УДК 519.8

Н.В. СЕМЕНОВА, Л.Н. КОЛЕЧКИНА

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ ПОЛИРАЗМЕЩЕНИЙ: ПОЛИЭДРАЛЬНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ

Ключевые слова: *многокритериальная оптимизация, дискретная оптимизация, комбинаторные множества, полиразмещения, Парето-оптимальные решения, слабо, строго эффективные решения.*

ВВЕДЕНИЕ

Новым теоретическим подходом для решения важных задач экономики, проектирования сложных систем, принятия решений в условиях неопределенности является применение моделей и методов, сочетающих многокритериальность альтернатив и комбинаторные свойства допустимого множества. В области исследования различных классов дискретных и векторных оптимизационных задач, построения эффективных методов их решения получены существенные результаты [1–22]. Высокая степень абстракции постановок и решений оптимизационных комбинаторных задач позволяет использовать их при проектировании технических и программных средств, решении задач экономики, размещения объектов, управления процессом обработки данных, принятия решений.

Для решения задач комбинаторной оптимизации разработаны различные вычислительные методы. Наиболее перспективные из них составляют отдельную область полиэдральной комбинаторики [8–12, 14–16, 18, 19]. Общая идея этих методов состоит в установлении связи экстремальных комбинаторных задач с методами линейного программирования: элементы допустимого множества интерпретируются как точки евклидова пространства, функции критериев и ограничений рассматриваются как непрерывные. Таким образом, рассматривается задача нахождения экстремума функции на выпуклой оболочке заданных точек (т.е. на выпуклом многограннике). Как известно, экстремум линейной формы на многограннике достигается в одной из вершин, и задача его нахождения является задачей линейного программирования. Особенность решения комбинаторных задач при таком сведении состоит в том, что при нахождении решения следует ограничиваться лишь вершинами многогранника.

В последнее время в области исследования многих классов комбинаторных моделей, разработки новых методов их решения большое внимание уделяется методам, основанным на применении структурных свойств комбинаторных множеств [2, 8–16]. Использование информации о структуре выпуклой оболочки допустимых решений, являющейся основанием для многих многогранных методов, — один из самых эффективных, по мнению авторов, подходов к решению задач комбинаторной оптимизации. Но при решении таких задач возникают проблемы, связанные со сложностью математических моделей, большим объемом информации и др.

В настоящей работе формулируется и рассматривается качественно новая и актуальная задача, которая объединяет многокритериальность альтернатив и допустимое множество решений, имеющее комбинаторные свойства полиразмещений. Свойства евклидовых комбинаторных множеств описаны во многих работах. Наряду с хорошо известными евклидовыми комбинаторными множествами перестановок, размещений, сочетаний, разбиений появляются более сложные структуры — поликомбинаторные множества [11, 12, 15]. Повышенный интерес к таким множествам обусловлен разработками последних лет в области компьютерных технологий при создании современных алгоритмов и программ для решения оптимизационных задач.

Данная работа продолжает исследования многокритериальных задач на комбинаторных и поликомбинаторных множествах, представленные в [8–12]. На основании установленной взаимосвязи между многокритериальными задачами на комбинаторных множествах и оптимизационными задачами на непрерывном допустимом множестве изучены некоторые структурные свойства допустимой области, сформулировано и доказано ряд теорем об условиях оптимальности различных видов эффективных решений рассмотренных задач. Для векторных задач комбинаторного типа на множестве полиразмещений предложен полиэдральный подход к их решению, основанный на идеях методов главного критерия, отсекающих плоскостей, релаксации.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как известно, размещением из q элементов по n называется упорядоченный набор $a=(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n})$ из n элементов, принадлежащих мультимножеству $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_q\}$. Пусть $A(q,k,n)$ — общее комбинаторное множество n-размещений, индуцируемое $q>n$ элементами из мультимножества A, среди элементов которого k различных. Образ множества $A(q,k,n)$ при отображении в R^n обозначим $E(q,k,n)$. Всякая точка $x\in E(q,k,n)$ обладает тем свойством, что ее координаты принимают различные значения из мультимножества A действительных чисел, т.е. $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, где $x_j=a_{i_j}$, $a_{i_j}\in A\ \ \forall i,j\in N_n$.

