УДК 519

Э.Р. СМОЛЬЯКОВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОСОБЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ НОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И НЕИЗВЕСТНЫХ КОНСТАНТ[1]

Ключевые слова: *особые экстремали, дифференциальные уравнения*.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что особые экстремали нередко являются решениями задач оптимального управления и дифференциальных игр [1, 2]. Это происходит, когда вторая производная от гамильтониана задачи по управлению обращается в нуль и, в частности, когда задача линейна по управлению.

В данной работе предлагается особые экстремали использовать в классическом анализе размерностей [3–5], несмотря на статический характер этого анализа, сводящегося к линейной алгебре. Благодаря особым экстремалям его возможности существенно расширяются и удается, не прибегая к экспериментам, без которых не может обходиться классическй анализ размерностей, находить точные уравнения движения и точные значения любых неизвестных постоянных. На многих примерах демонстрируется, какие огромные преимущества дает превращение классического анализа размерностей в экстремальную теорию размерностей за счет введения понятия особой экстремали в задачи линейной алгебры.

Анализ размерностей применяется четыре последних столетия как средство предварительной оценки возможных решений сложных задач, а также с целью поиска параметров подобия или неизвестных размерных коэффициентов. До настоящего времени этот анализ дошел в виде [3–5], известном еще И. Ньютону. Формально он был дополнен в 1914 г. так называемой П-теоремой [3], которая, однако, не содержит ничего принципиально нового, а лишь формулирует его основной принцип в компактной форме.

Серьезные затруднения классического анализа размерностей возникают в связи с тем, что, во-первых, число основных (независимых) размерностей в большинстве задач меньше числа подлежащих определению неизвестных параметров, и поэтому определяющая их линейная система уравнений содержит неизвестных больше, чем число уравнений. Практикуемое для преодоления этой трудности введение дополнительных размерностей является искусственным приемом и приводит часто к несовместной системе уравнений или к ложному решению рассматриваемой задачи. Во-вторых, в таком анализе решение всегда определяется с точностью до неизвестной безразмерной постоянной. Предлагаемые особые экстремали позволяют находить и эту постоянную, а следовательно, получать полное решение задачи, не нуждающееся в экспериментальной проверке.

ОСОБЫЕ ЭКСТРЕМАЛИ В АНАЛИЗЕ РАЗМЕРНОСТЕЙ

В [6] сформулирована теорема, определяющая методику использоваания особых экстремалей в статических линейных задачах, в отношении которых, казалось бы, лишено смысла даже ставить задачи на экстремум. Именно поэтому, вероятно, понятие экстремальности в классическом анализе размерностей никогда не применялось. Однако выяснилось, что если такой анализ [3–5] дополнить принципом экстремальности (а точнее — понятием особых экстремалей), то это существенно расширяет его рамки и позволяет предсказывать новые фундаментальные физи-

[1]Работа выполнена по программе «Фундаментальные основы информационных технологий и систем» РАН, проект № 1–3.

ческие постоянные, находить (как это демонстрируется далее) новые формы уравнений движения, открывающие поистине фантастические возможности.

В частности, в дополнение к известному на сегодня единственному виду свободного движения в евклидовом пространстве — прямолинейному движению с постоянной скоростью — математически доказывается существование специфической формы свободного движения (в отсутствие любых сил, кроме инерциальных, рождаемых самим движением), реализующегося только по траекториям, определяемым трехпараметрическим семейством экспонент. Причем при свободном движении (при котором скорость и инерциальное ускорение изменяются) высшие производные, с одной стороны, выступают в роли сил, обеспечивающих движение тела, а с другой — играют роль компенсаторов инерциального ускорения, действующего на это тело.

Любая траектория подобного свободного движения удовлетворяет любому из бесконечного числа найденных нелинейных дифференциальных уравнений. Каждое из них определяет ту или иную высшую производную, соответствующее управление которой при любой скорости и ускорении тела позволяет обеспечить движение по семейству найденных экспонент с компенсацией перегрузок на движущемся объекте с желаемой точностью. Это означает возможность движения с любыми скоростями и ускорениями, при этом не испытывая действия инерциальных сил (перегрузок). Подобный «безынерционный» переход из заданного начального состояния в заданное конечное происходит при конечнократном переходе с одних кривых параметрического семейства экспонент на другие кривые этого же семейства.

В предельно упрощенном виде особое решение можно продемонстрировать на задаче максимизации или минимизации линейной функции $y = kx$, определенной на множестве $(-\infty < x < +\infty)$ (заметим, что именно к подобным статическим линейным задачам и сводится весь классической анализ размерностей). Формально особый экстремум этой линейной функции достигается в тех точках $x \in R$, в которых $dy / dx = 0$. Если $k \neq 0$, то множество подобных точек пусто, а если $k = 0$, то оно совпадает с множеством R всех вещественных чисел. Следовательно, любая функция $y(x) = \text{const}$ формально является особой экстремалью. Использование этого, казалось бы, тривиального факта позволяет получить далеко не тривиальные результаты в отношении теории размерностей. Продемонстрируем это предварительно на простейшем примере.

