УДК 519.237.5

А.С. КОРХИН

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПАРАМЕТРЫ

Ключевые слова: *линейная регрессия, параметры, ограничения-неравенства, оценивание, матрица средних квадратов ошибок, дисперсия шума.*

В настоящей статье результаты, полученные в [1, 2], применяются к регрессии, имеющей регрессоры с трендами. Рассматриваемая регрессия имеет вид $y_t = x_t' \alpha^0 + \varepsilon_t$, $t = \overline{1, T}$, где $y_t \in \Re^1$, $x_t \in \Re^n$, $\alpha^0 \in \Re^n$, $\varepsilon_t \in \Re^1$ — шум, символ «$'$» означает транспонирование.

Оценим параметр α^0, решив задачу

$$S_T(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (y_t - x_t' \alpha)^2 \to \min, \ g_i(\alpha) \le 0, \ i \in I, \tag{1}$$

где величины x_t, y_t, $t = \overline{1, T}$, и функции $g_i(\alpha)$, $i \in I$, известны.

Ограничения в (1) определяются из содержательных соображений и достаточно часто могут быть сформулированы при решении практических задач. Истинное значение вектора параметров регрессии α^0 может удовлетворять как ограничениям-равенствам, так и неравенствам:

$$g_i(\alpha^0) = 0, i \in I_1^0, \ g_i(\alpha^0) < 0, \ i \in I_2^0, \ I_1^0 \cup I_2^0 = I = \{1, \ldots, m\}. \tag{2}$$

Обозначим $m=|I|$, $m_i=|I_i^0|$, $i=1,2$, где $|M|$ — число элементов множества M. Относительно регрессора, ограничений и шума примем следующие допущения.

Допущение 1. Случайные величины ε_t центрированы и независимы. Они не зависят от x_t, $t=1,2,\ldots$, имеют одинаковые дисперсии σ^2 и распределения $\Phi_t(u)$, $t=1,2,\ldots$, причем $\sup\limits_{t=1,2,\ldots}\int\limits_{\|u\|>c} u^2 d\Phi_t(u)\to 0$ при $c\to\infty$.

Обозначим: $\mathrm{P}_T=\sum\limits_{t=1}^{T} x_t x_t'$, $E_T=\mathrm{diag}(\sqrt{\rho_{11}^T},\sqrt{\rho_{22}^T},\ldots,\sqrt{\rho_{nn}^T})$, где ρ_{ii}^T — элемент на главной диагонали P_T.

Допущение 2. Матрица P_T не вырождена для всех T. Матрица $R_T=E_T^{-1}\mathrm{P}_T E_T^{-1}\to$ $\to R$ при $T\to\infty$, где R — положительно-определенная матрица.

Допущение 3. Ограничения $g_i(\alpha)$ — выпуклые, дважды непрерывно дифференцируемые функции. Матрица G, строками которой являются строки $\nabla g_i'(\alpha^0)$, $i\in I$, имеет полный ранг.

Допущение 4. При $T\to\infty$ $\rho_{ii}^T\to\infty, x_{T+1,i}^2/\rho_{ii}^T\to 0$, $i=\overline{1,n}$.

Допущение 5. Найдется такая диагональная матрица $\overline{E}_T$ $(m\times m)$ с положительными элементами на главной диагонали $\overline{e}_{Ti}$, $i=\overline{1,m}$, для которой существует предел матрицы $\widetilde{G}_T=\overline{E}_T G E_T^{-1}$: $\lim\limits_{T\to\infty}\widetilde{G}_T=\widetilde{G}$, где G — матрица, составленная из строк $\nabla g_i'(\alpha^0)$, $i=\overline{1,n}$. При этом: 1) матрица $\widetilde{G}_1=\lim\limits_{T\to\infty}\widetilde{G}_{T1}$ имеет полный ранг, где $\widetilde{G}_{T1}=\overline{E}_{T1}G_1E_T^{-1}$, $\overline{E}_{T1}=\mathrm{diag}(\overline{e}_{Ti})$, $i\in I_1^0$, G_1 — матрица, составленная из строк $\nabla g_i'(\alpha^0)$, $i\in I_1^0$; 2) существует конечный предел $\lim\limits_{T\to\infty}\overline{e}_{Ti}e_{Tj}^{-1}<\infty$, $i\in I$, $j=\overline{1,n}$, где $e_{Tj}=\sqrt{\rho_{jj}^T}$.

Допущение 5, в частности, справедливо, когда регрессоры ограничены. Тогда $\overline{E}_T=\sqrt{T}J_m$, $E_T=\sqrt{T}J_n$.

Предполагается, что независимые переменные — неслучайные.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОЦЕНКИ ВЕКТОРА ПАРАМЕТРОВ РЕГРЕССИИ

Задача (1) представляет собой задачу выпуклого программирования и может быть решена методом [3]. Если ограничения в (1) линейные, что является важным для практики случаем, то (1) будет задачей квадратичного программирования. Для ее решения подходят методы этого класса задач. В частности, можно использовать метод [4, гл. 23], специально приспособленный для решения задач вида (1) с линейными ограничениями.

Рассмотрим случай линейных ограничений более подробно. Для него задача оценивания после преобразования будет иметь вид

$$(1/2)\alpha'\mathrm{P}_T\alpha-\alpha' X_T' Y_T\to\min,\quad g_i(\alpha)=g_i'\alpha-b_i\le 0,\ i\in I, \tag{3}$$

где X_T — матрица $T\times n$, t-й строкой которой является x_t'; $Y_T=[y_1,y_2,\ldots,y_T]'$; $g_i\in\Re^n$, $b_i\in\Re^1$, $i\in I$, — известные величины.

Обычно в регрессии имеется свободный член, ограничение на который часто отсутствует. Покажем, что в данном случае, для которого $x_t=[1\ \widetilde{x}_t']'$, $\widetilde{x}_t\in\Re^{n-1}$, решение задачи оценивания можно упростить, уменьшив количество переменных в ней на единицу. Имеет место следующий результат.

Теорема 1. Если выполняется допущение 2, на свободный член α_1^0 не накладываются ограничения, то решение задачи (3) — оценка α_T параметра регрессии α^0 — имеет вид $\alpha_T = [\alpha_{T1} \ \ \widetilde{\alpha}_T]'$, где оценка свободного члена $\alpha_{T1} = \bar{y}_T - \widetilde{\alpha}'_T \bar{\bar{x}}_T$, $\widetilde{\alpha}_T \in \mathfrak{R}^{n-1}$ — решение задачи

$$(1/2)\, \widetilde{\alpha}' \rho_T \widetilde{\alpha} - \widetilde{\alpha}' d_T \to \min, \qquad A\widetilde{\alpha} \le b. \tag{4}$$

Здесь $\widetilde{\alpha} \in \mathfrak{R}^{n-1}$, $\widetilde{\mathrm{P}}_T = \sum_{t=1}^{T} (\widetilde{x}_t - \bar{\bar{x}}_T)(\widetilde{x}_t - \bar{\bar{x}}_T)'$, $d_T = \sum_{t=1}^{T} (\widetilde{x}_t - \bar{\bar{x}}_T)(y_t - \bar{y}_T)$, $\bar{\bar{x}}_T = \sum_{t=1}^{T} \widetilde{x}_t / T$, $\bar{y}_T = \sum_{t=1}^{T} y_t / T$, $b \in \mathfrak{R}^m$ — вектор, компоненты которого b_i, $i \in I$, A — матрица размерности $m \times (n-1)$, составленная из последних $n-1$ столбцов матрицы G, строками которой являются $\nabla g'_i(\alpha^0) = g'$, $i = \overline{1, m}$.