Представим множество N_q в виде упорядоченного разбиения на s, где $s<q$, непустых попарно непересекающихся подмножеств $J_1,\ldots,J_s$, т.е. для них выполняются условия $J_i\cap J_j=\varnothing$, $J_i\neq\varnothing$, $J_j\neq\varnothing$, $\forall i,j\in N_s$, а также упорядоченное разбиение числа n на s слагаемых $n_1,n_2,\ldots,n_s$, которое удовлетворяет условию $1\le n_i\le q_i$, $\forall i\in N_s$, $|J_i|=q_i$. Очевидно, что $q_1+q_2+\ldots+q_s=q$, $n_1+n_2+\ldots+n_s=n$.

Обозначим H множество элементов вида $h=(h(1),\ldots,h(n))=(h^1,\ldots,h^s)$, где $h(j)\in N_n$, $j\in N_n$, а h^i — произвольная перестановка элементов множества J_i $\forall i\in N_s$.

Пусть подмультимножество A^i мультимножества A состоит из тех элементов A, номера которых принадлежат множеству J_i: $A^i=\{a_1^i,\ldots,a_{n_i}^i\}$, $|J_i|=n_i$.

Определение 1. Множество

$$A(q,k,n,s)=\{(a_{h(1)},\ldots,a_{h(n)})\,|\,a_{h(i)}\in A\ \forall i\in N_n,\ \forall h\in H\}$$

называют общим множеством полиразмещений.

Не теряя общности, упорядочим элементы мультимножества A по неубыванию: $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$. Очевидно, что это упорядочение сохраняется и для каждого подмультимножества A^i, $i\in N_s$, из A.

Рассмотрим задачу оптимизации

$$Z(\Phi,A(q,k,n,s))\colon \max\{\Phi(a)\,|\,a\in A(q,k,n,s)\},$$

состоящую в максимизации векторного критерия $\Phi(a)=(\Phi_1(a),\Phi_2(a),\ldots,\Phi_l(a))$ на комбинаторном множестве полиразмещений, где $\Phi_i\colon R^n\to R^1$, $i\in N_l$.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА — МНОГОГРАННИКА ПОЛИРАЗМЕЩЕНИЙ

Выпуклой оболочкой множества полиразмещений $A(q,k,n,s)$ является многогранник полиразмещений $M_{qk}^{ns}(A)=\operatorname{conv}A(q,k,n,s)$, множество вершин которого составляют элементы множества полиразмещений: $\operatorname{vert}M_{qk}^{ns}(A)=A(q,k,n,s)$.

Теорема 1. Многогранник полиразмещений $M_{qk}^{ns}(A)$ определяется совокупностью всех решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n_i} x_j \le \sum_{j=1}^{n_i} a_j^i, \ i \in N_s, & (1) \\ \sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{m_i} a_j^i, \ m_i \in N_{q_i-1}, \ \alpha_j \in J_i, \ \forall i \in N_s, & (2) \end{cases}$$

$$\alpha_j \ne \alpha_t, \ \forall j \ne t, \ \forall j, t \in J_i.$$

Рассмотрим некоторые свойства многогранника $M_{qk}^{ns}(A)$ и его связь с общим множеством полиразмещений.

Очевидно, что из системы линейных неравенств (1), (2) можно выделить s подсистем линейных неравенств, описывающих многогранники размещений $M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)$, являющиеся выпуклыми комбинациями множеств размещений a_{h^i}, $i \in N_s$. Следовательно,

$$M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i) = \left\{ x \in R^{n_i} \mid \sum_{j=1}^{n_i} x_j \le \sum_{j=1}^{n_i} a_{q_i - j}^i, \ \sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{m_i} a_j^i \right\},$$

$$m_i \in N_{q_i-1}, \ \alpha_j \in J_i, \ \alpha_j \ne \alpha_t, \ \forall j \ne t, \ \forall j, t \in J_i, \ \forall i \in N_s.$$

Как известно, под произведением многогранников $M_1, \ldots, M_s$ понимают множество $\bigotimes_{i=1}^{s} M_i = \{x \in R^{d_1 + \ldots + d_s} \mid x = (x_1, \ldots, x_s), x_i \in M_i \ \forall i \in N_s\}$, где M_i — d_i-мерный многогранник.

