены аналитические доказательства теорем, утверждающих, что если подфункциям функции f присуща простая разделительная декомпозиция, то эта функция будет иметь также и простую неразделительную декомпозицию соответствующего вида.

В качестве подтверждения вышеизложенного рассмотрим следующий пример.

Пример 3 [6]. Описанными выше способами p, q-разбиения найти для аналитически заданной функции $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$ двухблочную неразделительную декомпозицию вида $\varphi(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_3))$ (см. рис. 2, *а*).

Решение. Следует заметить, что независимо от выбранной пары переменных для реализации без декомпозиции заданной функции f требуется пять логических (двухвходовых) элементов, а при неразделительной декомпозиции — всего три, что соответствует равенству

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2)(\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3) = \varphi_1 \varphi_2,$$

где $\varphi_1(x_1,x_2)=\bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_1x_2=x_1\sim x_2$ и $\varphi_2(x_1,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_3\vee x_1x_3=x_1\sim x_3$ — связывающие функции, а $\varphi=\varphi_1\varphi_2$ — остаточная функция.

Представив заданную функцию f совершенной ТМФ $Y=\begin{cases}\{000,111\}^1\\ \{001,010,011,100,101,110\}^0\end{cases}$, для маски $\{l_1l_2\,|\,l_1l_3\}$ имеем:

— по способу расширенного p,q-разбиения

$$\overset{P^q}{\Rightarrow}\{l_1l_2\,|\,l_1l_3\}=\begin{cases}\{00\,|\,00,\,11\,|\,11\}^1\\ \{00\,|\,01,\,01\,|\,00,\,01\,|\,01,\,10\,|\,10,\,10\,|\,11,\,11\,|\,10\}^0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overset{0_3}{\Rightarrow}\{0l_2\,|\,0l_3\}=\begin{cases}\{00\,|\,00\}^1\\ \{00\,|\,01,\,01\,|\,00,\,01\,|\,01\}^0\end{cases}\overset{|clo}{\Rightarrow}\left\{\left(00\,\middle|\,\begin{matrix}00\\01\end{matrix}\right),\left(01\,\middle|\,\begin{matrix}\times\\00,01\end{matrix}\right)\right\}=\{C_1^0,C_2^0\}\\ \overset{1_3}{\Rightarrow}\{1l_2\,|\,1l_3\}=\begin{cases}\{11\,|\,11\}^1\\ \{10\,|\,10,\,10\,|\,11,\,11\,|\,10\}^0\end{cases}\overset{|clo}{\Rightarrow}\left\{\left(10\,\middle|\,\begin{matrix}\times\\10,11\end{matrix}\right),\left(11\,\middle|\,\begin{matrix}11\\10\end{matrix}\right)\right\}=\{C_1^1,C_2^1\}\end{cases};$$

— по способу сжатого p,q-разбиения

$$Y\overset{P^q}{\Rightarrow}\{l_1\,|\,l_2l_3\}=\begin{cases}\{0\,|\,00,\,1\,|\,11\}^1\\ \{0\,|\,01,\,0\,|\,10,\,0\,|\,11,\,1\,|\,00,\,1\,|\,01,\,1\,|\,10\}^0\end{cases};$$

$$Y_{-0_1}=\begin{cases}\{00\}^1\\ \{01,\,10,\,11\}^0\end{cases}\overset{P^q}{\Rightarrow}\{l_2\,|\,l_3\}=\begin{cases}\{0\,|\,0\}^1\\ \{0\,|\,1,\,1\,|\,0,\,1\,|\,1\}^0\end{cases}\overset{|clo}{\Rightarrow}$$

$$\overset{|clo}{\Rightarrow}\left\{\left(0\,\middle|\,\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right),\left(1\,\middle|\,\begin{matrix}\varnothing\\0,1\end{matrix}\right)\right\}\overset{+0_1}{\Rightarrow}\left\{\left(00\,\middle|\,\begin{matrix}00\\01\end{matrix}\right),\left(01\,\middle|\,\begin{matrix}\times\\00,01\end{matrix}\right)\right\}=\{C_1^0,C_2^0\};$$

$$Y_{-1_1}=\begin{cases}\{11\}^1\\ \{00,\,01,\,10\}^0\end{cases}\overset{P^q}{\Rightarrow}\{l_2\,|\,l_3\}=\begin{cases}\{1\,|\,1\}^1\\ \{0\,|\,0,\,0\,|\,1,\,1\,|\,0\}^0\end{cases}\overset{|clo}{\Rightarrow}$$

$$\overset{|clo}{\Rightarrow}\left\{\left(0\,\middle|\,\begin{matrix}\varnothing\\0,1\end{matrix}\right),\left(1\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right)\right\}\overset{+1_1}{\Rightarrow}\left\{\left(10\,\middle|\,\begin{matrix}\times\\10,11\end{matrix}\right),\left(11\,\middle|\,\begin{matrix}11\\10\end{matrix}\right)\right\}=\{C_1^1,C_2^1\}.$$

На основании максимальных клонов подфункций C_1^0,C_2^0 и C_1^1,C_2^2 определим искомые множества расширенных максимальных клонов заданной функции f. Используя для этой цели операцию объединения (12) $\{C_1^0\cup C_1^1,C_2^0\cup C_2^1\}$ и $\{C_1^0\cup C_2^1,C_2^0\cup C_1^1\}$, получаем следующие решения:

$$1.\ \left\{\left(00,10\,\middle|\,\begin{matrix}00\\01,10,11\end{matrix}\right),\left(01,11\,\middle|\,\begin{matrix}11\\00,01,10\end{matrix}\right)\right\}.\qquad 2.\ \left\{\left(00,11\,\middle|\,\begin{matrix}00,11\\01,10\end{matrix}\right),\left(01,10\,\middle|\,\begin{matrix}\varnothing\\00,01,10,11\end{matrix}\right)\right\}.$$

Для определения связывающих $\varphi_1(x_1,x_2)$, $\varphi_2(x_1,x_3)$ и остаточной $\varphi(\varphi_1,\varphi_2)$ функций необходимо (как и при разделительной декомпозиции) выполнить процедуры кодирования и конкатенирования. При этом заметим, что искомая двухблочная декомпозиция вида $\varphi(\varphi_1(x_1,x_2),\varphi_2(x_1,x_3))$ получена только для второго решения, поскольку в нефиксированном q-классе расширенных максимальных клонов можно выделить не более двух множеств субминтермов: {00,11} и {01,10}, что позволяет кодировать их значениями из множества {0,1} в отличие от первого решения, где таких множеств три: {00}, {11} и {01,10}. Таким образом, применив к множествам субминтермов обоих классов упомянутых клонов разные варианты кодирований второго решения, получим четыре возможных решения двухблочной неразделительной декомпозиции вида $\varphi(\varphi_1(x_1,x_2),\varphi_2(x_1,x_3))$ (см. рис. 2, *в*):

$$1.\ \left\{\left(\varphi_1^0 \left| \begin{matrix}\varphi_2^0\\ \varphi_2^1\end{matrix}\right.\right),\left(\varphi_1^1 \left| \begin{matrix}\varnothing\\ \varphi_2^0,\varphi_2^1\end{matrix}\right.\right)\right\}=\left\{\left(0\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.\right),\left(1\left|\begin{matrix}\varnothing\\ \mathbf{E}_2^1\end{matrix}\right.\right)\right\},\quad \varphi_1^1=\{01{,}10\}^1,\quad \varphi_2^1=\{01{,}10\}^1,$$

$\varphi^1=\{00\}^1$;

$$2.\ \left\{\left(\varphi_1^0 \left| \begin{matrix}\varphi_2^1\\ \varphi_2^0\end{matrix}\right.\right),\left(\varphi_1^1 \left| \begin{matrix}\varnothing\\ \varphi_2^0,\varphi_2^1\end{matrix}\right.\right)\right\}=\left\{\left(0\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.\right),\left(1\left|\begin{matrix}\varnothing\\ \mathbf{E}_2^1\end{matrix}\right.\right)\right\},\quad \varphi_1^1=\{01{,}10\}^1,\quad \varphi_2^1=\{00{,}11\}^1,$$

$\varphi^1=\{01\}^1$;

$$3.\ \left\{\left(\varphi_1^1 \left| \begin{matrix}\varphi_2^0\\ \varphi_2^1\end{matrix}\right.\right),\left(\varphi_1^0 \left| \begin{matrix}\varnothing\\ \varphi_2^0,\varphi_2^1\end{matrix}\right.\right)\right\}=\left\{\left(1\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.\right),\left(0\left|\begin{matrix}\varnothing\\ \mathbf{E}_2^1\end{matrix}\right.\right)\right\},\quad \varphi_1^1=\{00{,}11\}^1,\quad \varphi_2^1=\{01{,}10\}^1,$$

$\varphi^1=\{10\}^1$;

$$4.\ \left\{\left(\varphi_1^1 \left| \begin{matrix}\varphi_2^1\\ \varphi_2^0\end{matrix}\right.\right),\left(\varphi_1^0 \left| \begin{matrix}\varnothing\\ \varphi_2^0,\varphi_2^1\end{matrix}\right.\right)\right\}=\left\{\left(1\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.\right),\left(0\left|\begin{matrix}\varnothing\\ \mathbf{E}_2^1\end{matrix}\right.\right)\right\},\quad \varphi_1^1=\{00{,}11\}^1,\quad \varphi_2^1=\{00{,}11\}^1,$$

$\varphi^1=\{11\}^1$.

3. ПРОСТАЯ НЕРАЗДЕЛИТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ

Исходя их введенных понятий и терминов, сформулируем теорему о существовании простой неразделительной декомпозиции булевой функции f от n переменных методом p,q-разбиения.

Теорема 2. Булева функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, заданная (совершенной) ТМФ $Y=\begin{cases}Y^1\\ Y^0\end{cases}$, допускает простую неразделительную декомпозицию тогда и только тогда, когда хотя бы для одной маски p,q-разбиения литералов, имеющей в обоих классах общие элементы, что составляют множество $Z=\{x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_c}\}$, $c\in\{1,2,\ldots,n-2\}$, можно в результате процедуры клонирования получить не более двух расширенных максимальных клонов, причем:

1) если клоны p-класса, то имеем одноблочную неразделительную декомпозицию вида $\varphi(\varphi_1(X^p),X^q)$;

2) если клоны q-класса, то имеем одноблочную неразделительную декомпозицию вида $\varphi(X^p,\ \varphi_2(X^q))$;

3) если клоны p- и q-классов, то имеем двухблочную неразделительную декомпозицию вида $\varphi(\varphi_1(X^p),\varphi_2(X^q))$.

Доказательство теоремы 2 (по аналогии с теоремой о существовании разделительной декомпозиции [16]) непосредственно вытекает из соответствия между упрощенной декомпозиционной картой, образованной процедурой p,q-разбиения для маски литералов, имеющей в обоих классах некоторое количество общих элементов, и расширенными максимальными клонами функции f.

Теорему 2 можно использовать, продолжая решение примера 1.