Доказательство. Составим функцию Лагранжа для задачи минимизации (3): $L(\alpha, \lambda) = (1/2)\alpha' \mathrm{P}_T \alpha - \alpha' X'_T Y_T + \lambda' (G\alpha - b)$, где λ — m-мерный вектор множителей Лагранжа.

Согласно допущению 2 необходимые и достаточные условия минимума задачи (3) имеют вид

$$\nabla_\alpha L(\alpha, \lambda) = \mathrm{P}_T \alpha - X'_T Y_T + G' \lambda = O_n, \tag{5}$$

$$\lambda_i (g'_i \alpha - b_i) = 0, \quad \lambda_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{6}$$

где $\nabla_\alpha L(\alpha, \lambda)$ — градиент функции Лагранжа по вектору α, O_n — нулевой n-мерный вектор, λ_i — i-я компонента λ.

Поскольку на свободный член α_1^0 не накладываются ограничения, матрица G и ее i-я строка g'_i имеют вид

$$G = [O_m \ \vdots \ A], \qquad g'_i = [0 \ \ A_i], \tag{7}$$

где A_i — i-я строка матрицы A. Тогда

$$G' \lambda = \begin{bmatrix} O'_m \\ A' \lambda \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Обратимся к условию (5). Оно представляет собой запись в векторном виде системы из n уравнения. Рассмотрим первое из этих уравнений, которое с учетом выражения (8) имеет вид

$$\frac{\partial L(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha_1} = \alpha_1 T + \alpha_2 \sum_{t=1}^{T} x_{t1} + \alpha_2 \sum_{t=1}^{T} x_{t2} + \cdots + \alpha_n \sum_{t=1}^{T} x_{t,n-1} - \sum_{t=1}^{T} y_t = 0.$$

Разделив обе части уравнения на число наблюдений T, получим

$$\alpha_1 + \alpha_2 \bar{x}_{T1} + \alpha_3 \bar{x}_{T2} + \cdots + \alpha_n \bar{x}_{T,n-1} - \bar{y}_T = 0, \tag{9}$$

где $\bar{x}_{Ti} = \sum_{t=1}^{T} x_{ti} / T$, $i = \overline{1, n-1}$ ($\bar{x}_{Ti}$ — i-я компонента $\bar{\bar{x}}_T$).

Уравнению (9) должны удовлетворять искомые оценки параметров, поэтому из него следует

$$\alpha_{T1} = \bar{y}_T - \alpha_{T2}\bar{x}_{T1} - \alpha_{T3}\bar{x}_{T2} - \cdots - \alpha_{Tn}\bar{x}_{T,n-1} = \bar{y}_T - \widetilde{\alpha}'_T \bar{\bar{x}}_T.$$

Таким образом, доказана формула вычисления оценки свободного члена.

Рассмотрим i-е уравнение $(i=\overline{2,n})$ в системе уравнений (5)

$$\frac{\partial L(\alpha,\lambda)}{\partial \alpha_i}=\alpha_1\sum_{t=1}^{T}x_{ti}+\alpha_2\sum_{t=1}^{T}x_{ti}x_{t1}+\alpha_3\sum_{t=1}^{T}x_{ti}x_{t2}+\dots+\alpha_n\sum_{t=1}^{T}x_{ti}x_{t,n-1}-\sum_{t=1}^{T}x_{ti}y_t+$$
$$+a_i\lambda=0,\ \ i=\overline{2,n},$$

где a_i — i-я строка матрицы A'.

Подставив в него α_1 из (9), получим

$$\sum_{j=2}^{n}\alpha_j\left[-\bar{x}_{T,\,j-1}\sum_{t=1}^{T}x_{ti}+\sum_{t=1}^{T}x_{ti}x_{t,\,j-1}\right]-\left[-\bar{y}_T\sum_{t=1}^{T}x_{ti}+\sum_{t=1}^{T}x_{ti}y_t\right]+a_i\lambda=0. \qquad (10)$$

После преобразований имеем

$$-\bar{x}_{T,\,j-1}\sum_{t=1}^{T}x_{ti}+\sum_{t=1}^{T}x_{ti}x_{t,\,j-1}=\sum_{t=1}^{T}(x_{ti}-\bar{x}_{Ti})(x_{t,\,j-1}-\bar{x}_{T,\,j-1}),$$

$$-\bar{y}_T\sum_{t=1}^{T}x_{ti}+\sum_{t=1}^{T}x_{ti}y_t=\sum_{t=1}^{T}(x_{ti}-\bar{x}_{Ti})(y_t-\bar{y}_T).$$

Подставив последние два выражения в (10), имеем

$$\sum_{j=2}^{n}\alpha_j\sum_{t=1}^{T}(x_{ti}-\bar{x}_{Ti})(x_{t,\,j-1}-\bar{x}_{T,\,j-1})-\sum_{t=1}^{T}(x_{ti}-\bar{x}_{Ti})(y_t-\bar{y}_T)+a_i\lambda=0,\ \ i=\overline{2,n}.$$

Полученную систему уравнений представим в векторном виде с учетом обозначений в задаче (4):

$$\rho_T\tilde{\alpha}-d_T+A'\lambda=O_n. \qquad (11)$$

Рассмотрим условие (6). Учитывая структуру матрицы G (см. (7)), получаем

$$\lambda_i(A_i\tilde{\alpha}-b_i)=0,\ \ \lambda_i\ge 0,\ \ i=\overline{1,m}. \qquad (12)$$

В связи с тем что уравнения (5), (6) имеют единственное решение, таким же свойством обладают и полученные из них уравнения (11) и (12). Тогда эти уравнения являются необходимыми и достаточными условиями минимума задачи (4), которым удовлетворяет вектор $\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}_T$. Следовательно, подвектор $\tilde{\alpha}_T$ вектора оценки параметра регрессии α_T — решение (4).

Теорема доказана.

Как известно [5, с. 24], численное решение задачи (4) является более точным, чем полученное в результате численного решения задачи (3) (если обе задачи без ограничений). С ограничениями точность численного решения (4) также будет выше, чем у (3), так как основной источник погрешности — обращение матриц, имеющихся в функциях цели указанных задач.

На основании теоремы 1 можно свести оценивание параметра регрессии к решению задачи квадратичного программирования, матрица функции цели которой имеет элементы, не превышающие по модулю единицы. Для этого положим $\tilde{\beta}=\mathrm{B}_T\tilde{\alpha}$, где $\mathrm{B}_T=\sigma_y^{-1}\sigma_x$, $\sigma_x=\mathrm{diag}(\sigma_{xi})$, $i=\overline{1,n}$, $\sigma_y=\sqrt{T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2}$, $\sigma_{xi}=\sqrt{T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(x_{ti}-\bar{x}_i)^2}$, $i=\overline{1,n}$. Обозначив $\rho_{T\beta}=\sigma_x^{-1}\rho_T\sigma_x^{-1}$, $d_{T\beta}=(\sigma_y\sigma_x)^{-1}d_T$, $A_\beta=A\mathrm{B}_T^{-1}$, получим из (4)

$$(1/2)\,\beta'\rho_{T\beta}\beta-\beta' d_{T\beta}\to\min,\ \ A_\beta\beta\le b.$$

Достоинством решения такой задачи оценивания (обозначим его $\beta=\beta_T$) является то, что β_T не зависит от масштаба измерения переменных. Компоненты β_T — стандартизированные оценки последних $n-1$ компонент вектора α^0. Назовем их бета-коэффициентами аналогично термину, применяемому в анализе регрессий без ограничений. Такие коэффициенты удобно использовать для оценки и сопоставления силы влияния независимых переменных на зависимую переменную.