В соответствии с утверждением 3.2 [17, с. 26] справедливо равенство

$$\bigotimes_{i=1}^{s} M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i) = \{x \in R^{d_1 + \ldots + d_s} \mid x = (x_1, \ldots, x_s), x_i \in M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i) \ \forall i \in N_s\},$$

т.е. точка $x \in \bigotimes_{i=1}^{s} M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)$ удовлетворяет каждой из s подсистем системы (1), (2). Следовательно, можно утверждать, что если a_{h^i} — вершина многогранника $M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)$, то $a(h) = \bigotimes_{i=1}^{s} a_{h^i}$, $a(h) = a_{h^1}, \ldots, a_{h^s}$, где $a(h) \in A_{qk}^{ns}(q, k, n, s)$.

Теорема 2. Многогранник полиразмещений $M_{qk}^{ns}(A)$ при $n < q$ комбинаторно эквивалентен многограннику полиперестановок $\Pi_{qk}^{s}(A)$, имеющему размерность n.

Справедливость теоремы следует из того факта, что $M_{qk}^{ns}(A) = \bigotimes_{i=1}^{s} M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)$, и теоремы 4.8 [17, с. 193], а также определения многогранника полиперестановок [10].

Следствие 1. Для числа $r_i(M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i))$ i-мерных граней $(0 \le i \le n_i)$ многогранника размещений $M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)$ справедлива формула

$$r_i(M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)) = \sum \frac{(n_i + 1)!}{t_1^i!\, t_2^i! \ldots t_{n_i - i + 1}^i!} \quad \forall i \in N_{n_i},$$

где суммирование проводится по всем решениям уравнения $t_1^i + t_2^i \ldots + t_{n_i - i + 1}^i = n_i$ в целых положительных числах.

Поскольку множество полиразмещений — подмножество множества размещений $A(q,k,n,s) \subset A(q,k,n)$ $\forall i \in N_s$, количество элементов полиразмещений не превосходит общего количества элементов множества размещений.

Утверждение 1. Мощность A_{qk}^{ns} множества полиразмещений $A(q,k,n,s)$ определяется величиной

$$A_{qk}^{ns} = |A(q,k,n,s)| = \prod_{i=1}^{s} \frac{q_i\,!}{(q_i - n_i)!}\ .$$

Справедливы следующие теоремы [15].

Теорема 3. Многогранник M_{qk}^{ns} полиразмещений равен произведению многогранников $M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)$, $i \in N_s$, размещений: $M_{qk}^{ns}(A) = \overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)$.

Теорема 4. Множество полиразмещений $A(q,k,n,s)$ совпадает с множеством вершин многогранника $M_{qk}^{ns}(A)$.

Теорема 5. Вершина $a(h) \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$ является смежной с вершиной $a(z) \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$ тогда и только тогда, когда $a(z)$ образуется из $a(h)$ перестановкой двух неравных один другому компонентов — a_i^i и a_j^i, $j \in J_{q_i - 1}$, $i \in N_s$.

Следует отметить, что общее число p линейных неравенств, входящих в систему (1), (2), описывающих многогранник полиразмещений $M_{qk}^{ns}(A)$, очень велико. В некоторых случаях его можно уменьшить.

Утверждение 2. Если из n координат x_i, $i \in N_n$, точки $x \in R^n$ только k различных, то число неравенств системы, описывающих выпуклый многогранник M_{qk}^{ns}, можно уменьшить, исключив из нее $N = \sum_{i=1}^{s} N_i$, где $N_i = 1 + n_i + \sum_{j=i+1}^{n_i} C_{n_i}^j$, неравенств.