Поскольку для каждого решения получено по два расширенных максимальных клона (т.е. мощность их множеств $k=2$), то фиксированные множества этих клонов можно кодировать значениями 0 и 1. Это позволяет образовать связывающую функцию $\varphi_1(x_1,x_3,x_4)$, а после кодирования субминтермов нефиксированных множеств и процедуры конкатенации — остаточную функцию $\varphi(\varphi_1,x_2,x_3)$:

$$1.\ \ \left\{\left(0,2,7\left|\begin{matrix}0,1,2\\3\end{matrix}\right.\right),\left(1,3,4,5,6\left|\begin{matrix}3\\0,1,2\end{matrix}\right.\right)\right\}\overset{cod}{\Rightarrow}\begin{cases}1.1.\ \left\{\left(\varphi_1^0\left|\begin{matrix}0,1,2\\3\end{matrix}\right.\right),\left(\varphi_1^1\left|\begin{matrix}3\\0,1,2\end{matrix}\right.\right)\right\}=\\ \quad=\left\{\left(0\left|\begin{matrix}00,01,10\\11\end{matrix}\right.\right),\left(1\left|\begin{matrix}11\\00,01,10\end{matrix}\right.\right)\right\}\overset{con}{\Rightarrow}\{0,1,2,7\}^1\\ 1.2.\ \left\{\left(\varphi_1^1\left|\begin{matrix}0,1,2\\3\end{matrix}\right.\right),\left(\varphi_1^0\left|\begin{matrix}3\\0,1,2\end{matrix}\right.\right)\right\}=\\ \quad=\left\{\left(1\left|\begin{matrix}00,01,10\\11\end{matrix}\right.\right),\left(0\left|\begin{matrix}11\\00,01,10\end{matrix}\right.\right)\right\}\overset{con}{\Rightarrow}\{3,4,5,6\}^1\end{cases};$$

$$2.\ \ \left\{\left(0,3,6\left|\begin{matrix}0,2,3\\1\end{matrix}\right.\right),\left(1,2,4,5,7\left|\begin{matrix}1\\0,2,3\end{matrix}\right.\right)\right\}\overset{cod}{\Rightarrow}\begin{cases}2.1.\ \left\{\left(\varphi_1^0\left|\begin{matrix}0,2,3\\1\end{matrix}\right.\right),\left(\varphi_1^1\left|\begin{matrix}1\\0,2,3\end{matrix}\right.\right)\right\}=\\ \quad=\left\{\left(0\left|\begin{matrix}00,10,11\\01\end{matrix}\right.\right),\left(1\left|\begin{matrix}01\\00,10,11\end{matrix}\right.\right)\right\}\overset{con}{\Rightarrow}\{0,2,3,5\}^1\\ 2.2.\ \left\{\left(\varphi_1^1\left|\begin{matrix}0,2,3\\1\end{matrix}\right.\right),\left(\varphi_1^0\left|\begin{matrix}1\\0,2,3\end{matrix}\right.\right)\right\}=\\ \quad=\left\{\left(1\left|\begin{matrix}00,10,11\\01\end{matrix}\right.\right),\left(0\left|\begin{matrix}01\\00,10,11\end{matrix}\right.\right)\right\}\overset{con}{\Rightarrow}\{1,4,6,7\}^1\end{cases}.$$

Отсюда получим совершенные ТМФ связывающей $\varphi_1(x_1,x_3,x_4)$ и остаточной $\varphi(\varphi_1,x_2,x_3)$ функций для всех возможных решений декомпозиции:

1.1. $\varphi_1^1=\{1,3,4,5,6\}^1$, $\varphi^1=\{0,1,2,7\}^1$; 1.2. $\varphi_1^1=\{0,2,7\}^1$, $\varphi^1=\{3,4,5,6\}^1$;

2.1. $\varphi_1^1=\{1,2,4,5,7\}^1$, $\varphi^1=\{0,2,3,5\}^1$; 2.2. $\varphi_1^1=\{0,3,6\}^1$, $\varphi^1=\{1,4,6,7\}^1$.

Таким образом, заданная функция f на основании теоремы 2 имеет для маски $\{l_1l_3l_4\,|\,l_2l_3\}$ простую одноблочную неразделительную декомпозицию (рис. 4) вида (1)

$$\varphi(\varphi_1(X^p),X^q)=\varphi(\varphi_1(x_1,x_3,x_4),x_2,x_3).$$

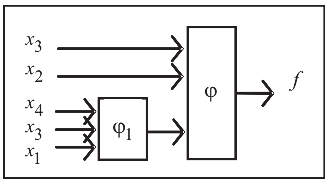

Рис. 4

На основании теоремы 2 можно также утверждать, что рассматриваемая функция допускает и двухблочную неразделительную декомпозицию[2] вида (3) $\varphi(\varphi_1(X^p),\varphi_2(X^q))$, поскольку ее расширенные максимальные клоны оказались комплементарными [16], т.е. их нефиксированные множества субминтермов, как и в примере 3, можно кодировать значениями из $\{0,1\}$. В частности, упомянутую декомпозицию можно получить путем p,q-разбиения минтермов ТМФ φ^1 остаточной функции $\varphi(\varphi_1,x_2,x_3)$ для маски $\{l_{\varphi_1}|l_2l_3\}$. Выбрав для этого, например, решение 1.2, найдем максимальные клоны q-класса этой функции и выполним соответствующие процедуры

$$\varphi^1=\{011,100,101,110\}^1\overset{P^q}{\Rightarrow}\{l_{\varphi_1}|l_2l_3\}=\{0|11,1|00,1|01,1|10\}^1\overset{|clo}{\Rightarrow}\left\{\left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\left|\,3\right.\right),\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\left|\,0,1,2\right.\right)\right\}\overset{cod}{\Rightarrow}$$

$$\overset{cod}{\Rightarrow}\begin{cases}1.2.1.\ \left\{\left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\left|\,\varphi_2^0\right.\right),\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\left|\,\varphi_2^1\right.\right)\right\}=\left\{\left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\left|\,0\right.\right),\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\left|\,1\right.\right)\right\}\overset{con}{\Rightarrow}\{00,11\}^1\\ 1.2.2.\ \left\{\left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\left|\,\varphi_2^1\right.\right),\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\left|\,\varphi_2^0\right.\right)\right\}=\left\{\left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\left|\,1\right.\right),\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\left|\,0\right.\right)\right\}\overset{con}{\Rightarrow}\{01,10\}^1\end{cases}.$$

---

[2] В [1, с.133] этого не замечено.

Совершенные ТМФ связывающей $\varphi_2(x_2, x_3)$ и остаточной $\varphi(\varphi_1, \varphi_2)$ функций для обоих решений декомпозиции имеют следующий вид:

1.2.1. $\varphi_2^1 = \{0,1,2\}^1$, $\varphi^1 = \{0,3\}^1$; 1.2.2. $\varphi_2^1 = \{3\}^1$, $\varphi^1 = \{1,2\}^1$.

Следовательно, для заданной маски $\{l_1 l_3 l_4 \,|\, l_2 l_3\}$ данная функция f имеет также и двухблочную неразделительную декомпозицию вида (3) (рис. 5)

$$\varphi(\varphi_1(X^p), \varphi_2(X^q)) = \varphi(\varphi_1(x_1, x_3, x_4), \varphi_2(x_2, x_3)).$$

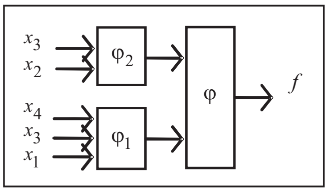

Рис. 5

Аналогичным образом метод p, q-разбиения применим и для получения неразделительной декомпозиции частичной функции $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1,\sim\}$. Отметим, что в отличие от полной функции в результате операции объединения расширенных клонов могут образоваться пересекающиеся клоны, которые по определению [16] не являются максимальными клонами функции f. Поэтому чтобы получить расширенные максимальные клоны частичной функции f, необходимо дополнительно выполнить процедуру ортогонализации пересекающихся расширенных клонов [16, 20].

Рассмотрим пример, который иллюстрирует неразделительную декомпозицию частичной функции f.

Пример 4 [1, с. 377]. По методу p, q-разбиения минтермов найти неразделительную декомпозицию вида (1) $\varphi(\varphi_1(X^p), X^q)$ частичной функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданной совершенной ТМФ

$$Y = \begin{cases} \{0000, 0011, 0100, 1000, 1001, 1111\}^1 \\ \{0001, 0010, 0101, 0110, 0111, 1010, 1101, 1110\}^0 \end{cases},$$

для маски литералов $\{l_1 l_2 l_3 \,|\, l_3 l_4\}$.

Решение.

$$\{l_1 l_2 l_3 \,|\, l_3 l_4\} \Rightarrow \begin{cases} \{000|00, 001|11, 010|00, 100|00, 100|01, 111|11\}^1 \\ \{000|01, 001|10, 010|01, 011|10, 011|11, 101|10, 110|01, 111|10\}^0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overset{0}{\Rightarrow}\{l_1 l_2 0 \,|\, 0 l_4\} = \begin{cases} \{0\,|\,0,\, 2\,|\,0,\, 4\,|\,0,\, 4\,|\,1\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{0\,|\,0,\, 2\,|\,0,\, 4\,|\,(0,1)\}^1 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \\ \quad \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(0,2)\,|\,0,\, 4\,|\,(0,1)\}^1 \\ \{0\,|\,1,\, 2\,|\,1,\, 6\,|\,1\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{0\,|\,1,\, 2\,|\,1,\, 6\,|\,1\}^0 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(0,2,6)\,|\,1\}^0 \end{cases} \overset{|clo}{\Rightarrow} \\ \overset{1}{\Rightarrow}\{l_1 l_2 1 \,|\, 1 l_4\} = \begin{cases} \{1\,|\,3,7\,|\,3\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{1\,|\,3,7\,|\,3\}^1 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(1,7)\,|\,3\}^1 \\ \{1\,|\,2,3\,|\,2,3\,|\,3,5\,|\,2,7\,|\,2\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{1\,|\,2,3\,|\,(2,3),5\,|\,2,7\,|\,2\}^0 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \\ \quad \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(1,5,7)\,|\,2,\, 3\,|\,(2,3)\}^0 \end{cases} \overset{|clo}{\Rightarrow} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overset{|clo}{\Rightarrow} \left\{ \left(0,2 \middle| \begin{matrix} 0 \\ \times \end{matrix}\right), \left(0,2,6 \middle| \begin{matrix} \times \\ 1 \end{matrix}\right), \left(4 \middle| \begin{matrix} 0,1 \\ \times \end{matrix}\right) \right\} \overset{ort|}{\Rightarrow} \left\{ \left(0,2,6 \middle| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right), \left(4 \middle| \begin{matrix} 0,1 \\ \times \end{matrix}\right) \right\} = \{\mathrm{C}_1^0, \mathrm{C}_2^0\} \\ \overset{|clo}{\Rightarrow} \left\{ \left(1,7 \middle| \begin{matrix} 3 \\ \times \end{matrix}\right), \left(1,5,7 \middle| \begin{matrix} \times \\ 2 \end{matrix}\right), \left(3 \middle| \begin{matrix} \times \\ 2,3 \end{matrix}\right) \right\} \overset{ort|}{\Rightarrow} \left\{ \left(1,5,7 \middle| \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right), \left(3 \middle| \begin{matrix} \times \\ 2,3 \end{matrix}\right) \right\} = \{\mathrm{C}_1^1, \mathrm{C}_2^1\} \end{cases}.$$