Пример 1. Предположим, требуется найти уравнение движения в постоянном гравитационном поле и все его решения. Пусть $x(t)$ — решение, которое ищем, t — время, g — постоянное гравитационное ускорение, а $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ — соответственно первая и вторая производные по времени от положения $x(t)$ движущегося тела. Будем искать решение $x(t)$ в виде $x(t) = C\ddot{x}^k \dot{x}^l g^m t^n$, где C — неизвестная безразмерная постоянная. Запишем это уравнение в основных размерностях системы [СГС] (сантиметр, грамм, секунда), принимая обозначения: $[L]$ — размерность длины, $[T]$ — размерность времени. Получаем

$$[L] = \left[\frac{L}{T^2}\right]^k \left[\frac{L}{T}\right]^l \left[\frac{L}{T^2}\right]^m [T]^n.$$

Приравнивая размерности с обеих сторон, приходим к следующей системе двух линейных уравнений с четырьмя неизвестными степенями: $1 = k + l + m$, $0 = 2k + l + 2m - n$. Выражая из этой системы любые две степени через остальные, получаем, например, $k = n - m - 1$, $l = 2 - n$. В результате имеем

$$x = C\,\ddot{x}^{n-m-1} \dot{x}^{2-n} g^m t^n.$$

Логарифмируя это выражение и приравнивая нулю частные производные от $\lg x$ по m и n (т.е. определяя особые экстремали), приходим к уравнениям

$$\frac{\partial \lg x}{\partial m} = -\lg \ddot{x} + \lg g = 0, \quad \frac{\partial \lg x}{\partial n} = \lg \ddot{x} - \lg \dot{x} + \lg t = 0.$$

Отсюда находим следующие два экстремальных решения: $\ddot{x} = g$ и $\dot{x} = \ddot{x}t = gt$. Подставляя их в выражение для x, получаем решение $x = Cgt^2$, а обратная подстановка этого решения в экстремальные решения дает $C = 1/2$. Таким образом, анализ размерностей с учетом особых экстремалей позволил получить уравнение движения $\ddot{x} = g$ и найти его точные решения $x = gt^2/2$, $\dot{x} = gt$. На основе классического анализа размерностей получить приведенные точные решения без помощи эксперимента (необходимого для нахождения неизвестной безразмерной константы C) принципиально невозможно.

В общем случае будем пользоваться сформулированной в [6] приведенной далее теоремой.

Допущения. Пусть выбрана некоторая система единиц с основными единицами $B_1, \ldots, B_n$ (например, $B_1 = L$ — единица длины, $B_2 = M$ — единица массы и $B_3 = T$ — единица времени в гауссовой системе единиц СГС и заданы k известных экстремальных базовых постоянных $A_1, \ldots, A_k$ (например, заряд электрона $A_1 = e$, скорость света $A_2 = c$, гравитационная постоянная $A_3 = G$) и $m-k$ произвольно выбранных физических параметров $A_{k+1}, \ldots, A_m$, имеющих размерности $[A_i] = [B_1]^{\alpha_{i1}}, \ldots, [B_n]^{\alpha_{in}}$, $i = 1, \ldots, m$. Пусть находим представление произвольного параметра X, имеющего размерность $[X] = [B_1]^{\beta_1}, \ldots, [B_n]^{\beta_n}$, которое запишем в виде, более удобном для дальнейших ссылок на него:

$$R \overset{\Delta}{=} X - CA_1^{\alpha_1} \ldots A_m^{\alpha_m} = 0, \tag{1}$$

где C — произвольная безразмерная постоянная. Это равенство в аргументах размерностей принимает вид

$$[X] = [B_1]^{\beta_1} \ldots [B_n]^{\beta_n} = ([B_1]^{\alpha_{11}} \ldots [B_n]^{\alpha_{1n}})^{\alpha_1} \ldots ([B_1^{\alpha_{m1}} \ldots [B_n]^{\alpha_{mn}})^{\alpha_m}.$$

Уравнивание размерностей с обеих сторон равенства приводит к линейной системе n уравнений с m неизвестными α_i:

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \alpha_i, \ j = 1, \ldots, n.$$

Если данная система несовместна, то это означает, что параметры A_i выбраны неудачно и их следует заменить. Если система совместна, то, в зависимости от ранга n_0 матрицы $\{\alpha_{ij}\}$, она позволяет выразить n_0 параметров α_i $(n_0 \le n)$ через остальные $(m - n_0)$, т.е. $\alpha_1(\alpha_{n_0+1}, \ldots, \alpha_m), \ldots, \alpha_{n_0}(\alpha_{n_0+1}, \ldots, \alpha_m)$.