Доказательство. Совокупность неравенств подсистемы для некоторого подмножества J_i, $i \in N_s$, системы (1), (2), имеющих одинаковое значение m_i верхнего предела суммирования, назовем m_i-й группой неравенств этой подсистемы. В каждую m_i-ю группу входит $C_{q_i}^{m_i}$ неравенств. Следовательно, общее число неравенств, описывающих многогранник $M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)$, равно $p_i = \sum_{i=0}^{q_i} C_{q_i}^{m_i} = 2^{q_i}$, $i \in N_s$. Поскольку из q_i координат a_j^i, $j \in J_i$, k_i различных, то из i-й подсистемы неравенств (1), (2) можно исключить некоторые неравенства. С учетом условия $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_q$ для любого $j \in N_{m_i - 1}$, $m_i \le q_i$, $i \le N_s$, справедливо равенство $a_j^i = a_{j+1}^i$. Поэтому при выполнении неравенств первой группы в подсистеме (1), (2) будут также справедливы неравенства второй, третьей, …, m_i-й, $i \in N_s$, групп. Действительно, поскольку $x_j \ge a_1^i$, $j \in J_i$, $i \in N_s$, для любого $m_i \in N_n$ выполняется условие $\sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \ge m_i a_1^i$. Следовательно, из каждой подсистемы системы (1), (2), описывающей многогранник полиразмещений $M_{qk}^{ns}(A)$, можно исключить неравенства второй, третьей, …, m_i-й, $i \in N_s$, групп и общее число неравенств в m_i подсистеме будет составлять $N_i = 1 + q_i + \sum_{j=i+1}^{q_i} C_{q_i}^j$. Аналогичные рассуждения можно провести, если набор чисел $(a_1^i, a_2^i, \ldots, a_n^i)$ обладает свойством $a_j^i = a_{j+1}^i$ $\forall j \in N_{n_i - 1} \setminus N_{n_i - m_i}$, $i \in N_s$. Тогда в подсистеме системы (1), (2) достаточно оставить только неравенства первой, второй, …, $(m_i - j)$-й групп. Следовательно, число неравенств, которое можно исключить из системы (1), (2), определяется величиной $N = \sum_{i=1}^{s} N_i$.

При отображении множества полиразмещений $A(q, k, n, s)$ в евклидово пространство R^n сформулируем задачу $Z(F, X)$ максимизации некоторого векторного критерия $F(x)$ на допустимом множестве X:

$$Z(F, X): \max\{F(x) \mid x \in X\}.$$

Каждой точке $a \in A(q, k, n, s)$ соответствует точка $x \in X$, такая, что $F(x) = \Phi(a)$, где $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x))$, $f_i : R^n \to R^1$, $i \in N_l$, X — непустое множество, которое определяется следующим образом: $X = \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$, где $M_{qk}^{ns}(A) = = \operatorname{conv} A(q, k, n, s)$. Пусть задача $Z(F, X)$ содержит также выпуклые ограничения, образующие замкнутое выпуклое множество $D \subset R^n$ вида $D = \{x \in R^n \mid g_i(x) \le 0, i \in N_m\}$. Тогда допустимое множество $X = \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D$.

Традиционное понятие оптимальности в задачах многокритериальной оптимизации заменяется понятиями Парето-оптимальности (эффективности), слабой эффективности (оптимальности по Слейтеру) и строгой эффективности (оптимальности по Смейлу). Таким образом, под решениями задачи $Z(F, X)$ будем понимать элементы следующих множеств: $P(F, X)$ — эффективных (Парето-оптимальных) решений, $\operatorname{Sl}(F, X)$ — слабо эффективных (оптимальных по Слейтеру), $\operatorname{Sm}(F, X)$ — строго эффективных (оптимальных по Смейлу) решений. Согласно [4–7] для каждого допустимого $x \in X$ справедливы утверждения:

$$x \in \operatorname{Sl}(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) > F(x)\} = \varnothing, \tag{3}$$

$$x \in P(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) \ge F(x), F(y) \ne F(x)\} = \varnothing, \tag{4}$$

$$x \in \operatorname{Sm}(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid y \ne x, F(y) \ge F(x)\} = \varnothing, \tag{5}$$

$$\operatorname{Sm}(F, X) \subset P(F, X) \subset \operatorname{Sl}(F, X). \tag{6}$$

Поскольку $|X| < \infty$, множество $P(F, X) \ne \varnothing$ и внешне устойчиво [13].