В результате процедуры ортогонализации (оператор $\overset{ort|}{\Rightarrow}$) расширенных клонов и их взаимно попарного объединения $\{\mathrm{C}_1^0 \cup \mathrm{C}_1^1, \mathrm{C}_2^0 \cup \mathrm{C}_2^1\}$ и $\{\mathrm{C}_1^0 \cup \mathrm{C}_2^1, \mathrm{C}_2^0 \cup \mathrm{C}_1^1\}$ получим следующие множества расширенных максимальных клонов заданной функции f:

$$1.\ \left\{\left(0{,}1{,}2{,}5{,}6{,}7\left|\begin{matrix}0{,}3\\1{,}2\end{matrix}\right.\right),\left(3{,}4\left|\begin{matrix}0{,}1\\2{,}3\end{matrix}\right.\right)\right\};\qquad 2.\ \left\{\left(0{,}2{,}3{,}6\left|\begin{matrix}0\\1{,}2{,}3\end{matrix}\right.\right),\left(1{,}4{,}5{,}7\left|\begin{matrix}0{,}1{,}3\\2\end{matrix}\right.\right)\right\}.$$

Связывающая $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ и остаточная $\varphi(\varphi_1, x_3, x_4)$ функции определяются процедурами кодирования и конкатенирования:

$$1.\ \left\{\left(0{,}1{,}2{,}5{,}6{,}7\left|\begin{matrix}0{,}3\\1{,}2\end{matrix}\right.\right),\left(3{,}4,\left|\begin{matrix}0{,}1\\2{,}3\end{matrix}\right.\right)\right\}\overset{cod}{\Rightarrow}\left\{\begin{array}{l}1.1.\ \left\{\left(\varphi_1^0\left|\begin{matrix}0{,}3\\1{,}2\end{matrix}\right.\right),\left(\varphi_1^1\left|\begin{matrix}0{,}1\\2{,}3\end{matrix}\right.\right)\right\}=\\ \quad=\left\{\left(0\left|\begin{matrix}00{,}11\\01{,}10\end{matrix}\right.\right),\left(1\left|\begin{matrix}00{,}01\\10{,}11\end{matrix}\right.\right)\right\}\overset{con}{\Rightarrow}\{0{,}3{,}4{,}5\}^1\\ 1.2.\ \left\{\left(\varphi_1^1\left|\begin{matrix}0{,}3\\1{,}2\end{matrix}\right.\right),\left(\varphi_1^0\left|\begin{matrix}0{,}1\\2{,}3\end{matrix}\right.\right)\right\}=\\ \quad=\left\{\left(1\left|\begin{matrix}00{,}11\\01{,}10\end{matrix}\right.\right),\left(0\left|\begin{matrix}00{,}01\\10{,}11\end{matrix}\right.\right)\right\}\overset{con}{\Rightarrow}\{0{,}1{,}4{,}7\}^1\end{array}\right.;$$

$$2.\ \left\{\left(0{,}2{,}3{,}6\left|\begin{matrix}0\\1{,}2{,}3\end{matrix}\right.\right),\left(1{,}4{,}5{,}6\left|\begin{matrix}0{,}1{,}3\\2\end{matrix}\right.\right)\right\}\overset{cod}{\Rightarrow}\left\{\begin{array}{l}2.1.\ \left\{\left(\varphi_1^0\left|\begin{matrix}0\\1{,}2{,}3\end{matrix}\right.\right),\left(\varphi_1^1\left|\begin{matrix}0{,}1{,}3\\2\end{matrix}\right.\right)\right\}=\\ \quad=\left\{\left(0\left|\begin{matrix}00\\01{,}10{,}11\end{matrix}\right.\right),\left(1\left|\begin{matrix}00{,}01{,}11\\10\end{matrix}\right.\right)\right\}\overset{con}{\Rightarrow}\{0{,}4{,}5{,}7\}^1\\ 2.2.\ \left\{\left(\varphi_1^1\left|\begin{matrix}0\\1{,}2{,}3\end{matrix}\right.\right),\left(\varphi_1^0\left|\begin{matrix}0{,}1{,}3\\2\end{matrix}\right.\right)\right\}=\\ \quad=\left\{\left(1\left|\begin{matrix}00\\01{,}10{,}11\end{matrix}\right.\right),\left(0\left|\begin{matrix}00{,}01{,}11\\10\end{matrix}\right.\right)\right\}\overset{con}{\Rightarrow}\{0{,}1{,}3{,}4\}^1\end{array}\right..$$

Совершенные ТМФ связывающей $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ и остаточной $\varphi(\varphi_1, x_3, x_4)$ функций для полученных четырех решений неразделительной декомпозиции имеют вид:

1.1. $\varphi_1^1 = \{3{,}4\}^1$, $\varphi^1 = \{0{,}3{,}4{,}5\}^1$; 1.2. $\varphi_1^1 = \{0{,}1{,}2{,}5{,}6{,}7\}^1$, $\varphi^1 = \{0{,}1{,}4{,}7\}^1$;

2.1. $\varphi_1^1 = \{1{,}4{,}5{,}7\}^1$, $\varphi^1 = \{0{,}4{,}5{,}7\}^1$; 2.2. $\varphi_1^1 = \{0{,}2{,}3{,}6\}^1$, $\varphi^1 = \{0{,}1{,}3{,}4\}^1$.

Таким образом, на основании теоремы 2 заданная функция f для маски $\{l_1 l_2 l_3 \,|\, l_3 l_4\}$ допускает простую неразделительную одноблочную декомпозицию (рис. 6) вида (1)

$$\varphi(\varphi_1(X^p), X^q) = \varphi(\varphi_1(x_1, x_2, x_3), x_3, x_4).$$

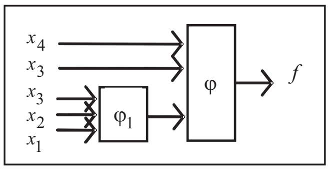

Рис. 6

Приведенное в [1, с. 377] единственное решение совпадает с полученным решением декомпозиции 1.1.

С увеличением значения c число масок с фиксированными значениями литералов увеличивается как 2^c, образуя вследствие процедур p, q-разбиения и клонирования 2^c подмножеств расширенных разбитых минтермов и соответственно 2^c множеств расширенных клонов заданной функции f. Для случая $c = 2$, в частности, получим

$$
\begin{array}{l}
\overset{P^q}{\Rightarrow} \{l_{\alpha_1} \cdots l_i \cdots l_j \cdots l_{\alpha_p} \,|\, l_{\beta_1} \cdots l_i \cdots l_j \cdots l_{\beta_q}\} \Rightarrow \\
\Rightarrow \begin{cases}
\overset{00}{\Rightarrow} \{l_{\alpha_1} \cdots 0 \cdots 0 \cdots l_{\alpha_p} \,|\, l_{\beta_1} \cdots 0 \cdots 0 \cdots l_{\beta_q}\} \overset{clo}{\Rightarrow} \{C_1^0, \ldots, C_{k_0}^0\} \\
\overset{01}{\Rightarrow} \{l_{\alpha_1} \cdots 0 \cdots 1 \cdots l_{\alpha_p} \,|\, l_{\beta_1} \cdots 0 \cdots 1 \cdots l_{\beta_q}\} \overset{clo}{\Rightarrow} \{C_1^1, \ldots, C_{k_1}^1\} \\
\overset{10}{\Rightarrow} \{l_{\alpha_1} \cdots 1 \cdots 0 \cdots l_{\alpha_p} \,|\, l_{\beta_1} \cdots 1 \cdots 0 \cdots l_{\beta_q}\} \overset{clo}{\Rightarrow} \{C_1^2, \ldots, C_{k_2}^2\} \\
\overset{11}{\Rightarrow} \{l_{\alpha_1} \cdots 1 \cdots 1 \cdots l_{\alpha_p} \,|\, l_{\beta_1} \cdots 1 \cdots 1 \cdots l_{\beta_q}\} \overset{clo}{\Rightarrow} \{C_1^3, \ldots, C_{k_3}^3\}
\end{cases} .
\end{array} \tag{13}
$$

Здесь $C_1^0,\ldots,C_{k_0}^0$, $C_1^1,\ldots,C_{k_1}^1$, $C_1^2,\ldots,C_{k_2}^2$ и $C_1^3,\ldots,C_{k_3}^3$ — условные обозначения расширенных клонов для соответствующих масок литералов, общие литералы l_i и l_j которых имеют в обоих классах разбиения одинаковые значения (в данном случае $l_i, l_j \in \{0,1\}$); $k_0, k_1, k_2, k_3 \in \{1,2,\ldots\}$ — мощности множеств расширенных клонов для $c=2$.

Как и в случае $c=1$, при $c \ge 2$ множества расширенных максимальных клонов функции f формируются путем комбинаторной выборки по одному клону из каждого их множества (13). Сформированные для каждой выборки множества при $c=2$ содержат четыре, при $c=3$ — восемь, а при произвольном c — всего 2^c расширенных клонов. В зависимости от числа c и мощности k_i i-го множества расширенных клонов число возможных выборок определяется как

$$
K_s = \prod_{i=0}^{2^c-2} \frac{k_i\,!}{(k_i - k_{i+1})!}, \; k_i \ge k_{i+1}. \tag{14}
$$

Для случая $c=2$ число возможных выборок K_s будет определять произведение (14) $\frac{k_0\,!}{(k_0-k_1)!} \cdot \frac{k_1\,!}{(k_1-k_2)!} \cdot \frac{k_2\,!}{(k_2-k_3)!}$ и соответствующее число расширенных максимальных клонов функции f: $\{C_{1111}^{0123},\ldots,C_{k_0k_1k_2k_3}^{0123}\},\ldots,\{C_{1k_111}^{0123},\ldots,C_{k_01k_2k_3}^{0123}\},\ldots$
$\ldots,\{C_{11k_21}^{0123},\ldots,C_{k_0k_11k_3}^{0123}\}$, $\ldots$, $\{C_{111k_3}^{0123},\ldots,C_{k_0k_1k_21}^{0123}\}$, $\ldots$, $\{C_{k_0111}^{0123},\ldots,C_{1k_1k_2k_3}^{0123}\},\ldots$
$\ldots,\{C_{k_0k_111}^{0123},\ldots,C_{11k_2k_3}^{0123}\},\ldots,\{C_{k_01k_21}^{0123},\ldots,C_{1k_11k_3}^{0123}\}$, $\ldots,\{C_{k_011k_3}^{0123},\ldots,C_{1k_1k_21}^{0123}\}$.

Неразделительную функциональную декомпозицию для случая $c=2$ иллюстрирует пример 5 [1, с. 374].

Пример 5. По методу p,q-разбиения минтермов найти неразделительную декомпозицию вида $\varphi(X^p, \varphi_2(X^q))$ полной булевой функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$, заданной совершенной ТМФ $Y^1 = \{0,5,6,7,8,9,14,15,19,22,26,31\}^1$, для маски литералов $\{l_1 l_3 l_4 \,|\, l_1 l_2 l_3 l_5\}$.