СВОЙСТВА ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА РЕГРЕССИИ

Сначала докажем состоятельность решения задачи (1).

Теорема 2. Пусть выполняются допущения 1–5, тогда решение задачи (1) α_T является состоятельной оценкой α^0.

Доказательство. Задача (1) после преобразования примет вид

$$(1/2)\alpha' \mathrm{P}_T\alpha-\alpha' X_T' Y_T \to \min,\quad g_i(\alpha)\le 0,\ i\in I, \tag{13}$$

где обозначения в выражении для функции цели такие же, как в (3).

Согласно допущению 2 матрица P_T положительно-определена. Поэтому всегда найдется такая невырожденная матрица H_T, что $\mathrm{P}_T=H_T' H_T$. Положим $\beta=H_T\alpha$. С учетом этих преобразований задача квадратичного программирования (13) преобразуется к виду

$$(1/2)\beta'\beta-\beta'(H_T^{-1})' X_T' Y_T \to \min,\ h_i(\beta)\le 0, i\in I, \tag{14}$$

где $h_i(\beta)=g_i(H_T^{-1}\beta)$. Нетрудно убедиться, что $h_i(\beta)$ — выпуклая функция.

Положим $\Omega_\beta=\{\beta\colon h_i(\beta)\le 0,\ \beta\in\mathfrak{R}^n\}$. Множество Ω_β выпуклое в силу выпуклости функций $h_i(\beta), i\in I$. Преобразуем задачу (14) к виду

$$||\beta-\beta_T^*||^2\to\min,\ \beta\in\Omega_\beta, \tag{15}$$

где $\beta_T^*=(H_T^{-1})' X_T' Y_T$ — решение задачи (14) без учета ограничения $\beta\in\Omega_\beta$.

Из задачи (15) следует, что ее решение β_T является проекцией β_T^* на Ω_β. Эта проекция единственная в силу выпуклости Ω_β. Известно [6, с. 116], что расстояние от произвольной точки A, не принадлежащей некоторому выпуклому множеству, до проекции A на это множество не превышает расстояние от A до произвольной точки, принадлежащей указанному множеству. Поэтому имеем

$$||\beta_T-\beta^0||^2\le||\beta_T^*-\beta^0||^2, \tag{16}$$

где $\beta^0=H_T\alpha^0\in\Omega_\beta$, так как с учетом условия (2) получаем

$$h_i(\beta^0)=h_i(H_T\alpha^0)=g_i(\alpha^0)\le 0,\ i\in I.$$

Имеем из (16) $||H_T(\alpha_T-\alpha^0)||^2\le||H_T(\alpha_T^*-\alpha^0)||^2$, откуда следует $(\alpha_T-\alpha^0)'E_T R_T E_T(\alpha_T-\alpha^0)\le(\alpha_T^*-\alpha^0)'E_T R_T E_T(\alpha_T^*-\alpha^0)$. Тогда

$$\mu_{\min}(R_T)||E_T(\alpha_T-\alpha^0)||^2\le\mu_{\max}(R_T)||U_T^*||^2, \tag{17}$$

где $\mu_{\max}(R_T)$ и $\mu_{\min}(R_T)$ — соответственно максимальное и минимальное собственные значения R_T, $U_T^*=E_T(\alpha_T^*-\alpha^0)$.

Обозначим $e_{T,\min}^2=\min\limits_{i=\overline{1,n}} e_{Ti}^2$, где $e_{Ti}^2=\rho_{ii}^T$. Тогда $||E_T(\alpha_T-\alpha^0)||^2\ge$ $\ge e_{T,\min}^2||\alpha_T-\alpha^0||^2$. С учетом этого неравенства имеем из (17)

$$||\alpha_T-\alpha^0||^2\le\left(\frac{\mu_{\max}(R_T)}{e_{T,\min}^2\mu_{\min}(R_T)}\right)||U_T^*||^2. \tag{18}$$

При соблюдении допущений 1, 2, 4 согласно [7, с. 35] при $T \to \infty$ распределение U_T^* сходится к распределению величины $U^* \sim N(O_n, \sigma^2 R^{-1})$. Поэтому на основании теоремы XII [8, с.119] имеем $||U_T^*||^2 \overset{p}{\Rightarrow} ||U^*||^2$, где символ $\overset{p}{\Rightarrow}$ означает сходимость по распределению. Согласно допущению 2 собственные значения матрицы R_T при $T \to \infty$ сходятся к не равным нулю величинам, и, кроме того, в соответствии с допущением 4 при $T \to \infty$ $e_{T,\min}^2 \to \infty$. Поэтому первый сомножитель в правой части неравенства (18) стремится к нулю. Тогда по теореме X (a) [8, с. 118] правая часть неравенства (18) сходится по вероятности к нулю. Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие 1. Если выполняются допущения 1–5, то решение задачи (3) с линейными ограничениями α_T сходится по вероятности к α^0.

Следствие 2. Если выполняются допущения 1–5, причем $\overline{E}_T = \sqrt{T} J_m$, $E_T = \sqrt{T} J_n$, решение задачи (3) с линейными ограничениями α_T сходится в среднем квадратическом к α^0.

Доказательство. При соблюдении условия следствия 2 α_T^* сходится в среднем квадратическом к α^0 [9, с. 43], $\mu_{\max}(R_T) \to \mu_{\max}(R)$, $\mu_{\min}(R_T) \to \mu_{\min}(R) > 0$ при $T \to \infty$. Отсюда непосредственно вытекает сформулированное утверждение.

Определим предельный закон распределения оценки параметра линейной регрессии. Схема доказательства будет подобна описанной в работе [1]. Однако оно будет отличаться от доказательства, приведенного в этой статье, в связи с наличием тренда регрессоров. Приведем три вспомогательных результата.

Лемма 1. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда для заданного числа $\delta > 0$ найдутся такие числа $\varepsilon > 0$ и $T_0 > 0$, что

$$P\{||U_T|| \geq \varepsilon\} < \delta,\ T > T_0,\ U_T = E_T(\alpha_T - \alpha^0). \tag{19}$$

Доказательство. Преобразовав неравенство (17), получим

$$||U_T||^2 \leq \mu_T ||U_T^*||^2, \tag{20}$$

где $\mu_T = \mu_{\max}(R_T) / \mu_{\min}(R_T)$. При $T \to \infty$ согласно допущению 2 $\mu_T \to \mu \neq 0$, а при доказательстве теоремы 2 показано, что $||U_T^*||^2 \overset{p}{\Rightarrow} ||U^*||^2$. Тогда $\mu_T ||U_T^*||^2 \overset{p}{\Rightarrow} \mu ||U^*||^2$. Поэтому с учетом неравенства (20) для заданного числа $\delta > 0$ найдутся такие числа $\varepsilon > 0$ и $T_0 > 0$, для которых будет справедлива цепочка неравенств $\delta > P\{\mu_T ||U_T^*||^2 \geq \varepsilon\} > P\{||U_T||^2 \geq \varepsilon\}$, $T > T_0$. Лемма доказана.

Лемма 2. Задача квадратичного программирования

$$(1/2)\alpha' R\alpha - Q'\alpha \to \min,\ G\alpha \leq b \tag{21}$$

имеет решение $\alpha(G, Q)$, непрерывное по G и Q. Здесь $\alpha, Q \in \Re^n$, R — положительно-определенная матрица порядка n, G — матрица размерности $m \times n$, $b \in \Re^m$.