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ МНОЖЕСТВ ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ

Утверждение 3. Для множеств оптимальных решений задачи $Z(F, X)$ справедливы включения: $\operatorname{Sm}(F, X) \subset P(F, X) \subset \operatorname{Sl}(F, X) \subset \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$.

Многогранник $M_{qk}^{ns}(A)$ представим в виде $M_{qk}^{ns}(A) = \{x \in R^n \mid \langle \pi_i, x \rangle \le \gamma_i$, $i \in N_p\}$.

Введем множество $N(y) = \{i \in N_q \mid \pi_i y = \gamma_i\}$, $0^+ Q(y) = \{x \in R^n \mid \pi_i x \le 0$, $i \in N(y)\}$ — конус, который может быть построен для всех точек $y \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$. Очевидно, что $N(y) \ne \varnothing$, $X \subseteq y + 0^+ M(y)$.

Структурные свойства допустимой области X и множеств различных видов эффективных решений, отмеченные в утверждении 3, а также линейность функций векторного критерия позволяют свести решения задачи $Z(F, X)$ к решению задачи $Z(F, G)$, определенной на непрерывном допустимом множестве $G = M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D$.

Теорема 6. Справедливы включения: $P(F, G) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \subset P(F, X)$, $\operatorname{Sl}(F, G) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \subset \operatorname{Sl}(F, X)$, $\operatorname{Sm}(F, G) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \subset \operatorname{Sm}(F, X)$.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D \subset G$, имеем

$$P(F,G) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D \subset P(F,G) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D) = P(F, X).$$

Аналогично можно доказать соотношения

$$\operatorname{Sm}(F, X) = \operatorname{Sm}(F, D \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)) \supset \operatorname{Sm}(F, G) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A),$$

$$\operatorname{Sl}(F, X) = \operatorname{Sl}(F, \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D) \supset \operatorname{Sl}(F, G) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A).$$

Пусть функции $f_i(x)$, $i \in N_l$, векторного критерия $F(x)$ линейны, т.е. $f_i(x) = \langle c_i, x \rangle$, $i \in N_l$, $C \in R^{n \times l}$ — матрица и линейное отображение $C: R^n \to R^l$, c_i — ее вектор-строка, $i \in N_l$. Обозначим $K = \{x \in R^n \mid Cx \geq 0\}$ — конус перспективных направлений [4] задачи $Z(F, X)$, $K_0 = \{x \in R^n \mid Cx = 0\}$ — ядро отображения C, $\operatorname{int} K = \{x \in R^n \mid Cx > 0\}$ — внутренность конуса K.

Из формул (3)–(5) следует справедливость утверждений $\forall\, x \in X$:

$$x \in \operatorname{Sl}(C, X) \Leftrightarrow (x + \operatorname{int} K) \bigcap X = \varnothing, \tag{7}$$

$$x \in P(C, X) \Leftrightarrow x + (K \setminus K_0) \bigcap X = \varnothing, \tag{8}$$

$$x \in \operatorname{Sm}(C, X) \Leftrightarrow (x + K) \bigcap X \setminus \{x\} = \varnothing. \tag{9}$$

Теорема 7. Если допустимое множество X задачи $Z(F, X)$ не содержит ограничений, описывающих выпуклое многогранное множество D, или $M_{qk}^{ns}(A) \subseteq D$, т.е. $X = \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$, то $\forall x \in R^n$ справедливы равенства:

$$\operatorname{Sl}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) = \operatorname{Sl}(F, X),$$

$$P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) = P(F, X),$$

$$\operatorname{Sm}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) = \operatorname{Sm}(F, X).$$