Решение.

$$
Y = \begin{cases}
\{00000,00101,00110,00111,01000,01001,01110,01111,10011,10110,11010,11111\}^1 \\
\{00001,00010,00011,00100,01010,01011,01100,01101,10000,10001,10010, \\
\quad 10100,10101,10111,11000,11001,11011,11100,11101,11110\}^0
\end{cases} ;
$$

$$
\begin{array}{c}
\{l_1 l_3 l_4 \,|\, l_1 l_2 l_3 l_5\} \Rightarrow \\
\Rightarrow \begin{cases}
\{000\,|\,0000,\ 010\,|\,0011,\ 011\,|\,0010,\ 011\,|\,0011,\ 000\,|\,0100,\ 000\,|\,0101,\ 011\,|\,0110, \\
\qquad 011\,|\,0111,\ 101\,|\,1001,\ 111\,|\,1010,\ 101\,|\,1100,\ 111\,|\,1111\}^1 \\
\{000\,|\,0001,\ 001\,|\,0000,\ 001\,|\,0001,\ 010\,|\,0010,\ 001\,|\,0100,\ 001\,|\,0101,\ 010\,|\,0110, \\
\quad 010\,|\,0111,\ 100\,|\,1000,\ 100\,|\,1001,\ 101\,|\,1000,\ 110\,|\,1010,\ 110\,|\,1011,\ 111\,|\,1011, \\
\qquad 100\,|\,1100,\ 100\,|\,1101,\ 101\,|\,1101,\ 110\,|\,1110,\ 110\,|\,1111,\ 111\,|\,1110\}^0
\end{cases} \Rightarrow
\end{array}
$$

$$
\{00l_4 \mid 0l_2\,0l_5\} = \begin{cases} \{0\mid 0,\,0\mid 4,\,0\mid 5\}^1 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{0\mid 0,\,0\mid 4,\,0\mid 5\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{0\mid (0,4,5)\}^1 \\ \{0\mid 1,\,1\mid 0,\,1\mid 1,\,1\mid 4,\,1\mid 5\}^0 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(0,1)\mid 1,\,1\mid 0,\,1\mid 4,\,1\mid 5\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \qquad \overset{clo|}{\Rightarrow} \\ \quad \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{(0,1)\mid 1,\,1\mid (0,4,5)\}^0 \end{cases}
$$

$$
\{01l_4 \mid 0l_2\,1l_5\} = \begin{cases} \{2\mid 3,\,3\mid 2,\,3\mid 3,\,3\mid 6,\,3\mid 7\}^1 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(2,3)\mid 3,\,3\mid 2,\,3\mid 6,\,3\mid 7\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \\ \quad \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{(2,3)\mid 3,\,3\mid (2,6,7)\}^1 \qquad \overset{clo|}{\Rightarrow} \\ \{2\mid 2,\,2\mid 6,\,2\mid 7\}^0 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{2\mid 2,\,2\mid 6,\,2\mid 7\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{2\mid (2,6,7)\}^0 \end{cases}
$$

$$
\{10l_4 \mid 1l_2\,0l_5\} = \begin{cases} \{5\mid 9{,}5\mid 12\}^1 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{5\mid 9,\,5\mid 12\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{5\mid (9,12)\}^1 \\ \{4\mid 8{,}4\mid 9{,}5\mid 8{,}4\mid 12{,}4\mid 13{,}5\mid 13\}^0 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(4,5)\mid 8{,}4\mid 9{,}4\mid 12,\,(4,5)\mid 13\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \qquad \overset{clo|}{\Rightarrow} \\ \quad \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{(4,5)\mid (8,13),\,4\mid (9,12)\}^0 \end{cases}
$$

$$
\{11l_4 \mid 1l_2\,1l_5\} = \begin{cases} \{7\mid 10,\,7\mid 15\}^1 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{7\mid 10,\,7\mid 15\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{7\mid (10,15)\}^1 \\ \{6\mid 10,\,6\mid 11,\,7\mid 11,\,6\mid 14,\,6\mid 15,\,7\mid 14\}^0 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \qquad \overset{clo|}{\Rightarrow} \\ \quad \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{6\mid 10,\,(6,7)\mid 11,\,(6,7)\mid 14,\,6\mid 15\}^0 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{6\mid (10,15),\,(6,7)\mid (11,14)\}^0 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\middle| 0,4,5\right), \left(\begin{matrix}\times\\0,1\end{matrix}\middle| 1\right) \right\} = \{C_1^0, C_2^0\} \\ \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\middle| 2,6,7\right), \left(\begin{matrix}2,3\\\times\end{matrix}\middle| 3\right) \right\} = \{C_1^1, C_2^1\} \\ \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{matrix}\times\\4,5\end{matrix}\middle| 8,13\right), \left(\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\middle| 9,12\right) \right\} = \{C_1^2, C_2^2\} \\ \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{matrix}7\\6\end{matrix}\middle| 10,15\right), \left(\begin{matrix}\times\\6,7\end{matrix}\middle| 11,14\right) \right\} = \{C_1^3, C_2^3\} \end{cases}.
$$

Поскольку мощность множеств расширенных клонов $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 2$, то согласно (14) число возможных поэлементных выборок определяется как $K_s = 2!\cdot 2!\cdot 2! = 8$, а в каждом образовавшемся множестве будет по четыре клона. Таким образом, после процедуры объединения сформируется всего восемь множеств расширенных максимальных клонов заданной функции f:

1. $\{C_{1111}^{0123}, C_{2222}^{0123}\}$; 2. $\{C_{1112}^{0123}, C_{2221}^{0123}\}$; 3. $\{C_{1121}^{0123}, C_{2212}^{0123}\}$; 4. $\{C_{1122}^{0123}, C_{2211}^{0123}\}$;
5. $\{C_{1211}^{0123}, C_{2122}^{0123}\}$; 6. $\{C_{1212}^{0123}, C_{2121}^{0123}\}$; 7. $\{C_{1221}^{0123}, C_{2112}^{0123}\}$; 8. $\{C_{1222}^{0123}, C_{2111}^{0123}\}$.

В целях сопоставления полученного результата с результатом работы [1, с. 374] из полученных множеств расширенных максимальных клонов выделим седьмое множество, приведенное в качестве единственного решения неразделительной декомпозиции заданной функции f:

$$
7.\ \{C_{1221}^{0123}, C_{2112}^{0123}\} = \{\{C_1^0 \cup C_2^1 \cup C_2^2 \cup C_1^3\}, \{C_2^0 \cup C_1^1 \cup C_1^2 \cup C_2^3\}\} =
$$

$$
= \left\{ \left(\begin{matrix}0,2,3,5,7\\1,4,6\end{matrix}\middle| 0,3,4,5,9,10,12,15\right), \left(\begin{matrix}3\\0,1,2,4,5,6,7\end{matrix}\middle| 1,2,6,7,8,11,13,14\right) \right\}.
$$

После процедур кодирования и конкатенирования получим следующие два решения:

$$\overset{cod}{\Rightarrow}\begin{cases} 7.1.\ \{\begin{pmatrix} 0,2,3,5,7 \\ 1,4,6 \end{pmatrix} \Bigg| \varphi_1^1\Big), \begin{pmatrix} 3 \\ 0,1,2,4,5,6,7 \end{pmatrix} \Bigg| \varphi_1^0\Big)\} = \\ = \{\begin{pmatrix} 0,2,3,5,7 \\ 1,4,6 \end{pmatrix} \Bigg| 1\Big), \begin{pmatrix} 3 \\ 0,1,2,4,5,6,7 \end{pmatrix} \Bigg| 0\Big)\} \overset{con}{\Rightarrow} \{1,5,7,11,15,6\}^1 \\ 7.2.\ \{\begin{pmatrix} 0,2,3,5,7 \\ 1,4,6 \end{pmatrix} \Bigg| \varphi_1^0\Big), \begin{pmatrix} 3 \\ 0,1,2,4,5,6,7 \end{pmatrix} \Bigg| \varphi_1^1\Big)\} = \\ = \{\begin{pmatrix} 0,2,3,5,7 \\ 1,4,6 \end{pmatrix} \Bigg| 0\Big), \begin{pmatrix} 3 \\ 0,1,2,4,5,6,7 \end{pmatrix} \Bigg| 1\Big)\} \overset{con}{\Rightarrow} \{0,4,6,10,14,7\}^1 \end{cases},$$

для которых совершенные ТМФ связывающей функции $\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_5)$ имеют вид

$$7.1.\ \varphi_1^1 = \{0,3,4,5,9,10,12,15\}^1; \quad 7.2.\ \varphi_1^1 = \{1,2,6,7,8,11,13,14\}^1,$$

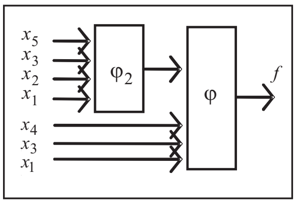

Рис. 7

а совершенные ТМФ остаточной функции $\varphi(x_1, x_3, x_4, \varphi_1)$ определяются как

$$7.1.\ \varphi^1 = \{1,5,6,7,11,15\}^1;$$

$$7.2.\ \varphi^1 = \{0,4,6,7,10,14\}^1.$$

Таким образом, для маски p,q-разбиения $\{l_1 l_3 l_4 \,|\, l_1 l_2 l_3 l_5\}$ получим простую неразделительную декомпозицию (рис. 7) вида (2)

$$\varphi(X^p, \varphi_1(X^q)) = \varphi(x_1, x_3, x_4, \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_5)).$$

Данный результат совпадает с решением декомпозиции в [1, с. 374].

4. ПОВТОРНАЯ НЕРАЗДЕЛИТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ

Как и в случае разделительной декомпозиции, повторная неразделительная декомпозиция заданной функции f по методу p,q-разбиения конъюнктермов и клонирования имеет место тогда, когда мощность k ее расширенных максимальных клонов больше двух, т.е. когда $k \geq 3$. Существование повторной неразделительной функциональной декомпозиции формулирует следующая теорема.

Теорема 3. Булевая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданная (совершенной) ТМФ, допускает повторную неразделительную декомпозицию тогда и только тогда, когда хотя бы для одной маски p,q-разбиения литералов, имеющей в обоих классах общие элементы, что составляет множество $Z = \{x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_c}\}$, $c \in \{1,2,\ldots, n-3\}$, мощность k множества ее расширенных максимальных клонов, полученных в результате процедуры клонирования, принимает значение $k \geq 3$, причем:

1) если это условие выполняется для клонов p-класса, то имеет место одноблочная повторная неразделительная декомпозиция вида $\varphi(\varphi_{11}(X^p), \varphi_{12}(X^p), \ldots$ $\ldots, \varphi_{1s}(X^p), X^q)$;

2) если это условие выполняется для клонов q-класса, то имеет место одноблочная повторная неразделительная декомпозиция вида $\varphi(X^p,\ \varphi_{21}(X^q), \varphi_{22}(X^q), \ldots, \varphi_{2s}(X^q))$;

3) если это условие выполняется для клонов p- и q-классов, то имеет место двухблочная повторная неразделительная декомпозиция вида

$$\varphi(\varphi_{11}(X^p), \varphi_{12}(X^p), \ldots, \varphi_{1s_1}(X^p), \varphi_{21}(X^q), \varphi_{22}(X^q), \ldots, \varphi_{2s_2}(X^q)).$$

Доказательство теоремы, как и в случае повторной разделительной декомпозиции [17], вытекает непосредственно из соответствия между упрощенной декомпозиционной картой, образованной процедурой p,q-разбиения для маски литералов, имеющей в обоих классах некоторое количество общих элементов, и расширенными максимальными клонами заданной функции f.