Доказательство. Как показано при доказательстве теоремы 2, в силу положительной определенности матрицы R справедливо представление $R = H'H$, где H — невырожденная матрица. Положим $\beta = H\alpha$, $P = (H^{-1})'Q$, $S = GH^{-1}$. С учетом этих преобразований задача квадратичного программирования (21) преобразуется к виду

$$\min\{(1/2)\beta'\beta - P'\beta \mid S\beta \leq b\}. \tag{22}$$

Обозначим ее решение $\beta(S, P)$. Для произвольных Q_1 и $Q_2 = Q_1 + \Delta Q$, G_1 и $G_2 = G_1 + \Delta G$ имеем $P_2 = P_1 + \Delta P$, $S_2 = S_1 + \Delta S$, где $P_i = H^{-1} Q_i$, $S_i = H^{-1} G_i$, $i = 1, 2$. Отсюда

$$\Delta Q = H\Delta P, \Delta G = H\Delta S. \tag{23}$$

Учитывая, что $\alpha(G_i, Q_i) = H^{-1}\beta(S_i, P_i)$, $i = 1, 2$, получим

$$\Delta\alpha = H^{-1}\Delta\beta, \tag{24}$$

где $\Delta\alpha = \alpha(G_2, Q_2) - \alpha(G_1, Q_1)$, $\Delta\beta = \beta(S_2, P_2) - \beta(S_1, P_1)$.

Пусть $\Delta Q \to O_n$, $\Delta G \to O_{mn}$, что в силу невырожденности H влечет из (23) $\Delta S \to O_{mn}$, $\Delta P \to O_n$. Тогда согласно лемме в [10] $\Delta\beta \to O_n$. Отсюда и из (24) следует $\Delta\alpha \to O_n$.

Лемма доказана.

Для получения дальнейших результатов понадобится разложение левой части i-го ограничения $g_i(\alpha)$ в окрестности $\alpha = \alpha^0$ в ряд Тейлора:

$$g_i(\alpha) = g_i(\alpha^0) + \nabla g_i'(\alpha^0) + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^0)' g_{i2}(\alpha^0 + \theta_1\Delta\alpha). \tag{25}$$

Здесь $\theta_1 \in [0, 1]$; $\Delta\alpha = \alpha - \alpha^0$; $g_{i2}(\alpha)$ — матрица Гессе порядка n, $\partial^2 g_i(\alpha) / \partial\alpha_j \partial\alpha_k$, $j, k = \overline{1, n}$, — ее (j, k)-й элемент.

Лемма 3. Пусть выполняются допущения 2–5. Тогда решением задачи минимизации по $X = E_T(\alpha - \alpha^0) \in \Re^n$

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_T(X) = \frac{1}{2} X' R_T X - Q_T' X \to \min, \\
&\beta_i(X) = (\bar{e}_{Ti} \nabla g_i'(\alpha^0) E_T^{-1}) X + l_i(X) \le O_{m_1},\ i \in I_1^0, \\
&\beta_i(X) = \bar{e}_{Ti} g_i(\alpha^0) + (\bar{e}_{Ti} \nabla g_i'(\alpha^0) E_T^{-1}) X + l_i(X) \le O_{m_2}, i \in I_2^0,
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

является $U_T = E_T(\alpha_T - \alpha^0)$. В (26) $Q_T = E_T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t x_t$,

$$\beta_i(X) = \bar{e}_{Ti} g_i(E_T^{-1} X + \alpha^0),\ i \in I, \tag{27}$$

$$l_i(X) = \frac{1}{2} X' (\bar{e}_{Ti} E_T^{-1} g_{i2}(\alpha^0 + \theta_1 E_T^{-1} X) E_T^{-1}) X,\ \ i \in I, \tag{28}$$

где функция g_{i2} и величина θ_1 определены в (25).

Доказательство. Задача (26) имеет строго выпуклую функцию цели (согласно допущению 2) и выпуклую допустимую область, так как ее ограничения — выпуклые функции. Поэтому решение (26), обозначим его U_T^*, единственное. Оно удовлетворяет необходимым и достаточным условиям минимума

$$R_T U_T^* - Q_T + \sum_{i=1}^{m} \nabla\beta_i(U_T^*) v_{Ti}^* = O_n,\ \ v_{Ti}^* \beta_i(U_T^*) = 0,\ \ v_{Ti}^* \ge 0,\ \ i \in I, \tag{29}$$

где v_{Ti}^* — множитель Лагранжа, соответствующий i-му ограничению.

Задача (1) также является задачей выпуклого программирования, необходимым и достаточным условиям минимума которой удовлетворяет α_T:

$$\mathrm{P}_T \alpha_T - \alpha_T' X_T' Y_T + \sum_{i=1}^{m} \nabla g_i(\alpha_T) \lambda_{Ti} = O_n, \lambda_{Ti} g_i(\alpha_T) = 0,\ \lambda_{Ti} \ge 0,\ i \in I. \tag{30}$$

Здесь λ_{Ti}, $i \in I$, — множители Лагранжа для задачи (1).

После ряда преобразований первого равенства в (30) и умножения его слева на E_T^{-1} получим из (30), положив $v_{Ti} = \bar{e}_{Ti}^{-1} \lambda_{Ti}, i \in I$,

$$R_T U_T - Q_T + \sum_{i=1}^{m} \bar{e}_{Ti} E_T^{-1} \nabla g_i(\alpha_T) v_{Ti} = O_n,\ v_{Ti} \bar{e}_{Ti} g_i(\alpha_T) = 0,\ v_{Ti} \ge 0,\ i \in I. \tag{31}$$

Из сравнения выражений (29) и (31) получаем, что условие (29) выполняется при $U_T^* = U_T$, $v_{Ti}^* = v_{Ti} \ge 0$, $i \in I$, так как согласно (27) $\beta_i(U_T) = \bar{e}_{Ti} g_i(\alpha_T)$, $\nabla\beta_i(U_T) = \bar{e}_{Ti} E_T^{-1} \nabla g_i(\alpha_T)$, $i \in I$. Из того, что условия (29) определяют единственное решение (26), следует справедливость леммы.

Перейдем к определению предела для U_T.

Теорема 3. Если выполняются допущения 1–5, то случайная величина $U_T = E_T(\alpha_T - \alpha^0)$ при $T \to \infty$ сходится по распределению к случайной величине U — решению задачи

$$\varphi_T(X) = (1/2)X'RX - Q'X \to \min,\ \tilde{G}_1 X \le O_{m_1}, \tag{32}$$

где матрица $\tilde{G}_1$ $(m_1 \times n)$ состоит из строк матрицы $\tilde{G}$, индексы которых $i \in I_1^0$.

Доказательство. Рассмотрим задачу квадратичного программирования

$$\varphi_T^0(X) = (1/2)X'RX - Q_T'X \to \min,\ \tilde{G}_{T1} X \le O_{m_1}. \tag{33}$$

Обозначим ее решение U_T^0. По теореме 2.6.1 [7, с. 35] для вектора Q_T имеем

$$Q_T \overset{p}{\Rightarrow} Q \sim N(O_n, \sigma^2 R),\ T \to \infty. \tag{34}$$

Согласно лемме 2 U_T^0 — непрерывная функция Q_T и $\tilde{G}_{T1}$: $U_T^0 = f(Q_T, \tilde{G}_{T1})$. Отсюда и из (34), учитывая, что согласно допущению 5 $\lim\limits_{T\to\infty} \tilde{G}_{T1} = \tilde{G}_1$, имеем $f(Q_T, \tilde{G}_{T1}) \overset{p}{\Rightarrow} f(Q, \tilde{G}_1)$. Согласно (32) $U = f(Q, \tilde{G}_1)$. Таким образом, при $T \to \infty$

$$U_T^0 \overset{p}{\Rightarrow} U. \tag{35}$$

Обозначим допустимые области: задачи (26) — $O_T = \{X : \beta_i(X) \le 0,\ i \in I\}$, задачи (33) — $O = \{X : (\bar{e}_{Ti} \nabla g_i'(\alpha^0) E_T^{-1}) X \le 0,\ i \in I_1^0\}$. Функции $g_i(\alpha), i \in I$, выпуклые (допущение 3). Тогда согласно (27) O_T — выпуклое множество. Из выпуклости ограничений также следует, что $l_i(X) \ge 0$, $X \in \mathfrak{R}^n$. Поэтому, так как $\beta_i(U_T) \le 0$, $i \in I_1^0$, из первого ограничения в (26) следует $(\bar{e}_{Ti} \nabla g_i'(\alpha^0) E_T^{-1}) U_T \le 0$, $i \in I_1^0$. Отсюда $U_T \in O$.