Доказательство. Из теоремы 6 и условий данной теоремы следует, что $\forall\, x \in R^n$ справедливы утверждения:

$$x \in \operatorname{Sl}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \Rightarrow x \in \operatorname{Sl}(F, X),$$

$$x \in P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \Rightarrow x \in P(F, X),$$

$$x \in \operatorname{Sm}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \Rightarrow x \in \operatorname{Sm}(F, X).$$

Докажем обратные импликации. Пусть $x \in \operatorname{Sl}(F, X)$, откуда согласно утверждению 3 $x \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$. Предположим от противного, что $x \notin \operatorname{Sl}(F, M_{qk}^{ns}(A))$. С учетом линейности функций $f_i(x)$, $i \in N_l$, векторного критерия $F(x)$ согласно теореме 5 [6] выполняется условие $\operatorname{int} K \bigcap 0^+ M(x) \neq \varnothing$, т.е. в конусе $(x + \operatorname{int} K)$ лежат некоторые точки границы многогранника $M_{qk}^{ns}(A)$. Следовательно, существует вершина $M_{qk}^{ns}(A)$, принадлежащая этому конусу, что в силу формулы (7) означает, что $x \notin \operatorname{Sl}(F, X)$, и приводит к противоречию с условием теоремы. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично.

Следствие 2. При условиях теоремы 7 $\forall\, x \in X$ справедливы утверждения:

$$x \in \operatorname{Sl}(F, X) \Leftrightarrow x \in \operatorname{Sl}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A),$$

$$x \in P(F, X) \Leftrightarrow x \in P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A),$$

$$x \in \operatorname{Sm}(F, X) \Leftrightarrow x \in \operatorname{Sm}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A).$$

Если в задаче допустимая область $X = \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$, то для любой точки $x \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$ задачи $P(F, X)$ справедливы необходимые и достаточные условия оптимальности всех указанных видов эффективных решений, полученные в [6].

Если $M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D \neq M_{qk}^{ns}(A)$, то справедливы лишь достаточные условия оптимальности решений.

Теорема 8. Для произвольного $x \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$:

$$x \in P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \Rightarrow x \in P(F, X), \quad x \in \operatorname{Sl}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \Rightarrow x \in \operatorname{Sl}(F, X),$$

$$x \in \operatorname{Sm}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \Rightarrow x \in \operatorname{Sm}(F, X).$$

Доказательство. Поскольку $G = M \bigcap D$, то справедливы импликации:

$$\forall x \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A): x \in P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in P(F, M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D) = P(F, G) \Rightarrow x \in P(F, X),$$

$$x \in \operatorname{Sl}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \Rightarrow x \in \operatorname{Sl}(F, X),$$

$$x \in \operatorname{Sm}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \Rightarrow x \in \operatorname{Sm}(F, X).$$

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ НА КОМБИНАТОРНОМ МНОЖЕСТВЕ ПОЛИРАЗМЕЩЕНИЙ

Данная статья продолжает исследования и развивает результаты работ [1, 5, 6, 8–13, 20–22]. Предложен и обоснован подход к решению задачи $Z(F, X)$, основанный на сведении векторной задачи комбинаторной оптимизации к задаче, определенной на выпуклой оболочке множества полиразмещений, а также развитии метода главного критерия для рассматриваемого класса векторных задач, с учетом того, что число ограничений довольно большое.

Утверждение 4. Если для элементов мультимножества A и коэффициентов c_j, $j \in N_n$, целевой функции задачи $\operatorname{extr}\left\{ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,|\, x \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \right\}$ выполняются соответственно условия $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ и $c_{i_1} \le c_{i_2} \le \ldots \le c_{i_n}$, i_j, $j \in N_n$, то максимум функции $f(x)$ на допустимом множестве достигается в точке $\bar{x} = (\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_n}) \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$, которая определяется как $\bar{x}_{i_j} = a_j \quad \forall j \in N_n$, а минимум — в точке $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_{i_1}, \bar{\bar{x}}_{i_2}, \ldots, \bar{\bar{x}}_{i_n})$, где $\bar{\bar{x}}_{i_{j+1}} = a_{n-j} \quad \forall j \in N_{n-1} \bigcup \{0\}$.