В данном случае число расширенных частичных клонов для каждой маски составляет от трех и более, и сформированные вследствие их объединения множества расширенных максимальных клонов будут иметь мощность $k \geq 3$, а их количество будет определяться комбинаторно числом расширенных частичных клонов для каждой маски литералов с фиксированным числом *c*. Указанную особенность повторной неразделительной декомпозиции иллюстрирует следующий пример.

Пример 6. По методу p, q-разбиения минтермов найти неразделительную повторную декомпозицию вида $\varphi(X^p, \varphi_{21}(X^q), \varphi_{22}(X^q))$ частичной функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, рассмотренной в примере 2, для маски литералов $\{l_1 l_2 | l_2 l_3 l_4\}$.

Решение.

$$Y = \begin{cases} \{0000, 0011, 0100, 1000, 1001, 1111\}^1 \\ \{0001, 0010, 0101, 0110, 0111, 1010, 1101, 1110\}^0 \end{cases};$$

$$\{l_1 l_2 \mid l_2 l_3 l_4\} \Rightarrow \begin{cases} \{00 \mid 000, 00 \mid 011, 01 \mid 100, 10 \mid 000, 10 \mid 001, 11 \mid 111\}^1 \\ \{00 \mid 001, 00 \mid 010, 01 \mid 101, 01 \mid 110, 01 \mid 111, 10 \mid 010, \\ \qquad 11 \mid 101, 11 \mid 110\}^0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overset{0}{\Rightarrow}\{l_1 0 \mid 0 l_3 l_4\} = \begin{cases} \{0 \mid 0, 0 \mid 3, 2 \mid 0, 2 \mid 1\}^1 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(0,2) \mid 0, 0 \mid 3, 2 \mid 1)\}^1 \\ \{0 \mid 1, 0 \mid 2, 2 \mid 2\}^0 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{0 \mid 1, (0,2) \mid 2\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \\ \overset{1}{\Rightarrow}\{l_1 1 \mid 1 l_3 l_4\} = \begin{cases} \{1 \mid 4, 3 \mid 7\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{1 \mid 4, 3 \mid 7\}^1 \\ \{1 \mid 5, 1 \mid 6, 1 \mid 7, 3 \mid 5, 3 \mid 6\}^0 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \\ \qquad \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(1,3) \mid 5, (1,3) \mid 6, 1 \mid 7\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{(1,3) \mid (5,6), 1 \mid 7\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \{\left(\begin{array}{l|l} 0,2 & \\ \times & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 2 & \\ 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} \times & \\ 0,2 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 0 & \\ \times & 3 \end{array}\right)\} \Rightarrow \{\left(\begin{array}{l|l} 0,2 & \\ \times & 0,3 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 2 & \\ 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} \times & \\ 0,2 & 2 \end{array}\right)\} = \{\mathrm{C}_1^0, \mathrm{C}_2^0, \mathrm{C}_3^0\} \\ \overset{clo|}{\Rightarrow} \{\left(\begin{array}{l|l} 1 & \\ \times & 4 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} \times & \\ 1,3 & 5,6 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 3 & \\ 1 & 7 \end{array}\right)\} \Rightarrow \{\mathrm{C}_1^1, \mathrm{C}_2^1, \mathrm{C}_3^1\} \end{cases}.$$

Поскольку мощности сформированных множеств расширенных клонов $k_0 = k_1 = 3$, то согласно (14) общее число попарных выборок K_s этих множеств равно 3!. Следовательно, после операции объединения количество возможных решений неразделительной декомпозиции определят следующие множества расширенных максимальных клонов *q*-класса заданной функции *f*:

1. $\{\mathrm{C}_{11}^{01}, \mathrm{C}_{22}^{01}, \mathrm{C}_{33}^{01}\} = \{\left(\begin{array}{l|l} 0,1,2 & \\ \times & 0,3,4 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 2 & \\ 0,1,3 & 1,5,6 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 3 & \\ 0,1,2 & 2,7 \end{array}\right)\}$;

2. $\{\mathrm{C}_{11}^{01}, \mathrm{C}_{23}^{01}, \mathrm{C}_{32}^{01}\} = \{\left(\begin{array}{l|l} 0,1,2 & \\ \times & 0,3,4 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 2,3 & \\ 0,1 & 1,7 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} \varnothing & \\ \mathbf{E}_2^2 & 2,5,6 \end{array}\right)\}$;

3. $\{\mathrm{C}_{12}^{01}, \mathrm{C}_{21}^{01}, \mathrm{C}_{33}^{01}\} = \{\left(\begin{array}{l|l} 0,2 & \\ 1,3 & 0,3,5,6 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 1,2 & \\ 0 & 1,4 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 3 & \\ 0,1,2 & 2,7 \end{array}\right)\}$;

4. $\{\mathrm{C}_{12}^{01}, \mathrm{C}_{23}^{01}, \mathrm{C}_{31}^{01}\} = \{\left(\begin{array}{l|l} 0,2 & \\ 1,3 & 0,3,5,6 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 2,3 & \\ 0,1 & 1,7 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 1 & \\ 0,2 & 2,4 \end{array}\right)\}$;

5. $\{\mathrm{C}_{13}^{01}, \mathrm{C}_{21}^{01}, \mathrm{C}_{32}^{01}\} = \{\left(\begin{array}{l|l} 0,2,3 & \\ 1 & 0,3,7 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 1,2 & \\ 0 & 1,4 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} \varnothing & \\ \mathbf{E}_2^2 & 2,5,6 \end{array}\right)\}$;

6. $\{\mathrm{C}_{13}^{01}, \mathrm{C}_{22}^{01}, \mathrm{C}_{31}^{01}\} = \{\left(\begin{array}{l|l} 0,2,3 & \\ 1 & 0,3,7 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 2 & \\ 0,1,3 & 1,5,6 \end{array}\right), \left(\begin{array}{l|l} 1 & \\ 0,2 & 2,4 \end{array}\right)\}$.

Согласно теореме 3 заданная функция f для маски $\{l_1 l_2 \mid l_2 l_3 l_4\}$ допускает повторную неразделительную декомпозицию вида $\varphi(X^p, \varphi_{21}(X^q), \varphi_{22}(X^q))$, поскольку мощность ее расширенных максимальных клонов равна трем. Чтобы определить связывающие функции $\varphi_{21}, \varphi_{22}$ и остаточную функцию φ, выполним процедуры кодирования и конкатенирования. В данном случае $k=3$. Следовательно, требуется 2-разрядное кодирование фиксированных множеств полученных клонов [17]. При этом число возможных вариантов кодирования будет равно $3!C_4^3 = 24$.

Для выполнения упомянутых процедур выберем из полученных множеств расширенных максимальных клонов решение 2, применив один из вариантов кодирования:

$$\{\left(\begin{matrix}0,1,2\\ \times\end{matrix}\middle|\,0,3,4\right),\left(\begin{matrix}2,3\\ 0,1\end{matrix}\middle|\,1,7\right),\left(\begin{matrix}\varnothing\\ \mathbf{E}_2^2\end{matrix}\middle|\,2,5,6\right)\}\overset{cod}{\Rightarrow}\{\left(\begin{matrix}0,1,2\\ \times\end{matrix}\middle|\,\varphi_{21}^0\varphi_{22}^0\right),\left(\begin{matrix}2,3\\ 0,1\end{matrix}\middle|\,\varphi_{21}^0\varphi_{22}^1\right),\left(\begin{matrix}\varnothing\\ \mathbf{E}_2^2\end{matrix}\middle|\,\varphi_{21}^1\varphi_{22}^0\right)\}=$$

$$=\{\left(\begin{matrix}00,01,10\\ \times\end{matrix}\middle|\,00\right),\left(\begin{matrix}10,11\\ 01,11\end{matrix}\middle|\,01\right),\left(\begin{matrix}\varnothing\\ \mathbf{E}_2^2\end{matrix}\middle|\,10\right)\}\overset{con}{\Rightarrow}\{0000,0100,1000,1001,1101\}^1.$$

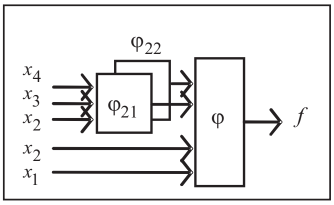

Рис. 8

Для выбранного решения 2 совершенные ТМФ связывающих φ_{21}, φ_{22} и остаточной φ функций имеют вид

$$\varphi_{21}^1 = \{7\}^1, \quad \varphi_{22}^1 = \{7\}^1, \quad \varphi^1 = \{0,4,8,9,13\}^1.$$

Таким образом, заданная функция f для маски $\{l_1 l_2 \mid l_2 l_3 l_4\}$ имеет повторную неразделительную одноблочную декомпозицию (рис. 8) вида

$$\varphi(X^p, \varphi_{21}(X^q), \varphi_{22}(X^q)) = \varphi(x_1, x_2, \varphi_{21}(x_2, x_3, x_4), \varphi_{22}(x_2, x_3, x_4)).$$

5. НЕРАЗДЕЛИТЕЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Под неразделительной декомпозицией системы m булевых функций от n переменных $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X)\}$, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, будем понимать разложение каждой ее функции f_i, $i = 1,2,\ldots,m$, на суперпозицию двух либо трех функций, представляемой по методу p,q-разбиения конъюнктермов соответствующими выражениями аналогично (1), (2) и (3):

$$F(X) = \Phi(\Phi_1(X^p), X^q), \tag{15}$$

$$F(X) = \Phi(X^p, \Phi_2(X^q)), \tag{16}$$

$$F(X) = \Phi(\Phi_1(X^p), \Phi_2(X^q)). \tag{17}$$

Здесь $\Phi_1 = \{\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{1d_1}\}$ и $\Phi_2 = \{\varphi_{21}, \varphi_{22}, \ldots, \varphi_{2d_2}\}$ — множества связывающих функций φ_{1i} и φ_{2i}, $\Phi = \{\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \ldots, \varphi_{(m)}\}$ — множества остаточных функций $\varphi_{(i)}$, причем φ_{1i}, φ_{2i} и $\varphi_{(i)}$ зависят от меньшего числа переменных, чем f_i; d_1, d_2 — количества связывающих функций соответственно p- и q-классов. При этом имеют место неравества $d_1 + q \le n-2$ в (15), $d_2 + n - q \le n-2$ в (16), $d_1 + d_2 \le n-2$ в (17), $q \in \{2,3,\ldots,(n-2)\}$.