В соответствии с допущением 2 $\varphi_T^0(X)$ — сильно выпуклая функция по X. Для нее будет справедливо свойство [11, с. 54]

$$||U_T - U_T^0||^2 \le \frac{2}{\mu}[\varphi_T^0(U_T) - \varphi_T^0(U_T^0)],\ \mu > 0, \tag{36}$$

поскольку $U_T \in O$, т.е. U_T удовлетворяет ограничениям задачи (33) (допустимая область этой задачи включает в себя допустимую область задачи (26)). Согласно (36) имеем для произвольного $\varepsilon > 0$

$$P\{||U_T - U_T^0||^2 < \varepsilon^2\} \ge P\left\{\frac{2}{\mu}[\varphi_T^0(U_T) - \varphi_T^0(U_T^0)] < \varepsilon^2\right\} \ge$$

$$\ge P\{|\varphi_T^0(U_T) - \varphi_T(U_T)| < (\varepsilon_1/2)\} + P\{[\varphi_T(U_T) - \varphi_T^0(U_T^0)] < (\varepsilon_1/2)\} - 1, \tag{37}$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon^2 \mu / 2$.

Для дальнейших преобразований правой части (37) выведем некоторые соотношения, связывающие функции цели в (26) и (33). Имеем для произвольного $\varepsilon_2 > 0$

$$P\{|\varphi_T^0(X) - \varphi_T(X)| < \varepsilon_2\} = P\{|1/2X'(R - R_T)X| < \varepsilon_2\}. \tag{38}$$

Подставив $X = U_T$ в (38), получим

$$P\{|\varphi_T^0(U_T) - \varphi_T(U_T)| < \varepsilon_2\} \ge 1 - P\{|U_T| \ge \sqrt{a}\} - P\{|R - R_T| \ge 2\varepsilon_2 / a\}, \qquad (39)$$

где a — некоторое положительное число. Согласно допущению 2 третье слагаемое в правой части (39) для достаточно большого T равно 0. Тогда, применив лемму 1, получим из (39)

$$P\{|\varphi_T^0(U_T) - \varphi_T(U_T)| < \varepsilon_2\} \ge 1 - \delta, \ T > T_1. \qquad (40)$$

Положим в (38) $X = U_T^0$. Проделав аналогичные выкладки с учетом того, что U_T^0 имеет предельное распределение (согласно (35)), получим для произвольных чисел $\varepsilon_2 > 0$ и $\delta > 0$

$$P\{|\varphi_T^0(U_T^0) - \varphi_T(U_T^0)| < \varepsilon_2\} = D_{T2} \ge 1 - \delta, \quad T > T_2. \qquad (41)$$

Обратимся ко второму слагаемому в правой части (37). После ряда несложных преобразований имеем

$$P\{[\varphi_T(U_T) - \varphi_T^0(U_T^0)] < (\varepsilon_1 / 2)\} \ge P\{\varphi_T(U_T) - \varphi_T(U_T^0) \le 0\} +$$

$$+ P\{|\varphi_T(U_T^0) - \varphi_T^0(U_T^0)| < (\varepsilon_1 / 2)\} - 1 = D_{T1} + D_{T2} - 1, \qquad (42)$$

где D_{T2} — вероятность, определенная в (41).

Для определения вероятности D_{T1} в (42) запишем ограничения задачи (26) для $X = U_T^0$ следующим образом:

$$\widetilde{G}_{T1} U_T^0 + L_1(U_T^0) \le O_{m_1}, \ \widetilde{G}_{T2} U_T^0 + \overline{E}_{T2} g^{(2)}(\alpha^0) + L_2(U_T^0) \le O_{m_2}. \qquad (43)$$

Здесь $L_k(X)$ — вектор размерности m_k, $k = \overline{1,2}$, i-й компонентой которого является функция $l_i(X)$, $i \in I_k^0$, задаваемая выражением (28); $\widetilde{G}_{Tk} = \overline{E}_{Tk} G_k E_T^{-1}$, $k = 1, 2$. При этом в силу допущения 5

$$\lim_{T \to \infty} \widetilde{G}_{Tk} = \widetilde{G}_k. \qquad (44)$$

Здесь $\overline{E}_{Tk} = \operatorname{diag}(\overline{e}_{Ti})$, $i \in I_k^0$.

Согласно выражениям (28), (35) и допущению 5 имеем $p \lim\limits_{T \to \infty} l_i(U_T^0) = \frac{1}{2}(U_T^0)' \times$ $\times (\overline{e}_{Ti} E_T^{-1} g_{i2}(\alpha^0 + \theta_1 E_T^{-1} U_T^0) E_T^{-1}) U_T^0 = 0$, $i \in I$, откуда получаем $p \lim\limits_{T \to \infty} L(U_T^0) =$ $= O_{m_2}$.

В соответствии с выражением (42) $D_{T1} \ge P\{U_T^0 \in O_T\}$. Поэтому имеем цепочку неравенств

$$D_{T1} = P\{\varphi_T(U_T) - \varphi_T(U_T^0) \le 0\} \ge P\{\widetilde{G}_{T1} U_T^0 + L_1(U_T^0) \le O_{m_1},$$

$$\widetilde{G}_{T2} U_T^0 + L_2(U_T^0) + \overline{E}_{T2} g^{(2)}(\alpha^0) \le O_{m_2}\} \ge P\{\widetilde{G}_{T1} U_T^0 + L_1(U_T^0) \le O_{m_1}\} +$$

$$+ P\{\widetilde{G}_{T2} U_T^0 + L_2(U_T^0) + \overline{E}_{T2} g^{(2)}(\alpha^0) \le O_{m_2}\} - 1 \ge \sum_{i \in I_1^0} P\{\psi_{Ti}^{(1)} + l_i(U_T^0) \le 0\} +$$

$$+ \sum_{i \in I_2^0} P\{\psi_{Ti}^{(2)} + l_i(U_T^0) + \overline{e}_{Ti} g_i(\alpha^0) \le 0\} - (m_1 - 1) - (m_2 - 1) - 1 \ge$$

$$\ge \sum_{i \in I_1^0} P\{\psi_{Ti}^{(1)} + l_i(U_T^0) \le 0\} + \sum_{i \in I_2^0} P\{\psi_{Ti}^{(2)} + l_i(U_T^0) + \overline{e}_{Ti} g_i(\alpha^0) \le 0\} + 1 - m_1 - m_2,$$

где $\psi_{Ti}^{(k)}$ — i-я компонента вектора $\widetilde{G}_{Tk} U_T^0$, $k = \overline{1,2}$.

