УДК 004.75

В.А. ПРУСОВ, А.Е. ДОРОШЕНКО, Р.И. ЧЕРНЫШ

ВЫБОР ПАРАМЕТРА МОДИФИЦИРОВАННОГО АДДИТИВНО-УСРЕДНЕННОГО МЕТОДА

Ключевые слова: *аддитивно-усредненный метод расщепления, точность решения, время решения, оптимальное значение*.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] представлена модификация аддитивно-усредненного метода расщепления [2, 3]. Предложенный алгоритм состоит из последовательности m-циклов, структура которых разделена на первый и второй этапы. Фактически параметр m схемы непосредственно влияет на частоту применения второго этапа, т.е. усреднения к решениям, полученным по всем координатным направлениям. Качественное влияние этого параметра на точность решения очевидна: с ростом значений m ошибка в решении также возрастает.

По временным затратам этап усреднения значительно менее трудоемок в вычислительном плане по сравнению с первым этапом. Поэтому влияние параметра m на решения задачи будет также зависеть от общего количества временных шагов. Возможны случаи, когда уменьшение временных затрат с ростом m будет незначительным. Если посмотреть на проблему глубже и учесть фактор реализации задачи на многопроцессорной ЭВМ [4–6] с физически распределенной памятью, то становится понятно, что кроме арифметических операций для второго этапа необходимо осуществлять пересылку и прием данных. Как известно, обмен данными составляет существенную часть от общих затрат времени ЭВМ на решение задачи, поэтому эффект влияния параметра m на время решения задачи усиливается.

Роль параметра схемы двойственная: рост его значений уменьшает общие временные затраты на решение задачи, но при этом понижается точность решения. Для определения оптимального значения m необходимо задать приоритетность относительно точности и времени решения, учитывая как специфику самой задачи, так и вычислительной техники.

Настоящая работа посвящена проблеме выбора оптимального значения параметра m. В следующих двух разделах рассмотрено влияние параметра на время и точность решения задачи, а в третьем — определен диапазон значений, которые можно считать оптимальными в смысле приведенных критериев. Сделан также выбор значения параметра, имеющего характеристики, наиболее близкие к идеальным.

ВРЕМЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Определим характер влияния параметра m на общее время решения задачи при использовании одного процессора ЭВМ, т.е. последовательной реализации модифицированного аддитивно-усредненного метода [1].

Будем полагать, что пространственная размерность задачи равна p и для решения всех одномерных подзадач используется один и тот же численный метод. Введем обозначения: a — затраты времени, необходимые для перехода на следующий временной слой по некоторому координатному направлению на первом этапе; b — затраты времени, необходимые для этапа усреднения; c — остальное время, затрачиваемое в m-цикле (постановка краевых условий, вычисление правой части, коэффициентов и т.д.). Тогда время счета m-цикла составит $pma+b+mc$, а общее время решения задачи при шаге $\tau = T/N$ равно

$$\theta(m) = \frac{N}{m}(pma+b+mc) = N(pa+c) + \frac{bN}{m}. \qquad (1)$$

Рассмотрим функцию

$$\theta(w)=N(pa+c)+\frac{bN}{w},\ \ w\ge 1.$$

Очевидно, что она монотонно убывающая,

$$\theta'(w)=-\frac{bN}{w^2}<0,$$

и имеет горизонтальную асимптоту $\lim\limits_{w\to+\infty}\theta(w)=N(pa+c)$. Поэтому максимально возможное уменьшение времени решения составляет

$$\theta(1)-\theta(+\infty)=bN. \tag{2}$$

ТОЧНОСТЬ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

С целью определить характер влияния параметра m на точность сначала рассмотрим два численных решения на некотором промежутке $[t^{n+1-m};t^{n+1}]$: $y_{(m)}^{n+1}$ — решение, полученное модифицированным аддитивно-усредненным методом $(m>1)$; $y_{(1)}^{n+1}$ — решение, полученное обычным аддитивно-усредненным методом $(m=1)$.

Согласно [1] имеем

$$y_{(m)}^{n+1}=\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}K_k^m\right)y^{n+1-m}+\tau\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}K_k^l L_k f_k^{n-l},$$

$$y_{(1)}^{n+1}=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}K_k\,y_{(1)}^{n}+\tau\sum_{k=1}^{p}L_k f_k^n, \tag{3}$$

где $L_k=(I+p\tau B_k)^{-1}$, $K_k=L_k(I+p\tau A_k)$, $f^n=\sum\limits_{k=1}^{p}f_k^n$, A_k, B_k — матрицы, зависящие от метода решения одномерной задачи.

После рекуррентного использования равенства (3) m раз получаем

$$y_{(1)}^{n+1}=\frac{1}{p^m}\sum_{s_i=1}^{p}\prod_{i=1}^{m}K_{s_i}\,y_{(1)}^{n+1-m}+\tau\sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{1}{p^l}\sum_{k=1}^{p}\sum_{s_i=1}^{p}\prod_{i=1}^{l}K_{s_i}L_k f_k^{n-l}\right),$$

где $\sum\limits_{s_i=1}^{p}=\sum\limits_{s_1=1}^{p}\ldots\sum\limits_{s_l=1}^{p}$ — вложенные суммы по всем значениям индексов $s_1,\ldots,s_l$.