Теорема 1. В случае удовлетворения приведенных допущений задача представления параметра X через параметры A_i, $i = 1, \ldots, m$, позволяет найти $m - n_0$ экстремальных формул, связывающих между собой параметры A_i, с помощью особых экстремалей из условий $\partial \lg X / \partial \alpha_j = 0$, $j = n_0 + 1, \ldots, m$, а также n_0 экстремальных формул, выражающих n_0 основных единиц через параметры A_i, $i = 1, \ldots, m$, из условий $\partial \lg R / \partial \alpha_j = 0$, в которые вместо X по очереди подставляются параметры B_j, $j = 1, \ldots, n_0$.

Если равенство $R = 0$ при некотором $C \ne 0$ совместимо со всеми особыми экстремалями, то существует огибающая параметрического семейства экстремалей (определяющая некоторую реальность), а если несовместимо, то искомое представление X недопустимо.

Следствие 1. Если некоторый параметр выражается только через экстремальные базовые параметры некоторой формулой, то он также является экстремальным базовым, причем существует множество и других, принципиально различных формул его представления через экстремальные базовые параметры. Все формулы определяют одно и то же численное значение для этого параметра, что принципиально отличает его от любого неэкстремального параметра.

Следствие 2. Если какая-либо формула содержит более одного неэкстремального параметра (например, в формуле $\hbar = (1/\alpha)\hat{\hbar}$ таковыми являются постоянная Планка $\hbar$ и константа α, как это станет понятно из изложенного далее), то подобную формулу следует считать неэкстремальной или ложной экстремальной, независимо от способа ее получения. Неэкстремальные параметры выражаются через любые заданные параметры, как правило, всего единственной формулой; в этом их существенное отличие от экстремальных базовых параметров.

УРАВНЕНИЯ «БЕЗЫНЕРЦИОННОГО» ДВИЖЕНИЯ

Продемонстрируем возможности использования теоремы 1 и следствий из нее на ряде примеров. Прежде всего покажем, как с ее помощью можно получить новые дифференциальные уравнения движения, указывающие на неизвестные до сих пор особенности существующего мира.

Пример 2. Ради упрощения изложения ограничимся двумерным евклидовым пространством (x, t) (в случае многомерного пространства полученные результаты можно отнести к его отдельным компонентам). Пусть требуется найти уравнения движения тела при учете любых производных по времени от состояния $x(t)$. Пусть $x(t)$ — решение этих уравнений, t — время, $g(t)$ — воздействие внешнего ускорения на тело, а $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, ... — соответственно первая, вторая, третья, четвертая и т.д. производные по времени от положения $x(t)$ движущегося тела. Согласно принципу обязательного выделения в задаче «базовых» и «производных» величин [6] будем искать решение $x(t)$ в виде

$$x(t) = C\ddot{x}^k \dot{x}^l g^m x^{(3)p} x^{(4)q} x^{(5)r} x^{(6)s} x^{(7)u} x^{(8)v},$$

где C — неизвестная безразмерная постоянная. Запишем это уравнение в основных размерностях системы СГС, принимая обозначения: $[L]$ — размерность длины, а $[T]$ — размерность времени. Получаем

$$[L] = \left[\frac{L}{T^2}\right]^k \left[\frac{L}{T}\right]^l \left[\frac{L}{T^2}\right]^m \left[\frac{L}{T^3}\right]^p \left[\frac{L}{T^4}\right]^q \left[\frac{L}{T^5}\right]^r \left[\frac{L}{T^6}\right]^s \left[\frac{L}{T^7}\right]^u \left[\frac{L}{T^8}\right]^v.$$

Приравнивая размерности с обеих сторон, приходим к следующей системе двух линейных уравнений с девятью неизвестными (степенями):

$$1 = k + l + m + p + q + r + s + u + v,$$

$$0 = 2k + l + 2m + 3p + 4q + 5r + 6s + 7u + 8v.$$

Выражая из этой системы любые две степени через остальные, получаем, например,

$$k = -m - 2p - 3q - 4r - 5s - 6u - 7v - 1, \qquad l = 2 + p + 2q + 3r + 4s + 5u + 6v,$$

что приводит к разложению

$$\begin{aligned} x = C\ddot{x}^{(-m-2p-3q-4r-5s-6u-7v-1)}\dot{x}^{(2+p+2q+3r+4s+5u+6v)} \times \\ \times g^m x^{(3)p} x^{(4)q} x^{(5)r} x^{(6)s} x^{(7)u} x^{(8)v}. \end{aligned} \tag{1a}$$