Согласно (32) $\widetilde{G}_1 U \le O_{m_1}$. Тогда из выражений (35) и (44) следует, что $\widetilde{G}_{T1} U_T^0 \overset{p}{\Rightarrow} \widetilde{G}_1 U \le O_{m_1}$. Так как $p \lim_{T\to\infty} l_i(U_T^0) = 0$, $i \in I$, нетрудно показать, что для произвольного $\delta_1 > 0$ существует такое $T_3 > 0$, для которого

$$P\{\psi_{Ti}^{(1)} + l_i(U_T^0) \le 0\} > 1 - \delta_1, \ i \in I_1^0, \ T > T_3.$$

В силу сходимости по вероятности $l_i(U_T^0)$, $i \in I$, к нулю из выражений (34), (43) и допущения 5 имеем для произвольного $\delta_2 > 0$

$$P\{\overline{e}_{Ti}^{-1}(|\psi_T^{(2)}| + l_i(U_T^0)) \le -g_i(\alpha^0)\} > 1 - \delta_2, \ i \in I_2^0, \ T > T_4.$$

Подставив это и предыдущее неравенство в полученную оценку снизу для величины D_{1T}, получим

$$D_{T1} \ge 1 - m_1\delta_1 - m_2\delta_2, \quad T > \max(T_3, T_4). \tag{45}$$

Положим в (41) $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 / 2$. Тогда с учетом (45) получим из (42)

$$P\{[\varphi_T(U_T) - \varphi_T^0(U_T^0)] < \frac{\varepsilon_1}{2}\} > 1 - \delta - m_1\delta_1 - m_2\delta_2, \ T > \max(T_2, T_3, T_4). \tag{46}$$

Подставив в (37) неравенство (40) при $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 / 2$ и неравенство (46), имеем $P\{||U_T - U_T^0||^2 < \varepsilon^2\} > 1 - 2\delta - m_1\delta_1 - m_2\delta_2$, $T > \max\limits_{1\le i\le 4} T_i$. Таким образом,

$$p \lim_{T\to\infty} ||U_T - U_T^0||^2 = 0.$$

Из этого выражения и (35) вытекает утверждение теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ РЕГРЕССИИ

В данном разделе определим точность оценивания для задачи (3). Будем считать, что шум в модели имеет нормальное распределение, т.е. подчиняется следующему допущению — частному случаю допущения 1.

Допущение 6. Случайные величины ε_t в уравнении регрессии независимы и нормально распределены с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2.

Рассмотрим такие основные характеристики точности регрессии, как оценки дисперсии шума и матрицы средних квадратов ошибок (с.к.о.) оценок параметров.

Вспомогательные результаты. Для понимания дальнейших выкладок приведем понятия активного и неактивного ограничений с точностью до некоторого положительного числа ξ такого, что $-\xi > g_i(\alpha^0)$, $i \in I_2^0$ [2]. Первый вид ограничения (пусть его номер *i*) удовлетворяет условию $-\xi \le g_i(\alpha_T) \le 0$. Соответственно *i*-е неактивное ограничение с точностью до ξ удовлетворяет неравенству $g_i(\alpha_T) < -\xi$. В [2] введена случайная величина γ_{Ti} такая, что для конечной выборки с числом наблюдений T

$$\gamma_{Ti} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-е ограничение активно с точностью до } \xi, \\ 0, & \text{если } i\text{-е ограничение неактивно с точностью до } \xi. \end{cases}$$

Очевидно, величины γ_{Ti}, $i \in I$, являются функциями α_T.

Имеются следующие результаты, которые будут использованы далее.

Лемма 4 [2, теорема 3]. Пусть α_T — состоятельная оценка. Тогда: если *i*-е ограничение активно при $\alpha = \alpha^0$ $(i \in I_1^0)$, то $p \lim_{T\to\infty} \gamma_{Ti} = 1$; если *i*-е ограничение неактивно при $\alpha = \alpha^0$ $(i \in I_2^0)$, то $p \lim_{T\to\infty} \gamma_{Ti} = 0$.

Лемма 5 [12, лемма 2]. Пусть $S(R,B,b,\sigma,N)$ — вектор-функция переменных $\sigma \in \mathfrak{R}^1$, $\sigma > 0$; $N \in \mathfrak{R}^n$, где R — матрица $n\times n$; B — матрица $m\times n$; $b \in \mathfrak{R}^m$, является решением задачи $\varphi(R,\sigma,Y) = (1/2)Y'RY - \sigma N'Y \to \min$, $BY \le b$, где $Y \in \mathfrak{R}^n$; матрица B имеет полный ранг; N — случайная величина, распределенная нормально с ковариационной матрицей R, $M\{N\} = O_n$; R — положительно-определенная матрица. Тогда для $i, j = \overline{1,n}$ функция

$$H_{ij}(R,B,b,\sigma) = \int_{\mathfrak{R}^n} s_i(R,B,b,\sigma,z)s_j(R,B,b,\sigma,z)f(z,R)\,dz$$

непрерывна по R, B, b. Здесь $H_{ij}(R,B,b,\sigma)$, $i,j=\overline{1,n}$, — элемент матрицы $H = M\{S(R,B,b,\sigma,N)S'(R,B,b,\sigma,N)\}$; $f(z,R)$ — плотность распределения N.

Основные результаты. В [2] для случая ограниченных регрессоров с постоянной средней и одинаково распределенными величинами ε_t, $t = 1,2,\dots$, предложена состоятельная оценка σ^2:

$$\sigma_T^2 = (T - n + \sum_{i\in I}\gamma_{Ti})^{-1}\sum_{t=1}^{T}(y_t - x_t'\alpha_T)^2. \tag{47}$$

Состоятельность оценки (47) для случая различных распределений шума $\varepsilon_t, t = 1,2,\dots$, и регрессоров, имеющих тренд, определяется следующей теоремой.

Теорема 4. Если выполняются допущения 1–5, то σ_T^2 — состоятельная оценка σ^2.

Доказательство. Преобразовав выражение для σ_T^2, имеем

$$\sigma_T^2 = \frac{U_T'R_TU_T - 2U_T'Q_T}{T - n + \sum_{i\in I}\gamma_{Ti}} + \frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - x_t'\alpha^0)^2}{T}\,\frac{T}{T - n + \sum_{i\in I}\gamma_{Ti}}, \tag{48}$$

где случайная величина Q_T определена в (26), $U_T = E_T(\alpha_T - \alpha^0)$. Матрица E_T определяется допущением 2.

При выполнении допущений 1, 2 имеет место предел (34). Согласно теореме 3 в силу допущений 1–5 U_T имеет предел по распределению. Следовательно, числитель первого слагаемого в (48) имеет предельное распределение. Его знаменатель стремится к бесконечности, так как согласно лемме 4 сумма $\sum_{i\in I}\gamma_{Ti}$ сходится по вероятности к конечному числу m_1. Тогда на основании теоремы X(a) [8, с. 118] первое слагаемое в (48) сходится по вероятности к нулю. Второе слагаемое в силу допущения 1 и леммы 4 сходится к σ^2 согласно закону больших чисел.

Теорема доказана.

С целью получения выражения для матрицы с.к.о. оценок параметров регрессии K_T^0 для конечного T задачу (3) после преобразования запишем в виде

$$(1/2)Y'R_TY - Y'Q_T \to \min,\ \tilde{G}_TY \le \overline{E}_T(b - G\alpha^0),$$

где $X = E_T(\alpha - \alpha^0)$, b — вектор, компоненты которого $b_i, i \in I$.