Справедливость данного утверждения очевидна, так как наибольшее значение суммы попарных произведений достигается при сопоставлении возрастающей последовательности c_i с возрастающей последовательностью $\bar{x}_i$, а наименьшее значение — при сопоставлении c_i с убывающей последовательностью $\bar{\bar{x}}_i$.

Предлагаемый подход к решению рассматриваемого класса векторных задач состоит в том, что исходная многокритериальная задача сводится к задаче оптимизации по одному критерию $f_r(x)$, $r \in N_l$, который объявляется главным или основным, при условии, что значения всех остальных критериев должны быть не меньше некоторых установленных величин (пороговых значений) t_i, $i \in N_l \setminus \{r\}$. Таким образом, имеем задачу

$$Z(f_r, X(t_i)): \max\{f_r(x) \,|\, f_i(x) \ge t_i, i \in N_l \setminus \{r\}, x \in X\}.$$

Оптимальное решение x^0 этой задачи всегда слабо эффективно, а если оно единственно (с точностью до эквивалентности $\sim_f$), то и эффективно. Если решение x^0 эффективно, то оно единственное (с точностью до эквивалентности $\sim_f$) решение задачи $Z(f_r, X(t_i))$ при любом фиксированном $r \in N_l$ и $t_i = f_i(x^0)$, $i \in N_l \setminus \{r\}$. Выбор одного из критериев в качестве главного не ограничивает свободы выбора оптимального решения. Для определения пороговых значений t_i, $i \in N_l \setminus \{r\}$, можно воспользоваться утверждением 4, которое дает возможность установления верхних и нижних границ значений критериев $f_i(x)$, $i \in N_l$, на множестве полиразмещений. Предлагается два подхода к решению исходной задачи $Z(F, X)$. Первый состоит в назначении порогам t_i, $i \in N_l \setminus \{r\}$, минимальных значений критериев $f_i(x)$, $i \in N_l$, на множестве полиразмещений с последующим сужением допустимого множества задачи $Z(f_r, X)$ посредством выбора следующих значений порогов t_i, $i \in N_l \setminus \{r\}$, упорядоченных по возрастанию, за минимальными значениями критериев. Второй подход предполагает поиск оптимального решения задачи $Z(f_r, X)$ при назначении максимально возможных значений критериев $f_i(x)$, $i \in N_l$, с последующим расширением ее допустимой области, если исходная задача окажется недопустимой, а в случае ее допустимости — нахождение эффективного либо слабо эффективного решения.

Процедура назначения серии пороговых величин t_i ограничений и в первом и во втором подходе проста. С использованием утверждения 4 она сводится после упорядочения коэффициентов критериев к вычислению скалярного произведения двух векторов, т.е. определению значений линейных критериев. При этом, учитывая структурные особенности множества полиразмещений, величины t_i можно вычислять более эффективно, используя перестановки элементов каждого i-го, $i \in N_s$, подмножества мультимножества A.

Общая идея предложенного метода решения задачи $Z(F, X)$ состоит в последовательном включении ограничений задачи, описывающих область допустимых решений.

1. Сводим многокритериальную задачу $Z(F, G)$ к однокритериальной задаче $Z(f_r, G)$ методом главного критерия. Полагаем $\nu = 0$.

2. Выбираем ограничения начальной системы линейных неравенств, описывающих допустимое множество $G^\nu \subset G$ задачи $Z(f, G^\nu)$, и с помощью симплекс-метода находим ее оптимальное решение x^ν.