Логарифмируя это выражение и приравнивая нулю частные производные от $\lg x$ по m, p, q, r, s, u, v (т.е. определяя особые экстремали), приходим к следующему множеству нелинейных дифференциальных уравнений, найти которые (кроме хорошо известного первого из них) без помощи экстремальной теории размерностей [6] не представлялось возможным:

$$\ddot{x} = g, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{x}^2 = \dot{x}x^{(3)}, \ \ddot{x}^3 = \dot{x}^2 x^{(4)}, \ \ddot{x}^4 = \dot{x}^3 x^{(5)}, \\ &\ddot{x}^5 = \dot{x}^4 x^{(6)}, \ \ddot{x}^6 = \dot{x}^5 x^{(7)}, \ \ddot{x}^7 = \dot{x}^6 x^{(8)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, что в (3) все четные производные $x^{(2k)}$, $k>1$, имеют тот же знак, что и $\ddot{x}$, а все нечетные — знак $\dot{x}$. Легко заметить также, что неизвестная до сих пор система нелинейных дифференциальных уравнений (3), по существу, бесконечна и все возможные уравнения типа (3) можно записать в виде

$$\ddot{x}^{k+1}=\dot{x}^k x^{(k+2)},\ k=1,2,3,\ldots \tag{4}$$

Первое уравнение системы уравнений (4) имеет общие решения

$$x=e^{C_1 t}\left(C_2\int_{t_0}^{t} e^{-C_1 s}ds+C_3\right)=e^{C_1 t}\left(\frac{C_2}{C_1}e^{-C_1 t_0}+C_3\right)-\frac{C_2}{C_1}=K_1 e^{C_1 t}+K_2, \tag{5}$$

$$\dot{x}=\mathrm{const}, \tag{6}$$

причем уравнение (6) описывает хорошо известное свободное движение тела, которому, как полагалось, не существует альтернатив. Однако уравнения (4) также описывают свободное движение, что вытекает из самого их вида, включающего только инерциальные переменные $x^{(k)}$ (при $m=0$ в (1а)).

Интересно отметить, что решения (5), (6) удовлетворяют и всем остальным уравнениям бесконечной системы (4), а не только первому из них.

Из вида уравнений (4) следует, что при любых скоростях и ускорениях удовлетворение этих уравнений в любой момент t можно обеспечить посредством использования управления любой из высших производных по закону $x^{(k+2)}(t)=\ddot{x}^{k+1}/\dot{x}^k$, обеспечивающему, с одной стороны, движение по траекториям семейства (5), а с другой — компенсацию инерциального ускорения ($\ddot{x}$), в связи с чем уравнения (4) можно назвать уравнениями «компенсатора» инерциального ускорения.

Заметим, что, во-первых, с высшими производными еще не приходилось сталкиваться потому, что весьма экзотические условия, при которых они начинают влиять на движение объекта, по существу, никогда не достигаются в известных к настоящему времени как рукотворных, так и природных динамических системах; во-вторых, изложенные выше результаты хорошо согласуются с теоретическими результатами работ [7, 8], полученными совершенно иными путями; в-третьих, уравнения (4) универсальны и имеют место в любых динамических процессах, в частности, они позволяют управлять даже временем (переходами в прошлое и будущее).

В общем случае компенсация инерциального ускорения возможна только при движении объекта, т.е. при $|v(t)|\neq 0$, причем если, например, на i-м участке траектории (5) величина $x^{(3)}=\ddot{x}^2/\dot{x}$ велика (что естественно для малых скоростей движения), то на этом участке целесообразно отказаться от траектории движения (5). Произвольное изменение ускорения $\ddot{x}(t_i)$ и скорости его изменения $x^{(3)}(t_i)$ в любые дискретные моменты времени t_i и управление третьей производной между этими моментами по экспоненциальному закону $x^{(3)}(t)=\ddot{x}^2/\dot{x}$ позволяют обеспечить безынерционное движение (несмотря на ступенчатое изменение $\ddot{x}$ и $x^{(3)}$ в моменты t_i) из любого начального состояния $(x(t_0),\ \dot{x}(t_0))$ в любое конечное $(x(T),\ \dot{x}(T))$. Причем эта безынерционная траектория в значительной степени реализуется за счет скачкообразного изменения в моменты t_i ускорения $\ddot{x}(t_i-0)$, достигаемого в конце i-го участка, на требуемое расчетное значение $\ddot{x}(t_i+0)$ и скачкообразного изменения $x^{(3)}(t_i-0)$ на $x^{(3)}(t_i+0)$, что не нарушает удовлетворения уравнений (4) между точками t_i и непрерывности как самой траектории (5), так и скорости движения на всем интервале (t_0, T).

Поскольку создание любого желаемого ускорения (и скорости его изменения) в любой момент не представляет принципиальных трудностей, реализация безынерционной траектории, составленной из отрезков экспонент, также не представляет принципиальных затруднений.