Положив $x = X/\sigma$, запишем приведенную задачу следующим образом:

$$(1/2)x'R_Tx - x'q_T \to \min,\ \tilde{G}_{T1}x \le B_T^{(1)},\ \tilde{G}_{T2}x \le B_T^{(2)}. \tag{49}$$

Здесь $q_T = Q_T/\sigma \sim N(O_n, R_T)$ (согласно выражению $Q_T = E_T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_tx_t$ и допущению 6). Из (34) следует

$$q_T \overset{p}{\Rightarrow} Q/\sigma = q \sim N(O_n, R),\ T \to \infty. \tag{50}$$

Правые части ограничений в (49) определяются выражениями

$$B_T^{(i)} = \overline{E}_{Ti}(b^{(i)} - G_i\alpha^0)/\sigma,\ i = 1, 2, \qquad (51)$$

где $b^{(i)} \in \mathfrak{R}^{m_i}$ имеет компоненты $b_j, j \in I_i^0$ (см. (3)), причем $b^{(1)} = G_1\alpha^0$. Таким образом, $B_T^{(1)} = O_{m_1}$, а компоненты $B_T^{(2)}$ неотрицательны.

Матрицу с.к.о. оценки параметра регрессии K_T^0 зададим выражением

$$K_T^0 = M\{U_T U_T'\} = \sigma^2 k_T^0,\ k_T^0 = M\{u_T u_T'\}, \qquad (52)$$

где $u_T = U_T/\sigma = S(R_T, \widetilde{G}_{T1}, \widetilde{G}_{T2}, B_T^{(1)}, B_T^{(2)}, q_T)$ — решение задачи (49), $k_T^0 = M\{S(R_T, \widetilde{G}_{T1}, \widetilde{G}_{T2}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, q_T) S'(R_T, \widetilde{G}_{T1}, \widetilde{G}_{T2}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, q_T)\}$.

Из теоремы 3 вытекает, что u_T сходится по распределению к случайной величине $u = s(R, b^{(1)}, q)$ — решению задачи

$$(1/2)x'Rx - q'x \to \min,\ \widetilde{G}_1 x \le b^{(1)} = O_{m_1}, \qquad (53)$$

где q — случайная величина, определенная в (50).

Имеем $U = \sigma u$, где U — решение (32), $U = S(R, b^{(1)}, q)$. Тогда

$$K = M\{UU'\} = \sigma^2 k,\ k = M\{uu'\}, \qquad (54)$$

где $k = M\{s(R, b^{(1)}, q) s'(R, b^{(1)}, q)\}$.

Вычисление матрицы K_T^0 при известной дисперсии σ^2 согласно (52) сводится к определению матрицы k_T^0, вычислить которую невозможно без знания величины α^0. В качестве оценки матрицы k_T^0 в (52) возьмем матрицу k_T, (i, j)-й элемент которой

$$K_{ij}^T(R_T, \widetilde{G}_{T1}, \widetilde{G}_{T2}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}) = \int_{\mathfrak{R}^n} S_i(R_T, \widetilde{G}_{T1}, \widetilde{G}_{T2}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z) \times$$

$$\times S_j(R_T, \widetilde{G}_{T1}, \widetilde{G}_{T2}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z) f(z, R_T) dz. \qquad (55)$$

Здесь $S_i(R_T, \widetilde{G}_{T1}, \widetilde{G}_{T2}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z)$ — i-я компонента $S(R_T, \widetilde{G}_{T1}, \widetilde{G}_{T2}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z)$ — решения задачи

$$(1/2)x' R_T x - x' q_T \to \min,\ \widetilde{G}_{1T} x \le b_T^{(1)},\ \widetilde{G}_{2T} x \le b_T^{(2)}. \qquad (56)$$

Фигурирующие в выражении (55) матрицы $\widetilde{G}_{Tk}$, $k = 1, 2$, определены в неравенстве (43), векторы $b_T^{(k)} \in \mathfrak{R}^{m_k}$ имеют компоненты b_{Ti}, причем $b_T^{(k)} = [b_{Ti}]$, $i \in I_k^0$, $k = 1, 2$,

$$b_{Ti} = \frac{\overline{e}_{Ti}(b_i - a_i'\alpha_T)}{\sigma_T}(1 - \gamma_{Ti}),\ i \in I, \qquad (57)$$

где $\overline{e}_{Ti}$ — элемент на главной диагонали матрицы $\overline{E}_T$, определяемой допущением 5.

В силу состоятельности α_T (теорема 2), σ_T^2 (теорема 4) с учетом леммы 4 имеем

$$p\lim_{T \to \infty} b_T^{(1)} = b^{(1)} = O_{m_1},\ b_T^{(2)} \to \infty \text{ при } T \to \infty. \qquad (58)$$

Задача (56) отличается от задачи (49) правыми частями ограничений. Их модификация согласно (57) необходима для получения состоятельной оценки матрицы с.к.о. оценки параметра регрессии. В качестве таковой рассмотрим матрицу

$$K_T = \sigma_T^2 k_T, \tag{59}$$

где величина σ_T^2 определена в (47), $k_T = [K_{ij}^T(R_T, \widetilde{G}_{T1}, \widetilde{G}_{T2}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)})]$, $i, j = \overline{1, n}$; причем $K_{ij}^T(R_T, \widetilde{G}_{T1}, \widetilde{G}_{T2}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)})$ задается выражением (55).

Покажем, что матрица K_T, заданная выражением (59), является состоятельной оценкой матрицы с.к.о. оценки параметра регрессии.

Теорема 5. Если выполняются допущения 2–6, то $p\lim_{T\to\infty} K_T = K$, где матрица K определена выражением (54), в котором U — решение задачи (32).

Доказательство. Сначала покажем, что

$$p\lim_{T\to\infty} k_T = k, \tag{60}$$

где $k = K/\sigma^2 = M\{UU'\}/\sigma^2$.

С этой целью рассмотрим задачу квадратичного программирования

$$(1/2)x' R_T x - q_T' x \to \min,\ \widetilde{G}_{T1} x \le b_T^{(1)}, \tag{61}$$

где $\widetilde{G}_{T1}$ — матрица полного ранга размерности $m_1 \times n$ (согласно допущению 3).

Обозначим решение задачи (61) $s(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, q_T)$. Введем матрицу вторых моментов этого решения порядка n, определив ее (i, j)-й элемент следующим образом:

$$k_{ij}^T(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}) = \int_{\mathfrak{R}^n} s_i(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, z) s_j(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, z) f(z, R_T) dz. \tag{62}$$

Здесь $s_i(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, z)$ — i-я компонента $s(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, q_T)$ при $q_T = z$, $f(z, R_T)$ — плотность распределения q_T,

$$f(z, R_T) = (2\pi)^{-n/2} (\det R_T)^{-1/2} \exp(-(1/2) z' R_T^{-1} z). \tag{63}$$

Так как $k = M\{s(R, \widetilde{G}_1, b^{(1)}, q) s'(R, \widetilde{G}_1, b^{(1)}, q)\}$ и согласно (50) $q \sim N(O_n, R)$, элемент (i, j) матрицы k будет иметь вид

$$k_{ij}(R, \widetilde{G}_1, b^{(1)}) = \int_{\mathfrak{R}^n} s_i(R, \widetilde{G}_1, b^{(1)}, z) s_j(R, \widetilde{G}_1, b^{(1)}, z) f(z, R) dz,\ i, j = \overline{1, n}, \tag{64}$$

где $s_i(R, \widetilde{G}_1, b^{(1)}, z)$ — i-я компонента u при $q = z$, $f(z, R)$ — плотность распределения q,

$$f(z, R) = (2\pi)^{-n/2} (\det R)^{-1/2} \exp(-(1/2) z' R^{-1} z). \tag{65}$$

Согласно допущению 2, формулам (44), (58) имеем $\lim_{T\to\infty} R_T = R$, $\lim_{T\to\infty} \widetilde{G}_{T1} = \widetilde{G}_1$, $p\lim_{T\to\infty} b_T^{(1)} = b^{(1)} = O_{m_1}$. Тогда, применив к выражению (62) лемму 5, получим из (62) и (64)

$$p\lim_{T\to\infty} k_{ij}^T(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}) = k_{ij}(R, \widetilde{G}_1, b^{(1)}),\ i, j = \overline{1, n}. \tag{66}$$

Покажем теперь, что $k_{ij}^T(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)})$ и $K_{ij}^T(R_T, \widetilde{G}_{T1}, \widetilde{G}_{T2}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)})$ (см. (55)) имеют общий предел при $T \to \infty$. Введем множество

$$\omega(\widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}) = \{z\colon s(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, z) \le b_T^{(2)},\quad z \in \mathfrak{R}^n\}.$$

Нетрудно убедиться, что $\omega(\widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, b_{T1}^{(2)}) \subseteq \omega(\widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, b_{T2}^{(2)})$, если $b_{T1}^{(2)} \le b_{T2}^{(2)}$.