Оценим влияние параметра m на расстояние между решениями $y_{(m)}^{n+1}$ и $y_{(1)}^{n+1}$:

$$\left\|y_{(m)}^{n+1}-y_{(1)}^{n+1}\right\|\le\left\|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}K_k^m-\frac{1}{p^m}\sum_{s_i=1}^{p}\prod_{i=1}^{m}K_{s_i}\right\|\left\|y_{(m)}^{n+1-m}\right\|+\frac{1}{p^m}\left\|\sum_{s_i=1}^{p}\prod_{i=1}^{m}K_{s_i}\right\|\times$$

$$\times\left\|y_{(m)}^{n+1-m}-y_{(1)}^{n+1-m}\right\|+\tau\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\left\|K_k^l L_k-\frac{1}{p^l}\sum_{s_i=1}^{p}\prod_{i=1}^{l}K_{s_i}L_k\right\|\left\|f_k^{n-l}\right\|. \tag{4}$$

Поскольку независимо от значений m схема расщепления является схемой первого порядка точности, правая часть неравенства (4) — величина порядка τ^2. Поэтому далее ограничимся рассмотрением лишь этой главной части оценки, для чего используем приближения:

$$L_k = (I + p\tau B_k)^{-1} = I - p\tau B_k + p^2\tau^2 B_k^2 + o(\tau^2),$$

$$K_k = L_k (I + p\tau A_k) = I + p\tau(A_k - B_k) - p^2\tau^2 B_k (A_k - B_k) + o(\tau^2),$$

$$K_k^m = I + mp\tau(A_k - B_k) - mp^2\tau^2 B_k (A_k - B_k) + \frac{m}{2}(m-1)p^2\tau^2 (A_k - B_k)^2 + o(\tau^2).$$

Рассмотрим последнее слагаемое правой части неравенства (4). Заменяем приближениями сомножители в произведении

$$K_k^m = I + mp\tau(A_k - B_k) - mp^2\tau^2 B_k (A_k - B_k) +$$

$$+ \frac{m}{2}(m-1)p^2\tau^2 (A_k - B_k)^2 + o(\tau^2),$$

$$\frac{1}{p^l}\sum_{s_i=1}^{p}\prod_{i=1}^{l} K_{s_i} L_k \approx \frac{1}{p^l}\sum_{s_i=1}^{p}(I + p\tau(A_{s_1} - B_{s_1}))\cdot\ldots\cdot(I + p\tau(A_{s_l} - B_{s_l}))(I - p\tau B_k) =$$

$$= \frac{1}{p^l}\sum_{s_i=1}^{p}(I - p\tau B_k + p\tau\sum_{r=1}^{l}(A_{s_r} - B_{s_r})) =$$

$$= (I - p\tau B_k)\frac{1}{p^l}\sum_{s_i=1}^{p} I + \frac{\tau}{p^{l-1}}\sum_{s_i=1}^{p}\sum_{r=1}^{l}(A_{s_r} - B_{s_r}).$$

Понятно, что первая сумма равна $p^l I$. Во второй сумме сгруппируем слагаемые по явному значению индексов. Для некоторого фиксированного $r \in \{1, 2, \ldots, p\}$ имеем следующее количество слагаемых с соответствующим индексом: $l p^l / p = l p^{l-1}$, где $l p^l$ — общее количество слагаемых, p — количество уникальных слагаемых, которые распределены равномерно в сумме. Поэтому можно записать:

$$\frac{1}{p^l}\sum_{s_i=1}^{p}\prod_{i=1}^{l} K_{s_i} L_k = I - p\tau B_k + l\tau\sum_{r=1}^{p}(A_r - B_r) + o(\tau). \tag{5}$$

Сделаем также замену приближениями в произведении

$$K_k^l L_k = (I + lp\tau(A_k - B_k))(I - p\tau B_k) + o(\tau) = I + lp\tau(A_k - B_k) - p\tau B_k + o(\tau)$$

и используем его вместе с (5) для оценки слагаемого правой части (4):

$$\tau\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\left\| K_k^l L_k - \frac{1}{p^l}\sum_{s_i=1}^{p}\prod_{i=1}^{l} K_{s_i} L_k \right\| =$$

$$= \tau^2\sum_{l=1}^{m-1} l \sum_{k=1}^{p}\left\| (p-1)(A_k - B_k) - \sum_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{p}(A_r - B_r) \right\| + o(\tau^2). \tag{6}$$

Перейдем к рассмотрению первого и второго слагаемых правой части неравенства (4):

$$\frac{1}{p^m}\sum_{s_i=1}^{p}\prod_{i=1}^{m} K_{s_i} \approx \frac{1}{p^m}\sum_{s_i=1}^{p}(I + p\tau(A_{s_1} - B_{s_1}) - p^2\tau^2 B_{s_1}(A_{s_1} - B_{s_1}))\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot(I + p\tau(A_{s_m} - B_{s_m}) - p^2\tau^2 B_{s_m}(A_{s_m} - B_{s_m})) =$$

$$= I + \frac{\tau}{p^{m-1}} \sum_{s_i=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{m} (A_{s_l} - B_{s_l}) - p\tau \sum_{l=1}^{m} B_{s_l} (A_{s_l} - B_{s_l}) + \right.$$

$$\left. + p\tau \sum_{l=1}^{m} \sum_{r=l+1}^{m} (A_{s_l} - B_{s_l})(A_{s_r} - B_{s_r}) \right).$$