В заключение отметим, что уравнения (2), (3) при $g \neq 0$ имеют решение $x(t)$ в том и только том случае, если $g(t)$ — экспоненциальная функция, совпадающая со второй производной по времени t от функции (5). Следовательно, движение с компенсацией инерциального ускорения возможно только по экспоненциальным кривым семейства (5). Причем если в любой конкретной задаче найдена желательная (в частности, оптимальная) траектория движения объекта $x(\hat{g}(t))$, то всегда имеется возможность ее аппроксимировать (с любой желаемой точностью) траекторией $x(g(t))$, составленной из множества участков экспонент (5), при движении по которой объект не испытывает никаких перегрузок.

Заметим также, что при $m = 0$ в (1а) (т.е. при $g = 0$) подстановка экстремалей (3) в разложение (1а) приводит к решению $x = C\dot{x}^2 / \ddot{x}$, а обратная подстановка этого решения в любое из уравнений (3) дает $C = 1$ и $\dot{x}^2 = x\ddot{x}$, причем последнее уравнение оказывается одним из множества уравнений (при $k = 1$) $\dot{x}^{k+1} = x^k x^{(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$ (каждое отвечает соответствующему ему уравнению (4)), решение любого из которых представляет собой двухпараметрическое подсемейство $x = K_1 e^{C_1 t}$ трехпараметрического семейства (5).

Особо отметим, что экстремали (5) указывают не только на возможность компенсации инерциальных перегрузок с помощью высших производных, но и дают независимое от [7] теоретическое обоснование того, что высшие производные способны вызывать силовое воздействие на динамическую систему (в данном случае весьма сильное, если учесть, что траектория и все производные от нее изменяются экспоненциально, т.е. весьма быстро), которое может приводить к ускорению ее центра масс.

ПОИСК НОВЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ С ПОМОЩЬЮ ОСОБЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

Рассмотрим характерный пример поиска новых физических постоянных.

Пример 3. Пусть $A_1 = e$, $A_2 = c$, $A_3 = G$ — фундаментальные постоянные, которые можно назвать экстремальными базовыми, поскольку они удовлетворяют любым полученным на основе теоремы 1 экстремальным формулам, $A_4 = h_0$ — аналог постоянной Планка, $A_5 = L_0$ — произвольно выбранная постоянная длины, $A_6 = T_0$ — некоторая постоянная времени, $A_7 = M_0$ — постоянная массы. Пусть находится представление некоторого параметра X, размерность которого $[X] = [T]^k [L]^l [M]^m$, через параметры $A_1, \ldots, A_7$, причем без потери общности можно принять, что все величины задаются в системе СГС. Это представление находим в виде

$$R \stackrel{\Delta}{=} X - Ce^{\beta} c^{\gamma} L_0^{\delta} G^p h_0^q T_0^{\theta} M_0^{\omega} = 0, \tag{7}$$

где C — некоторый безразмерный коэффициент.

Запишем это представление для X в базовых размерностях системы СГС:

$$[X] \stackrel{\Delta}{=} [T]^k [L]^l [M]^m =$$

$$= \left[\frac{L^{3/2} M^{1/2}}{T}\right]^{\beta} \left[\frac{L}{T}\right]^{\gamma} [L]^{\delta} \left[\frac{L^3}{MT^2}\right]^{p} \left[\frac{ML^2}{T}\right]^{q} [T]^{\theta} [M]^{\omega}. \tag{8}$$

Приравнивая размерности с обеих сторон, получаем систему трех линейных уравнений с семью неизвестными (рациональные числа k, l, m здесь предполагаются заданными, так как они определяют конкретный параметр X):

$$k = -\beta - \gamma - 2p - q + \theta, \quad l = \frac{3}{2}\beta + \gamma + \delta + 3p + 2q, \quad m = \frac{1}{2}\beta - p + q + \omega.$$

Решая ее относительно (β, γ, δ), находим

$$\beta = 2(m + p - q - \omega), \quad \gamma = q + 2\omega + \theta - 4p - k - 2m, \quad \delta = \omega - 2p - \theta + k + l - m.$$

Подставляя полученные выражения для коэффициентов β, γ и δ в (1), получаем для параметра X представление

$$R \overset{\Delta}{=} X - Ce^{2(m+p-q-\omega)} c^{(2\omega+\theta+q-4p-k-2m)} L_0^{(\omega-2p-\theta+k+l-m)} G^p h_0^q T_0^\theta M_0^\omega = 0. \quad (9)$$