3. Если полученное оптимальное решение x^ν — элемент множества полиразмещений, то в точке x^ν проверяем выполнение ограничений, которые не были учтены. Очевидно, ими могут быть лишь те ограничения, которые описывают выпуклое замкнутое множество D. Если решение x^ν не удовлетворяет некоторым ограничениям, то следует добавить к ограничениям допустимой области задачи $Z(f_r, G^\nu)$ наиболее нарушенное из ограничений выпуклого замкнутого множества D. Если решение x^ν удовлетворяет указанным ограничениям, то оно является эффективным решением задачи $Z(F, G)$ и, следовательно, задачи $Z(F, X)$.

4. Если полученное решение x^ν не является точкой множества полиразмещений, то строим отсечение, проходящее через смежные вершины и отсекающее вершину, не являющуюся допустимой (т.е. полиразмещением). Прибавляем это отсечение к ограничениям задачи $Z(f, G^\nu)$.

5. Сравниваем найденное значение $f_r(x^\nu)$ целевой функции с ее значением, определенным на предыдущем шаге. Если оно уменьшается, то отбрасываем несущественные в точке x^ν ограничения. Если значение $f_r(x^\nu)$ не изменяется, то ограничения не отбрасываем. С изменившейся допустимой областью задачи $Z(f_r, G^\nu)$ переходим к п. 2 для ее решения.

Очевидно, что алгоритм приводит к эффективному решению задачи $Z(F, X)$ или установлению ее неразрешимости в результате решения конечного числа подзадач вида $Z(f_r, X)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в результате проведенного исследования векторной комбинаторной задачи, основанного на использовании информации о выпуклой оболочке допустимой области, изучении свойств многогранников, вершины которых определяют заданное комбинаторное множество полиразмещений, разработан и обоснован метод решения сложных многокритериальных задач на указанном комбинаторном множестве. Использование структурных свойств комбинаторных многогранников дает возможность разрабатывать эффективные алгоритмы решения новых классов векторных задач комбинаторной оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1988. — 472 с.
2. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1981. — 287 с.
3. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. — К.: Наук. думка, 2003. — 264 с.
4. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — Киев: Наук. думка, 1995. — 170 с.
5. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 6. — С. 39–46.
6. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доп. НАНУ. — 2003. — № 10. — С. 80–85.
7. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 4. — С. 90–100.
8. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Там же. — 2008. — № 3. — С. 158–172.
9. Semenova N.V., Kolechkina L.M., Nagirna A.M. Vector combinatorial problems in a space of combinations with linear fractional functions of criteria // Inform. Theories and Appl. — 2008. — **15.** — P. 240–245.
10. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Решение и исследование векторных задач комбинаторной оптимизации на множестве полиперестановок // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 6. — С. 26–41.
11. Семенова Н. Векторные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: условия оптимальности и подход к решению // Inform. Theories and Knowledge. — 2008. — **2.** — P. 187–195 (Intern. Book Series «Information science and computing»; N 7).
12. Колечкина Л. Многокритериальные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: структурные свойства решений // Ibid. — P. 180–186.
13. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
14. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев: Наук. думка, 1986. — 265 с.
15. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 104 с.
16. Ємець О. О., Колєчкіна Л. М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. — Київ: Наук. думка, 2005. — 118 с.
17. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981. — 344 с.
18. Aardal K., Hoesel S. Polyhedral techniques in combinatorial optimization 1: Theory // Statist. Neerlandica. — 1996. — **15.** — P. 3–26.
19. Aardal K., Hoesel S. Polyhedral techniques in combinatorial optimization II: Computations // Ibid. — 1999. — **53.** — P. 131–177.
20. Семенова Н.В. Условия оптимальности в векторных задачах комбинаторной оптимизации // Теорія оптимальних рішень. — 2008. — № 7. — С. 153–160.
21. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Розв'язання багатокритеріальних задач оптимізації на множині поліперестановок // Доп. НАНУ. — 2009. — № 2. — С. 41–48.
22. Колечкина Л.Н. Оптимальные решения многокритериальных комбинаторных задач на размещениях // Теорія оптимальних рішень. — 2007. — № 6. — С. 67–73.

Поступила 20.11.2008