Согласно (58) для произвольных чисел $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $M > 0$ и $\eta > 0$ найдется такое $T_0 > 0$, что

$$P\{||b_T^{(1)}|| \le \varepsilon\} > 1-\delta, \; P\{||b_T^{(2)}|| \ge M\} > 1-\eta, \; T > T_0. \tag{67}$$

Положив

$$\varphi_{ij}(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, z) = s_i(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, z) s_j(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, z),$$

$$\Phi_{ij}(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z) = S_i(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z) S_j(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z),$$

где $S_k(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z) = S_k(R_T, \widetilde{G}_{T1}, \widetilde{G}_{T2}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z)$, $k = i, j$, имеем из (55) и (62), обозначив $K_{ij}^T(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}) = K_{ij}^T(R_T, \widetilde{G}_{T1}, \widetilde{G}_{T2}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)})$,

$$|K_{ij}^T(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}) - k_{ij}^T(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)})| =$$

$$= \Bigg| \int\limits_{\omega(b_T^{(1)}, b_T^{(2)})} \varphi_{ij}(R_T, G_{T1}, b_T^{(1)}, z) f(z, R_T) dz +$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{R}^n \setminus \omega(b_T^{(1)}, b_T^{(2)})} \varphi_{ij}(R_T, G_{T1}, b_T^{(1)}, z) f(z, R_T) dz -$$

$$- \int\limits_{\omega(b_T^{(1)}, b_T^{(2)})} \Phi_{ij}(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z) f(z, R_T) dz -$$

$$- \int\limits_{\mathfrak{R}^n \setminus \omega(b_T^{(1)}, b_T^{(2)})} \Phi_{ij}(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z) f(z, R_T) dz \Bigg| =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{R}^n \setminus \omega(b_T^{(1)}, b_T^{(2)})} \left| \varphi_{ij}(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, x) - \Phi_{ij}(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z) \right| f(z, R_T) dz =$$

$$= L_T(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}), \tag{68}$$

поскольку $s_i(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, z) = S_i(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z)$, $i = \overline{1, n}$, для $z \in \omega(\widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, b_T^{(2)})$.

При фиксированном z имеем $S_i(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z) \to s_i(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, z)$ для $T \to \infty$, так как $b_T^{(2)} \to \infty$. Поэтому для произвольного $\gamma > 0$ найдутся такие числа $M > 0$ и $N > 0$, что будет справедливо неравенство

$$\max_{\substack{||b_T^{(1)}|| \le \varepsilon, \\ ||b_T^{(2)}|| \ge M \\ ||\widetilde{G}_T - \widetilde{G}|| \le N}} \int\limits_{\mathfrak{R}^n \setminus \omega(b_T^{(1)}, b_T^{(2)})} \Big| \varphi_{ij}(R_T, \widetilde{G}_{T1}, b_T^{(1)}, z) -$$

$$- \Phi_{ij}(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}, z) \Big| f(z, R_T) dz \le \gamma,$$

где $\varepsilon > 0$ задано. Тогда с учетом (67) получим

$$P\{L_T(R_T, \widetilde{G}_T, b_T^{(1)}, b_T^{(2)}) \le \gamma\} \ge P\{||b_T^{(1)}|| \le \varepsilon, \; ||b_T^{(2)}|| \ge M, \quad ||\widetilde{G}_T - \widetilde{G}|| \le N\} =$$

$$= P\{||b_T^{(1)}|| \le \varepsilon, \; ||\widetilde{G}_T - \widetilde{G}|| \le N\} - P\{||b_T^{(1)}|| \le \varepsilon, \; ||\widetilde{G}_T - \widetilde{G}|| \le N, ||b_T^{(2)}|| < M\} \ge$$

$$\geq P\{\|b_T^{(1)}\|\leq\varepsilon, \|\widetilde{G}_T-\widetilde{G}\|\leq N\}-P\{\|b_T^{(2)}\|<M\}\geq P\{\|b_T^{(1)}\|\leq\varepsilon\}-$$

$$-P\{\|b_T^{(2)}\|<M\}>1-\delta-\eta,\ \ T>T_0.$$

Имеем из (68) и последнего неравенства

$$P\{|K_{ij}^T(R_T,\widetilde{G}_T,b_T^{(1)},\ b_T^{(2)})-k_{ij}^T(R_T,\widetilde{G}_{T1},b_T^{(1)})|\leq\gamma\}\geq 1-\delta-\eta,\ \ T>T_0.$$

Таким образом,

$$p\lim_{T\to\infty}|K_{ij}^T(R_T,\widetilde{G}_T,b_T^{(1)},\ b_T^{(2)})-k_{ij}^T(R_T,\widetilde{G}_{T1},b_T^{(1)})|=0. \tag{69}$$

Из (69) и (66) следует, что $K_{ij}^T(R_T,\widetilde{G}_T,b_T^{(1)},\ b_T^{(2)})$ сходится по вероятности к $k_{ij}(R,\widetilde{G}_1,b^{(1)})$, что доказывает справедливость соотношения (60). Тогда с учетом теоремы 4 получаем утверждение данной теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корхин А.С. О некоторых свойствах оценок параметров регрессии при априорных ограничениях–неравенствах // Кибернетика. — 1985. — № 6. — С. 106–114.
2. Корхин А.С. Определение выборочных характеристик и их асимптотических свойств линейной регрессии, оцененной с учетом ограничений–неравенств // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 3. — С. 88–98.
3. Корхин А.С. Решение задач нелинейного метода наименьших квадратов с нелинейными ограничениями на основе метода линеаризации // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 6. — С. 124–135.
4. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов: Пер. с англ. — М.: Наука, 1986. — 232 с.
5. Мэйндоналд Дж. Вычислительные алгоритмы в прикладной статистике: Пер. с англ. — М.: Финансы и статистика, 1988. — 350 с.
6. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. — М.: Наука. 1983. — 384 с.
7. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1976. — 755 с.
8. Рао С.Р. Линейные статистические модели и их применение: Пер. с англ. — М.: Наука, 1968. — 548 с.
9. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 302 с.
10. Хенкин М.З., Волынский Э.И. Поисковый алгоритм решения общей задачи математического программирования // Журнал вычисл. математики и мат. физики. — 1976. — № 1. — С. 61–71.
11. Карманов В.Г. Математическое программирование. — М.: Наука, 1975. — 272 с.
12. Корхин А.С. Об определении точности оценки параметров нелинейной регрессии с учетом нелинейных ограничений // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 5. — С. 38–48.

Поступила 20.05.2008