Логарифмируя (9) и приравнивая нулю частные производные от $\lg X$ по p, q, θ и ω (т.е. определяя особые экстремали), получаем следующие экстремальные базовые представления (причем именно экстремальные базовые, согласно следствиям 1 и 2) для L_0, h_0, T_0 и M_0:

$$\frac{\partial \lg X}{\partial p} = 2\lg e - 4\lg c - 2\lg L_0 + \lg G = 0, \ \hat{L} = \frac{e\sqrt{G}}{c^2},$$

$$\frac{\partial \lg X}{\partial q} = -2\lg e + \lg c + \lg h_0 = 0, \ \hat{h} = \frac{e^2}{c}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \lg X}{\partial \theta} = \lg c + \lg T_0 - \lg L_0 = 0, \ \hat{T} = \hat{L} / c = \frac{e\sqrt{G}}{c^3},$$

$$\frac{\partial \lg X}{\partial \omega} = -2\lg e + 2\lg c + \lg L_0 + \lg M_0 = 0, \ \hat{M} = \frac{e^2}{c^2 \hat{L}} = \frac{e}{\sqrt{G}}.$$

Эти параметры имеют следующие численные значения:

$$\hat{h} = \frac{e^2}{c} = 7{,}6957018 \cdot 10^{-30} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}, \qquad \hat{L} = \frac{e\sqrt{G}}{c^2} = 1{,}3804513 \cdot 10^{-34} \text{ см},$$

$$\hat{T} = \frac{e\sqrt{G}}{c^3} = 4{,}6046906 \cdot 10^{-45} \text{ с}, \quad \hat{M} = \frac{e}{\sqrt{G}} = 1{,}859544 \cdot 10^{-6} \text{ г}. \quad (11)$$

Если в (3) задать X в виде $X = T_0^k L_0^l M_0^m$ и приравнять нулю частные производные от $\lg R$ по k, l и m (т.е. найти особые экстремали), то снова приходим к уже найденным формулам (10). Однако теперь в явном виде получаем экстремальные формулы именно для основных n_0 единиц используемой системы счисления (в данном случае для L, M, T при $n_0 = 3$):

$$\frac{\partial \lg R}{\partial k} = \lg T_0 - \lg e + 3\lg c - \frac{1}{2}\lg G = 0, \ \hat{T} = \frac{e\sqrt{G}}{c^3},$$

$$\frac{\partial \lg R}{\partial l} = \lg L_0 - \lg e + 2\lg c - \frac{1}{2}\lg G = 0, \ \hat{L} = \frac{e\sqrt{G}}{c^2},$$

$$\frac{\partial \lg R}{\partial m} = \lg M_0 - \lg e + \frac{1}{2}\lg G = 0, \ \hat{M} = \frac{e}{\sqrt{G}}.$$

Заметим, что численное значение любой экстремальной базовой постоянной может быть найдено из множества эквивалентных экстремальных формул, например:

$$\hat{h} = \frac{e^2}{c} = \frac{ec\hat{L}_0}{\sqrt{G}} = \frac{c^3 \hat{L}_0^2}{G} = \frac{e^{(3/2)} \hat{L}_0^{(1/2)}}{G^{(1/4)}} = \ldots, \ \hat{L} = \frac{e\sqrt{G}}{c^2} = \frac{\hat{h}\sqrt{G}}{ec} = \frac{\hat{h}^2 \sqrt{G}}{e^3} = \frac{\hat{h}^5 c^3 \sqrt{G}}{e^9} = \ldots, \quad (12)$$

$$\hat{T} = \frac{e\sqrt{G}}{c^3} = \frac{\hat{h}^3 \sqrt{G}}{e^5} = \sqrt{\frac{G\hat{h}}{c^5}} = \frac{\hat{h}\sqrt{G}}{ec^2} \ldots, \qquad \hat{M} = \frac{e}{\sqrt{G}} = \sqrt{\frac{c\hat{h}}{G}} = \frac{e^2}{c^2 \hat{L}} = \frac{\hat{h}}{c\hat{L}} \ \ldots$$

Подставляя найденные экстремальные базовые постоянные $\hat{h}$, $\hat{L}$, $\hat{T}$ и $\hat{M}$ в (9), получаем, что для произвольного физического параметра X, имеющего размерность $[T]^k[L]^l[M]^m$, можно найти его представление через главные физические постоянные e, c, G:

$$X = e^{(k+l+m)} c^{-(3k+2l)} G^{\frac{1}{2}(k+l-m)}. \tag{13}$$

Данное равенство показывает, что если в задаче имеется некоторое множество параметров A_i, среди которых и параметры (e, c, G), то во множестве всех этих параметров ярко проявляется иерархия, в которой три фундаментальные физические постоянные являются главными и через них выражаются остальные.