Каждое равенство (15), (16), (17) равносильно системе функций f_i, $i = 1,2,\ldots,m$, представленных соответствующим декомпозиционным выражением

$$f_i = \varphi_{(i)}(\varphi_{1i}(X^p), X^q), \quad f_i = \varphi_{(i)}(X^p, \varphi_{2i}(X^q)), \quad f_i = \varphi_{(i)}(\varphi_{1i}(X^p), \varphi_{2i}(X^q)).$$

ISSN 0023-1274. Кибернетика и системный анализ, 2009, № 3

Заметим, что в данном случае применяются все необходимые теоретические положения и определения метода q-разбиения конъюнктермов (в том числе функций, заданных в ДНФ), относящиеся к разделительной [16–18] и изложенной выше неразделительной функциональной декомпозиции. Поэтому на основании уже рассмотренного можно сформулировать теорему 4 о существовании совместной простой неразделительной декомпозиции и теорему 5 о существовании совместной блочно-повторной неразделительной декомпозиции системы булевых функций $F(X)$.

Теорема 4. Система булевых функций $F(X)=\{f_1(X), f_2(X),\ldots, f_m(X)\}$, $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, заданная системой ТМФ $\{Y_1^1, Y_2^1, \ldots, Y_m^1\}$, допускает совместную простую неразделительную декомпозицию тогда и только тогда, когда хотя бы для одной маски p, q-разбиения литералов, имеющей в обоих классах общие элементы, что составляют множество $Z=\{x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_c}\}$, $c\in\{1,2,\ldots, n-3\}$, мощность множеств системных расширенных клонов ее функций составляет не больше двух, а множества их фиксированных субминтермов одинаковы, причем:

1) если клоны p-класса, то имеем одноблочную неразделительную декомпозицию вида $\Phi(\varphi_1(X^p), X^q)$, при этом в (15) $\Phi_1=\varphi_1$ и $d_1=1$;

2) если клоны q-класса, то имеем одноблочную неразделительную декомпозицию вида $\Phi(X^p, \varphi_2(X^q))$, при этом в (16) $\Phi_2=\varphi_2$ и $d_2=1$;

3) если клоны p- и q-класса, то имеем двухблочную неразделительную декомпозицию вида $\Phi(\varphi_1(X^p), \varphi_2(X^q))$, при этом в (17) $\Phi_1=\varphi_1$, $\Phi_2=\varphi_2$ и $d_1=d_2=1$.

Доказательство теоремы 4 непосредственно вытекает из рассмотренных ранее в [18] и изложенных выше определений и положений, а также из теоремы 2 о существовании простой неразделительной декомпозиции булевой функции $f(X)$ как обобщение их на систему $F(X)$.

Теорема 5. Система булевых функций $F(X)=\{f_1(X), f_2(X),\ldots, f_m(X)\}$, $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, заданная системой ТМФ $\{Y_1^1, Y_2^1, \ldots, Y_m^1\}$, допускает совместную блочно-повторную неразделительную декомпозицию тогда и только тогда, когда хотя бы для одной маски p, q-разбиения литералов, имеющей в обоих классах общие элементы, что составляют множество $Z=\{x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_c}\}$, $c\in\{1,2,\ldots, n-3\}$, мощность k множеств системных расширенных клонов функций равна не меньше трех, т.е. $k\geq 3$, а множества их фиксированных субминтермов одинаковы, причем:

1) если клоны p-класса, то имеем одноблочную d_1-повторную неразделительную декомпозицию вида $\Phi(\Phi_1(X^p), X^q)$;

2) если клоны q-класса, то имеем одноблочную d_2-повторную неразделительную декомпозицию вида $\Phi(X^p, \Phi_2(X^q))$;

3) если клоны p- и q-классов, то имеем двухблочную d_1, d_2-повторную неразделительную декомпозицию вида $\Phi(\Phi_1(X^p), \Phi_2(X^q))$.

Доказательство теоремы 4 вытекает непосредственно из рассмотренных ранее в [18] и изложенных выше определений и положений, а также из теоремы 3 о существовании блочно-повторной неразделительной декомпозиции булевой функции $f(X)$ как обобщение их на систему $F(X)$.

Рассмотрим пример [7, 8] совместной неразделительной декомпозиции системы частичных булевых функций, заданных в ДНФ.

Пример 7. По методу p, q-разбиения найти совместную неразделительную декомпозицию вида (16) $\Phi(X^p, \Phi_2(X^q))$ системы частичных функций $F(X)=\{f_1(X), f_2(X)\}$, $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, заданной таблицей истинности (см. табл. 1) для маски $\{l_1 l_4 | l_2 l_3 l_4\}$.

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	x_4	f_1	f_2
0	0	–	0	1	1
1	0	–	0	1	0
–	0	0	–	1	~
–	–	1	1	0	~
–	1	1	0	0	0
–	1	–	1	~	1
0	–	0	1	1	~

Решение. Таблично заданная система частичных функций f_1 и f_2 имеет такую ТМФ $\{Y_1^1, Y_2^1\}$:

$$Y_1 = \begin{cases} \{0000,0001,0010,0101,1000,1001,1010\}^1 \\ \{0011,0110,0111,1011,1110,1111\}^0 \end{cases};$$

$$Y_2 = \begin{cases} \{0000,0010,0101,0111,1101,1111\}^1 \\ \{0110,1000,1010,1110\}^0 \end{cases}.$$

Для f_1 имеем

$$\{l_1 l_4 \mid l_2 l_3 l_4\} = \begin{cases} \{00|000,01|001,00|010,01|101,10|000,11|001,10|010\}^1 \\ \{01|011,00|110,01|111,11|011,10|110,11|111\}^0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{l_1 0 \mid l_2 l_3 0\} = \begin{cases} \{0\,|\,0,0\,|\,2,2\,|\,0,2\,|\,2\}^1 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(0,2)\,|\,0,(0,2)\,|\,2\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{(0,2)\,|\,(0,2)\}^1 \\ \{0\,|\,6,2\,|\,6\}^0 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(0,2)\,|\,6\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \\ \{l_1 1 \mid l_2 l_3 1\} = \begin{cases} \{1\,|\,1,1\,|\,5,3\,|\,1\}^1 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(1,3)\,|\,1,1\,|\,5\}^1 \\ \{1\,|\,3,1\,|\,7,3\,|\,3,3\,|\,7\}^0 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(1,3)\,|\,3,(1,3)\,|\,7\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{(1,3)\,|\,(3,7)\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0,2 & 0,2 \\ \times & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \times & 6 \\ 0,2 & \end{array}\right) \right\} = \{C_1^0, C_2^0\} \\ \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1,3 & 1 \\ \times & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ \times & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \times & 3,7 \\ 1,3 & \end{array}\right) \right\} \overset{add|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1,3 & 1,5 \\ \times & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \times & 3,7 \\ 1,3 & \end{array}\right) \right\} = \{C_1^1, C_2^1\} \end{cases}.$$

После выборок ($K_s = 2$) и объединений $\{C_1^0 \cup C_1^1, C_2^0 \cup C_2^1\}$ и $\{C_1^0 \cup C_2^1, C_2^0 \cup C_1^1\}$ получим два множества максимальных расширенных клонов функции f_1:

$$1.1.\ \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_2^2 & 0,1,2,5 \\ \varnothing & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \varnothing & 3,6,7 \\ \mathbf{E}_2^2 & \end{array}\right) \right\}_1; \qquad 1.2.\ \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0,2 & 0,2,3,7 \\ 1,3 & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 1,3 & 1,5,6 \\ 0,2 & \end{array}\right) \right\}_1.$$

Заметим, что в обоих множествах отсутствует клон $\left(\begin{array}{c|c} \times & 4 \\ \times & \end{array}\right)$, имеющий несущественные нефиксированные субминтермы. Такой клон условно назовем свободным, поскольку его можно присоединить (операцией объединения) к любому другому клону из того же множества и тем самым сформировать оптимальную структуру совместной декомпозиции заданной системы.

Для f_2 имеем

$$\{l_1 l_4 \mid l_2 l_3 l_4\} = \begin{cases} \{00|000,00|010,01|101,01|111,11|101,11|111\}^1 \\ \{00|110,10|000,10|010,10|110\}^0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{l_1 0 \mid l_2 l_3 0\} = \begin{cases} \{0\,|\,0,0\,|\,2\}^1 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{0\,|\,0,0\,|\,2\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{0\,|\,(0,2)\}^1 \\ \{0\,|\,6,2\,|\,0,2\,|\,2,2\,|\,6\}^0 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(0,2)\,|\,6,2\,| \\ \quad 0,2\,|\,2\}^0 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{(0,2)\,|\,6,2\,|\,(0,2)\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0,2 \\ 2 & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \times & 6 \\ 0,2 & \end{array}\right) \right\} = \{C_1^0, C_2^0\} \\ \{l_1 1 \mid l_2 l_3 1\} = \begin{cases} \{1\,|\,5,1\,|\,7,3\,|\,5,3\,|\,7\}^1 \overset{\cup|}{\Rightarrow} \{(1,3)\,|\,5,(1,3)\,|\,7\}^1 \overset{|\cup}{\Rightarrow} \\ \quad \overset{|\cup}{\Rightarrow} \{(1,3)\,|\,(5,7)\}^1 \\ \{\times\}^0 \end{cases} \overset{clo|}{\Rightarrow} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1,3 & 5,7 \\ \times & \end{array}\right) \right\} = \{C_1^1\} \end{cases}.$$

Отсюда для f_2 после выборок $(K_s = 2)$ и объединений $\{C_1^0 \cup C_1^1, C_2^0\}$ и $\{C_1^0, C_2^0 \cup C_1^1\}$ получим:

$$2.1.\ \left\{\begin{pmatrix} 0,1,3 \\ \times \end{pmatrix}\middle| 0,2,5,7\right), \left(\begin{matrix} \times \\ 0,2 \end{matrix}\middle| 6\right)\}_2; \quad 2.2.\ \left\{\left(\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}\middle| 0,2\right), \left(\begin{matrix} 1,3 \\ 0,2 \end{matrix}\middle| 5,6,7\right)\right\}_2.$$

Функция f_2 имеет три свободных клона: $\left(\begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix}\middle| 1\right)$, $\left(\begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix}\middle| 3\right)$ и $\left(\begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix}\middle| 4\right)$, причем последний является общим для обеих функций, что позволяет исключить его из системы. Другие два свободных клона функции f_2 распределим по полученным выше клонам, окончательно сформировав таким образом следующие четыре множества максимальных расширенных клонов функции f_2:

$$2.1.\ \left\{\left(\begin{matrix} 0,1,3 \\ 2 \end{matrix}\middle| 0,1,2,5,7\right), \left(\begin{matrix} 1,3 \\ 0,2 \end{matrix}\middle| 3,6\right)\right\}_2; \quad 2.2.\ \left\{\left(\begin{matrix} 0,1,3 \\ 2 \end{matrix}\middle| 0,2,3,5,7\right), \left(\begin{matrix} 1,3 \\ 0,2 \end{matrix}\middle| 1,6\right)\right\}_2;$$

$$2.3.\ \left\{\left(\begin{matrix} 0,1,3 \\ 2 \end{matrix}\middle| 0,1,2,3,5,7\right), \left(\begin{matrix} 1,3 \\ 0,2 \end{matrix}\middle| 6\right)\right\}_2; \quad 2.4.\ \left\{\left(\begin{matrix} 0,1,3 \\ 2 \end{matrix}\middle| 0,2,5,7\right), \left(\begin{matrix} 1,3 \\ 0,2 \end{matrix}\middle| 1,3,6\right)\right\}_2.$$

Для реализации совместной неразделительной декомпозиции заданной системы необходимо определить ядро системы [18], на основании которого строятся системные расширенные клоны. Ядро системы — это общее множество фиксированных субминтермов максимальных расширенных клонов функций заданной системы. Определить его можно путем попарно взаимных пересечений соответствующих множеств фиксированных субминтермов. Обозначим множества фиксированных субминтермов полученных максимальных расширенных клонов функций системы:

для f_1: 1.1. $A_{11} = \{0,1,2,5\}$, $B_{11} = \{3,6,7\}$; 1.2. $A_{12} = \{0,2,3,7\}$, $B_{12} = \{1,5,6\}$;
для f_2: 2.1. $A_{21} = \{0,1,2,5,7\}$, $B_{21} = \{3,6\}$; 2.2. $A_{22} = \{0,2,3,5,7\}$, $B_{22} = \{1,6\}$;
2.3. $A_{23} = \{0,1,2,3,5,7\}$, $B_{23} = \{6\}$; 2.4. $A_{24} = \{0,2,5,7\}$, $B_{24} = \{1,3,6\}$.