Проведем сравнение полученных постоянных (11) с аналогичными постоянными, предложенными М. Планком. Рассмотрим три постоянные Планка:

$$L_{Pl} = \sqrt{G\hbar c^{-3}} = 1{,}6\cdot 10^{-33}\,\text{см}, \quad M_{Pl} = \sqrt{c\hbar G^{-1}} = 2{,}2\cdot 10^{-5}\,\text{г},$$
$$T_{Pl} = \sqrt{G\hbar c^{-5}} = 5{,}4\cdot 10^{-44}\,\text{с}. \tag{14}$$

С помощью классического анализа размерностей можно найти множество формул представления любой конкретной физической величины через другие физические величины. Однако если эти формулы включают в себя неэкстремальные («производные») величины, то каждая из них дает, в общем случае, разные численные значения для этой величины. Например, если ищем формулы представления величины T через множество других физических величин $(e, c, G, h, \ldots)$, то в общем случае получаем $T_1 = (e\sqrt{G})/c^3$, $T_2 = (h^3\sqrt{G})/e^5$, $T_3 = \sqrt{(Gh)/c^5}, \ldots$.

Если эти формулы основываются на экстремальных базовых постоянных (т.е. полученных на основе особых экстремалей теоремы 1), то выполняются равенства $T_1 = T_2 = T_3 = \ldots = 4{,}6\cdot 10^{-45}$ с (см. (12)). Если они включают в себя неэкстремальные («производные») базовые постоянные (например, постоянную Планка $\hbar = 1{,}055\cdot 10^{-27}$ [СГС]), то дают разные численные значения для T: $T_1 = 4{,}6\cdot 10^{-45}$ с, $T_2 = 1{,}2\cdot 10^{-38}$ с, $T_3 = 5{,}4\cdot 10^{-44}$ с, ... Следовательно, М. Планк не имел никаких оснований выбирать для расчета параметра T формулу $T_{Pl} = \sqrt{G\hbar c^{-5}}$, а не формулу $T = \hbar^3 G^{1/2} e^{-5}$ или какую-либо другую.

Пример 4. Попробуем спрогнозировать аналоги постоянной Планка для миров иных размеров. Из изложенного видно, что использование особых экстремалей решает проблему несовпадения числа определяемых параметров с числом основных единиц размерности, позволяет находить, не прибегая к эксперименту, даже безразмерные неизвестные коэффициенты и выявляет иерархию на множестве исследуемых величин. Из примера 3 следует, что экстремальная постоянная $\hat{h}$ всегда выступает в паре с экстремальным коэффициентом длины $\hat{L}$, причем эта пара постоянных отвечает классической тройке фундаментальных физических постоянных (e, c, G) и, по-видимому, формирует некоторый мир (назовем его субмикрокосмосом), основу образования которого составляет, вероятно, некоторая элементарная субмикрочастица размером $\hat{L}$. Это наводит на мысль, что и важнейшая в ядерной физике постоянная Планка $\hbar$ тоже должна быть связана с какой-то постоянной длины L_q (существование которой предполагал еще М. Планк), определяющей, по-видимому, нижнюю границу микрокосмоса. Но тогда логично предположить, что существуют и другие пары (h_k, L_k) «производных» фундаментальных физических постоянных, связанных с той же тройкой (e, c, G).

«Постоянную тонкой структуры» $1/\alpha = \hbar/\hat{h}$ можно выразить через размерные фундаментальные физические постоянные, если воспользоваться разложением $\hbar = e^{\beta} c^{\gamma} L_q^{\delta} G^{p}$, для которого находим $\beta = 2 - \delta$, $\gamma = 2\delta - 1$, $p = -\delta/2$, а следовательно, имеем

$$\hbar = e^{(2-\delta)} c^{(2\delta-1)} L_q^{\delta} G^{(-\delta/2)}. \tag{15}$$

Если подставить в (15) $\delta \equiv 1/5$ и $L_q = 6{,}6710825 \cdot 10^{-24}$ см, то получаем следующую зависимость «постоянной тонкой структуры» через фундаментальные физические постоянные (e, c, G, L_q):

$$\hbar = e^{\frac{9}{5}} c^{-\frac{3}{5}} L_q^{\frac{1}{5}} G^{-\frac{1}{10}} = \frac{e^2}{c} \left[\left(\frac{c^2 L_q}{e\sqrt{G}} \right)^{\frac{1}{5}} \right] = \hat{h} \left(\frac{L_q}{\hat{L}} \right)^{\frac{1}{5}} = \hat{h} \left(\frac{1}{\alpha} \right). \tag{16}$$

Итак, помимо экстремальной пары фундаментальных констант $(\hat{h}, \hat{L})$ (ответственной за процессы в субмикрокосмосе размером $10^{-34} - 10^{-24}$ см), удовлетворяющей (15) при любом δ, этому равенству при $\delta = 1/5$ удовлетворяет также пара $(\hbar, L_q)$, предположительно ответственная за процессы в микрокосмосе, которыми занимается современная ядерная физика [9, 10]. Причем постоянная L_q оказалась выраженной весьма простой функцией от основных фундаментальных физических постоянных $(e, c, G, \hbar, 1/\alpha)$.

Поскольку теоретические основы квантовой механики [9] построены вне зависимости от того, какова конкретная величина постоянной Планка $\hbar$ (и отвечающей ей постоянной L_q), эта механика должна быть справедлива не только для микрокосмоса, формируемого парой $(\hbar, L_q)$, но и для любых других миров, для которых лишь должны быть иными аналогичные пары постоянных (h_k, L_k). Отсюда следует, что угловые скорости вращения (зависящие от h_k) любых невозмущенных (или слабовозмущенных) объектов из мира размером (L_k, L_{k+1}), формируемого парой констант (h_k, L_k), должны подчиняться уравнению

$$\frac{h_k}{2} = \int_V \omega r^2 \rho dV = \text{const}, \tag{17}$$

где ρ — распределенная массовая плотность объекта, а ω — угловая скорость его вращения. В (11) берется $h_k / 2$ в соответствии с формулами (58.1) и (59.15) квантовой механики [9]. Из (17), в свою очередь, следует, что угловые скорости вращения любых невозмущенных (или слабовозмущенных) объектов в любом мире вовсе не случайны и не произвольны. Они — квантованы.

Продемонстрируем, как можно попытаться спрогнозировать, например, пару констант (h_p, L_p), предположительно ответственную за процессы в макрокосмосе. Корректность прогноза существенно зависит от правильности выбора «эталонного» тела, в отношении которого должна быть уверенность, что его угловая скорость является результатом действия констант (h_p, L_p), а не возмущающего воздействия внешней среды. В качестве подобного тела вполне можно представить Землю, относительно слабо возмущаемую Солнцем и Луной, для которой известны угловая скорость вращения $\omega = 7{,}292 \cdot 10^{-5}$ рад/с и момент инерции $J = 8{,}1 \cdot 10^{44}$ г$\cdot$ см^2 [11], а следовательно, и кинетический момент $h_e = \omega J = 5{,}91 \cdot 10^{40}$ г$\cdot$ см^2/с. В качестве фундаментальной константы L_p для макрокосмоса можно представить диаметр протона $L_p = 1{,}628 \cdot 10^{-13}$ см (наименьшей долгоживущей частицы, из которой формируются все небесные тела). Найти константу h_p может помочь уравнение (15), если при этом окажется возможным выразить постоянные L_p и h_p через фундаментальные постоянные (e, c, G), используя степени, определяемые рациональными числами.

Подставив в уравнение (15) h_e вместо $\hbar$ и L_p вместо L_q и переписав его в виде, аналогичном уравнению (16), получаем $\delta \approx 3{,}3165 \approx 10/3$. Если в полученное уравнение подставить $\delta \equiv 10/3$, то определяется новая безразмерная постоянная $1/\alpha_p \stackrel{\Delta}{=} h_p / \hat{h} = (L_p / \hat{L}_0)^{(10/3)} = 1{,}7329162 \cdot 10^{70}$ и новая гипотетическая размерная физическая постоянная для макрокосмоса $h_p = 1{,}3336 \cdot 10^{41}$ г$\cdot$см^2/с.

Согласно (17) и формулам (58.1) и (59.15) из [9] кинетический момент Земли (спин) в отсутствие возмущений должен равняться величине $\hat{h}_e = \frac{h_p}{2} = 6{,}668 \cdot 10^{40}$ [СГС], а рассогласование $\Delta h_e = \hat{h}_e - h_e$ следует отнести на счет возмущения угловой скорости Земли Солнцем и другими планетами и (или) неточного знания момента инерции Земли J, уточнить который для Земли и таких слабо возмущенных планет, как Юпитер, Сатурн и Уран, можно попытаться с помощью уравнения (17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брайсон А., Ю Ши Хо. Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972. — 544 с.
2. Смольяков Э.Р. Теория конфликтных равновесий. — М.: Едиториал УРСС, 2005. — 302 с.
3. Buckingham E. // Phys. Rev. — 1914. — **4**. — P. 345.
4. Бриджмен П.В. Анализ размерностей. — Л.-М.: ГТТИ, 1934. — 120 с.
5. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. — М.: Наука, 1977. — 326 с.
6. Смольяков Э.Р. Особые экстремали в анализе размерностей // Докл. РАН. — 2008. — **421**, № 5. — С. 602–606.
7. Смольяков Э.Р. Нелинейные законы движения и обоснование движения инерцоидов // Там же. — 2003. — **393**, № 6. — С. 770–775.
8. Смольяков Э.Р. Интегралы движения в двойственном пространстве // Там же. — 2007. — **414**, № 4. — С. 459–463.
9. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. — М.: Наука, 1976. — 664 с.
10. Бопп Ф. Введение в физику ядра, адронов и элементарных частиц. — М.: Мир, 1999. — 278 с.
11. Космонавтика. Маленькая энциклопедия / Под ред. В.П. Глушко. — М.: Советская энциклопедия, 1970. — 592 с.

Поступила 25.09.2008