Попарно взаимные пересечения относительно возможных решений функции f_1 дают такие результаты:

$$1.\ A_{11} \cap \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \\ A_{24} \end{pmatrix} = (0,1,2,5) \cap \begin{pmatrix} (0,1,2,5,7) \\ (0,2,3,5,7) \\ (0,1,2,3,5,7) \\ (0,2,5,7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1,2,5) \\ (0,2,5) \\ (0,1,2,5) \\ (0,2,5) \end{pmatrix},$$

$$B_{11} \cap \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{22} \\ B_{23} \\ B_{24} \end{pmatrix} = (3,6,7) \cap \begin{pmatrix} (3,6) \\ (1,6) \\ (6) \\ (1,3,6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3,6) \\ (6) \\ (6) \\ (3,6) \end{pmatrix};$$

$$2.\ A_{12} \cap \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \\ A_{24} \end{pmatrix} = (0,2,3,7) \cap \begin{pmatrix} (0,1,2,5,7) \\ (0,2,3,5,7) \\ (0,1,2,3,5,7) \\ (0,2,5,7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,2,7) \\ (0,2,3,7) \\ (0,2,3,7) \\ (0,2,7) \end{pmatrix},$$

$$B_{12} \cap \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{22} \\ B_{23} \\ B_{24} \end{pmatrix} = (1,5,6) \cap \begin{pmatrix} (3,6) \\ (1,6) \\ (6) \\ (1,3,6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6) \\ (1,6) \\ (6) \\ (1,6) \end{pmatrix}.$$

Полученные пересечения максимальной мощности составляют ядро заданной системы, лежащей в основе общей связывающей функции $\varphi_1(x_2, x_3, x_4)$ для двух решений декомпозиции:

1. $A = A_{11} \cap A_{21} = A_{11} \cap A_{23} = (0,1,2,5)$; $B = B_{11} \cap B_{21} = B_{11} \cap B_{24} = (3,6)$;

2. $A = A_{12} \cap A_{22} = A_{12} \cap A_{23} = (0,2,3,7)$; $B = B_{12} \cap B_{22} = B_{12} \cap B_{24} = (1,6)$.

Теперь системные расширенные клоны функций заданой системы для двух решений совместной декомпозиции окончательно имеют вид:

для f_1: 1. $\left\{\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_2^2 & 0,1,2,5 \\ \varnothing & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \varnothing & 3,6 \\ \mathbf{E}_2^2 & \end{array}\right)\right\}_1$; 2. $\left\{\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_2^2 & 0,2,3,7 \\ \varnothing & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \varnothing & 1,6 \\ \mathbf{E}_2^2 & \end{array}\right)\right\}_1$;

для f_2: 1. $\left\{\left(\begin{array}{c|c} 0,1,3 & 0,1,2,5 \\ 2 & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 1,3 & 3,6 \\ 0,2 & \end{array}\right)\right\}_2$; 2. $\left\{\left(\begin{array}{c|c} 0,1,3 & 0,2,3,7 \\ 2 & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 1,3 & 1,6 \\ 0,2 & \end{array}\right)\right\}_2$.

В результате кодирования и конкатенирования соответствующих множеств субминтермов системных расширенных клонов в случае первого решения, например, получим:

для f_1:

$$1.\left\{\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_2^2 & 0,1,2,5 \\ \varnothing & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \varnothing & 3,6 \\ \mathbf{E}_2^2 & \end{array}\right)\right\}_1 \overset{cod}{\Rightarrow} \begin{cases} 1.1.\left\{\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_2^2 & \varphi_1^1 \\ \varnothing & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \varnothing & \varphi_1^0 \\ \mathbf{E}_2^2 & \end{array}\right)\right\} = \left\{\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_2^2 & 1 \\ \varnothing & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \varnothing & 0 \\ \mathbf{E}_2^2 & \end{array}\right)\right\} \overset{con}{\Rightarrow} \{1,3,5,7\}^1 \\ 1.2.\left\{\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_2^2 & \varphi_1^0 \\ \varnothing & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \varnothing & \varphi_1^1 \\ \mathbf{E}_2^2 & \end{array}\right)\right\} = \left\{\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_2^2 & 0 \\ \varnothing & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \varnothing & 1 \\ \mathbf{E}_2^2 & \end{array}\right)\right\} \overset{con}{\Rightarrow} \{0,2,4,6\}^1 \end{cases};$$

для f_2:

$$1.\left\{\left(\begin{array}{c|c} 0,1,3 & 0,1,2,5 \\ 2 & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 1,3 & 3,6 \\ 0,2 & \end{array}\right)\right\}_2 \overset{cod}{\Rightarrow}$$

$$\overset{cod}{\Rightarrow} \begin{cases} 1.1.\left\{\left(\begin{array}{c|c} 0,1,3 & \varphi_1^1 \\ 2 & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 1,3 & \varphi_1^0 \\ 0,2 & \end{array}\right)\right\} = \left\{\left(\begin{array}{c|c} 0,1,3 & 1 \\ 2 & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 1,3 & 0 \\ 0,2 & \end{array}\right)\right\} \overset{con}{\Rightarrow} \{1,3,7,2,6\}^1 \\ 1.2.\left\{\left(\begin{array}{c|c} 0,1,3 & \varphi_1^0 \\ 2 & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 1,3 & \varphi_1^1 \\ 0,2 & \end{array}\right)\right\} = \left\{\left(\begin{array}{c|c} 0,1,3 & 0 \\ 2 & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 1,3 & 1 \\ 0,2 & \end{array}\right)\right\} \overset{con}{\Rightarrow} \{0,2,6,3,7\}^1 \end{cases}.$$

Здесь ТМФ общей связывающей (частичной) функции $\varphi_1(x_2, x_3, x_4)$ и остаточной (полной) функции $\varphi(x_1, x_4, \varphi_1)$ для f_1 и f_2 (соответственно для $\varphi_{(1)}$ и $\varphi_{(2)}$) имеют вид:

$$1.1.\ \varphi_1 = \begin{cases} \{0,1,2,5\}^1 \\ \{3,6\}^0 \end{cases};\ \varphi_{(1)} = \{1,3,5,7\}^1;\ \varphi_{(2)} = \{1,2,3,6,7\}^1;$$

$$1.2.\ \varphi_1 = \begin{cases} \{3,6\}^1 \\ \{0,1,2,5\}^0 \end{cases};\ \varphi_{(1)} = \{0,2,4,6\}^1;\ \varphi_{(2)} = \{0,2,3,6,7\}^1.$$

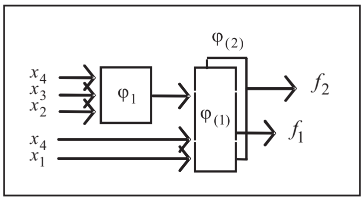

Рис. 9

Таким образом, заданная система (рис. 9) декомпозируется к виду

$$\Phi(X^p, \Phi_1(X^q)) = \Phi(x_1, x_4, \varphi_1(x_2, x_3, x_4)) =$$

$$= \begin{cases} \varphi_{(1)}(x_1, x_4, \varphi_1) \\ \varphi_{(2)}(x_1, x_4, \varphi_1) \end{cases}.$$

Полученный результат совпадает с результатом в работах [5, 6].

6. ВЕРИФИКАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Чтобы сравнить и проверить достоверность результатов декомпозиции, полученных в теоретико-множественном формате по методу p,q-разбиения конъюнктермов некоторой булевой функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_l,\ldots,x_n)$, с результатами, полученными другими авторами, использующими аналитический подход и выражения, необходимо выполнить несложные преобразования (процедуры) над двоичными минтермами ТМФ, например φ_1^1, связывающей функции $\varphi_1(x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_k})$ и ТМФ φ^1 остаточной функции $\varphi(\varphi_1,x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_l})$. Поскольку разрядность двоичных минтермов совершенных ТМФ φ_1^1 и ТМФ φ^1 всегда меньше, чем разрядность двоичных минтермов совершенной ТМФ Y^1, т.е. $k,l<n$, то прежде всего необходимо привести собственные кортежи функций φ_1 и φ, т.е. $\langle x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_k}\rangle$ и $\langle \varphi_1,x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_l}\rangle$, к кортежу заданной функции f, т.е. $\langle x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_l,\ldots,x_n\rangle$. В аналитическом смысле это означает искусственное внесение в кортеж функций φ_1 и φ (в качестве несущественных переменных этих функций) тех переменных, которые имеет кортеж функции f. В ТМФ это соответствует наращиванию разрядности двоичных минтермов φ_1^1 и φ^1 за счет внесения символов поглощения «–» и приведению их к виду n-разрядных минтермов совершенной ТМФ Y^1. Поскольку функция φ имеет переменную φ_1, которая может быть в прямом либо инверсном виде, то для φ_1 необходимо предварительно найти ТМФ $\varphi_1^0=\mathbf{E}_2^n\setminus\varphi_1^1$. Указанному преобразованию $\varphi_1(x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_k})\Rightarrow$ $\Rightarrow\begin{cases} f_{\varphi_1=1}(x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_k},-,\ldots,-_n) \\ f_{\varphi_1=0}(x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_k},-,\ldots,-_n)\end{cases}$ соответствует преобразование ТМФ $\varphi_1^1\Rightarrow\begin{cases}\phi_1^1\\ \phi_1^0\end{cases}$, где ϕ_1^1 и ϕ_1^0 — преобразованные совершенные ТМФ φ_1^1 и ТМФ φ_1^0, соответствующие истинному $f_{\varphi_1=1}$ и ложному $f_{\varphi_1=0}$ значениям связывающей функции φ_1 от n переменных.

В отличие от φ_1 преобразование остаточной функции φ к формату заданной функции f выполняется независимо от ее подфункций (относительно $\varphi_1=1$) $\varphi_{\varphi_1}(1,x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_l})$ и (относительно $\varphi_1=0$) $\varphi_{\overline{\varphi}_1}(0,x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_l})$, т.е. $\varphi(\varphi_1,x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_l})\Rightarrow$ $\Rightarrow\begin{cases}\varphi_{\varphi_1}(1,x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_l})\Rightarrow f_{\varphi_1}(-,x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_l},-,\ldots,-_n)\\ \varphi_{\overline{\varphi}_1}(0,x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_l})\Rightarrow f_{\overline{\varphi}_1}(-,x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_l},-,\ldots,-_n)\end{cases}$, что соответствует преобразованию ТМФ $\varphi^1\Rightarrow\begin{cases}\varphi_{\varphi_1}^1\Rightarrow\phi_{\varphi_1}^1\\ \varphi_{\overline{\varphi}_1}^1\Rightarrow\phi_{\overline{\varphi}_1}^1\end{cases}$, где $\phi_{\varphi_1^1}^1$ и $\phi_{\varphi_1^0}^1$ — преобразованные совершенные ТМФ подфункций f_{φ_1} и $f_{\overline{\varphi}_1}$ остаточной функции φ от n переменных.

После выполненных этих преобразований определяются пересечения множеств $\phi_1^1\cap\phi_{\varphi_1}^1$ и $\phi_1^0\cap\phi_{\overline{\varphi}_1}^1$, объединение которых образует искомую совершенную ТМФ Y^1 заданной функции f:

$$Y^1=\phi_1^1\cap\phi_{\varphi_1}^1\cup\phi_1^0\cap\phi_{\overline{\varphi}_1}^1. \tag{18}$$

Описанную выше теоретико-множественную методику проверки результатов функциональной декомпозиции на основе метода p,q-разбиения минтермов иллюстрирует следующий пример.

Пусть булева функция $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ задана совершенной ТМФ $Y^1=\{0,3,4,6,8,10,12,15\}^1$, в результате разделительной декомпозиции которой для маски $\{l_1 l_2 | l_3 l_4\}$ получены совершенные ТМФ $\varphi_1^1 = \{1,2\}^1$ связывающей функции $\varphi_1(x_1, x_2)$ и $\varphi^1 = \{0,3,4,6\}^1$ остаточной функции $\varphi(\varphi_1, x_3, x_4)$. Для функции φ_1 преобразование $\varphi_1(x_1, x_2) \Rightarrow \begin{cases} f_{\varphi_1=1}(x_1, x_2, -, -) \\ f_{\varphi_1=0}(x_1, x_2, -, -) \end{cases}$ соответствует преобразованию ТМФ $\begin{cases} \varphi_1^1 = \{01,10\}^1 \Rightarrow \phi_1^1 = \{(01--),(10--)\}^1 \\ \varphi_1^0 = \{00,11\}^0 \Rightarrow \phi_1^0 = \{(00--),(11--)\}^0 \end{cases}$, а для функции $\varphi(\varphi_1, x_3, x_4) \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} \varphi_{\varphi_1}(1, x_3, x_4) \Rightarrow f_{\varphi_1}(-,-, x_3, x_4) \\ \varphi_{\overline{\varphi}_1}(0, x_3, x_4) \Rightarrow f_{\overline{\varphi}_1}(-,-, x_3, x_4) \end{cases}$ соответствует преобразование ТМФ

$$\varphi^1 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{\varphi_1}^1 = \{00,10\}^1 \Rightarrow \phi_{\varphi_1}^1 = \{(--00),(--10)\} \\ \varphi_{\overline{\varphi}_1}^1 = \{00,11\}^1 \Rightarrow \phi_{\overline{\varphi}_1}^1 = \{(--00),(--11)\} \end{cases}.$$

Определив согласно (18) пересечения

$$\begin{cases} \phi_1^1 \cap \phi_{\varphi_1}^1 = \{(01--),(10--)\} \cap \{(--00),(--10)\} = \{0100,0110,1000,1010\} \\ \phi_1^0 \cap \phi_{\overline{\varphi}_1}^1 = \{(00--),(11--)\} \cap \{(--00),(--11)\} = \{0000,0011,1100,1111\} \end{cases}$$

и затем объединив их, получим искомую совершенную ТМФ $Y^1 = \{0,3,4,6,8,10,12,15\}^1$.

В случае неразделительной функциональной декомпозиции верификация полученного результата выполняется аналогичным образом. Проиллюстрируем это на рассмотренном в п. 2.1 примере 1 функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданной совершенной ТМФ $Y^1 = \{0,2,4,7,11,14\}^1$, например, для следующих совершенных ТМФ решения 1.2: $\varphi_1^1 = \{0,2,7\}^1$ связывающей функции $\varphi_1(x_1, x_3, x_4)$ и $\varphi^1 = \{3,4,5,6\}^1$ остаточной функции $\varphi(\varphi_1, x_2, x_3)$. Согласно описанной выше методике получим:

для φ_1: $\quad \varphi_1(x_1, x_3, x_4) \Rightarrow \begin{cases} f_{\varphi_1=1}(x_1, -, x_3, x_4) \\ f_{\varphi_1=0}(x_1, -, x_3, x_4) \end{cases},$

$$\begin{cases} \varphi_1^1 = \{000,010,111\}^1 \Rightarrow \phi_1^1 = \{(0-00),(0-10),(1-11)\}^1 \\ \varphi_1^0 = \{001,011,100,101,110\}^0 \Rightarrow \phi_1^0 = \{(0-01),(0-11),(1-00),(1-01),(1-10)\}^0 \end{cases};$$

для φ: $\varphi(\varphi_1, x_2, x_3) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{\varphi_1}(1, x_2, x_3) \Rightarrow f_{\varphi_1}(-, x_2, x_3, -) \\ \varphi_{\overline{\varphi}_1}(0, x_2, x_3) \Rightarrow f_{\overline{\varphi}_1}(-, x_2, x_3, -) \end{cases},$

$$\varphi^1 = \{011,100,101,110\}^1 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{\varphi_1}^1 = \{100,101,110\} \Rightarrow \phi_{\varphi_1}^1 = \{(-00-),(-01-),(-10-)\} \\ \varphi_{\overline{\varphi}_1}^1 = \{011\} \Rightarrow \phi_{\overline{\varphi}_1}^1 = \{(-11-)\} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \phi_1^1 \cap \phi_{\varphi_1}^1 = \{(0-00),(0-10),(1-11)\} \cap \{(-00-),(-01-),(-10-)\} = \{0000,0100,0010,1011\} \\ \phi_1^0 \cap \phi_{\overline{\varphi}_1}^1 = \{(0-01),(0-11),(1-00),(1-01),(1-10)\} \cap \{(-11-)\} = \{0111,1110\} \end{cases},$$

а после объединения (18) получим совершенную ТМФ $Y^1 = \{0,2,4,7,11,14\}^1$ заданной функции f.

ВЫВОДЫ

На основании изложенных теоретических положений теоретико-множественного подхода к неразделительной декомпозиции булевых функций разных форм задания, в том числе их систем, и сравнительного анализа приведенных (и не приведенных в настоящей статье) многочисленных примеров из публикаций разных авторов можно заключить, что предложенный метод p,q-разбиения конъюнктермов является эффективным оптимизационным средством логического синтеза комбинационных схем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Curtis H.A. A new approach to the design of switching circuits. — N.J.; Princeton; Toronto: D. Van Nostrand Company, Inc., 1962. — 635 p.
2. Фридман А., Менон П. Теория и проектирование переключательных схем. — М.: Мир, 1978. — 580 с.
3. Mishchenko A., Steinbach B., Perkowski M. An algorithm for bi-decomposition of logic functions / Proc. of DAC 2001, June 18–22, Las Vegas. — P. 103–108.
4. Scholl C. Functional decomposition with application to FPGA synthesis. — Boston; Dordrecht; London: Kluwer Academic Publishers, 2001. — 263 p.
5. Sasao T. A new expansion of symmetric functions and their application to non-disjoint functional decompositions for LUT type FPGAs / Proc. of International Workshop on Logic Synthesis, June 2001, Lake Tahoe, California, May, 2000. — P. 105–110.
6. Sasao T., Butler J.T. On bi-decompositions of logic functions / Proc. ACM/IEEE Internation Workshop on Logic Synthesis, Takoe City, California, May, 1997. — P. 264–300.
7. Rawski M., Nowicka M., Jóźwiak L., Luba T. Non-disjoint decomposition of Boolean functions and its application in FPGA-oriented technology mapping // Proc. 23th EUROMicro Conf.'97, Sept. 1–4., 1997. — Budapest (Hungary), 1997. — P. 24–30.
8. Nowicka M., Rawski M., Łuba T. Non-disjoint decomposition strategy for FPGA-based technology mapping // Proc. PDS'98, 24–25 Feb., 1998. — Gliwice (Poland), 1998. — P. 159–166.
9. Yamashita S., Sawada H., Nagoya A. New methods to find optimal non-disjoint bi-decompositions / Proc. ASP-DAC, Feb., 1998. — P. 59–68.
10. Sawada H., Yamashita S., Nagoya A. Efficient methods for a simple disjoint decomposition and a non-disjoint bi-decomposition / PDF {sawada, ger, nagoya}@cslab.kecl.ntt.co.jp
11. Шестаков Е.А. Декомпозиция систем частичных булевых функций методом тождественных отображений // Логическое проектирование. — 1997. — Вып. 2. — С. 115–124.
12. Мищенко В.А., Аспидов А.И., Витер В.В. и др. Логическое проектирование БИС / Под ред. В.А. Мищенко. — М.: Радио и связь, 1984. — 312 с.
13. Dubrova E. A polynomial time algorithm for non-disjoint decomposition of multi-valued functions / Proc. 34th International Symposium on Multi-Valued Logic (ISMVL'04), 2004. — P. 309–314.
14. Zakrevskij A. Decomposition of boolean functions — recognizing a good solution by traces // Information Theories & Applications. — 2007. — **14**. — P. 359–365.
15. Matsunaga Yusuke. On enumerating non-disjunctive decompositions of logic functions // IEIC Technical Report (Institute of Electronics, Information and Communication Engineers). — 2000. — **100**, N 36. — P. 33–39.
16. Рыцар Б.Е. Новый подход к декомпозиции булевых функций методом q-разбиений. 1. Разделительная декомпозиция полных и частичных функций // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 5. — С. 38–62.
17. Рыцар Б.Е. Новый подход к декомпозиции булевых функций методом q-разбиений. 2. Повторная декомпозиция // Там же. — 2002. — № 1. — С. 54–63.
18. Рыцар Б.Е. Новый подход к декомпозиции булевых функций методом q-разбиений. 3. Совместная декомпозиция системы функций // Там же. — 2007. — № 2. — С. 39–58.
19. Кметь А.Б., Рицар Б.Є. До класифікації декомпозицій логікових функцій // Управляющие системы и машины. — 2003. — № 6. — С. 21–32.
20. Рицар Б.Є. Теоретико-множинний метод ортогоналізації кон'юнктермів булових функцій // Радиоэлектроника и информатика. — 2005. — № 3. — С. 125–127.

Поступила 22.02.2008