По аналогии с предыдущим сгруппируем суммы по явному значению индекса:

$$\frac{\tau}{p^{m-1}} \sum_{s_i=1}^{p} \sum_{l=1}^{m} (A_{s_l} - B_{s_l}) = \frac{\tau}{p^{m-1}} m p^{m-1} \sum_{k=1}^{p} (A_k - B_k) = m\tau \sum_{k=1}^{p} (A_k - B_k),$$

$$\frac{\tau^2}{p^{m-2}} \sum_{s_i=1}^{p} \sum_{l=1}^{m} B_{s_l} (A_{s_l} - B_{s_l}) =$$

$$= \frac{\tau^2}{p^{m-2}} m p^{m-1} \sum_{k=1}^{p} B_k (A_k - B_k) = p m \tau^2 \sum_{k=1}^{p} B_k (A_k - B_k),$$

$$\frac{\tau^2}{p^{m-2}} \sum_{s_i=1}^{p} \sum_{l=1}^{m} \sum_{r=l+1}^{m} (A_{s_l} - B_{s_l})(A_{s_r} - B_{s_r}) = \frac{\tau^2}{p^{m-2}} \frac{m^2 - m}{2} p^{m-2} \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{p} \sum_{r=1}^{p} (A_l - B_l)(A_r - B_r) = \frac{\tau^2}{2} m(m-1) \sum_{l=1}^{p} \sum_{r=1}^{p} (A_l - B_l)(A_r - B_r).$$

При получении последнего соотношения учтено, что общее число слагаемых равно $m(m-1)p^m / 2$, а количество уникальных слагаемых p^2. Поэтому имеет место равенство

$$\frac{1}{p^m} \sum_{s_i=1}^{p} \prod_{i=1}^{m} K_{s_i} = I + m\tau \sum_{k=1}^{p} (A_k - B_k) - p m \tau^2 \sum_{k=1}^{p} B_k (A_k - B_k) +$$

$$+ \frac{\tau^2}{2} m(m-1) \sum_{l=1}^{p} \sum_{r=1}^{p} (A_l - B_l)(A_r - B_r) + o(\tau^2). \qquad (7)$$

Из (7) и оценки $\left\| y_{(m)}^{n+1-m} - y_{(1)}^{n+1-m} \right\| \le c\tau^2$ следует приближение для второго слагаемого правой части (4)

$$\frac{1}{p^m} \left\| \sum_{s_i=1}^{p} \prod_{i=1}^{m} K_{s_i} \right\| \left\| y_{(m)}^{n+1-m} - y_{(1)}^{n+1-m} \right\| = \left\| y_{(m)}^{n+1-m} - y_{(1)}^{n+1-m} \right\| + o(\tau^2). \qquad (8)$$

Преобразуем сумму

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} K_k^m = I + m\tau \sum_{k=1}^{p} (A_k - B_k) + m p \tau^2 \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{m-1}{2} (A_k - B_k)^2 - B_k (A_k - B_k) \right) + o(\tau^2)$$

и используем ее вместе с (7) в оценке слагаемого из (4):

$$\left\| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} K_k^m - \frac{1}{p^m} \sum_{s_i=1}^{p} \prod_{i=1}^{m} K_{s_i} \right\| = \frac{\tau^2}{2} m(m-1) \times$$

$$\times \left\| (p-1) \sum_{r=1}^{p} (A_r - B_r)^2 - \sum_{l=1}^{p} \sum_{\substack{r=1 \\ r \ne l}}^{p} (A_l - B_l)(A_r - B_r) \right\| + o(\tau^2). \qquad (9)$$

Следовательно, оценку (4) с учетом (6), (8) и (9) можно переписать в виде

$$\left\| y_{(m)}^{n+1} - y_{(1)}^{n+1} \right\| \le \frac{m(m-1)\tau^2}{2} \left(c_0 \left\| y_{(m)}^{n+1-m} \right\| + \sum_{k=1}^{p} c_k \max_{[t^{n+1-m};\, t^{n+1}]} \| f_k \| \right) +$$

$$+ \left\| y_{(m)}^{n+1-m} - y_{(1)}^{n+1-m} \right\| + o(\tau^2), \tag{10}$$

где

$$c_0 = \left\| (p-1) \sum_{k=1}^{p} (A_k - B_k)^2 - \sum_{l=1}^{p} \sum_{\substack{r=1 \\ r \ne l}}^{p} (A_l - B_l)(A_r - B_r) \right\|,$$

$$c_k = \left\| (p-1)(A_k - B_k) - \sum_{\substack{r=1 \\ r \ne k}}^{p} (A_r - B_r) \right\|.$$

Оценим расстояние между решениями на всем временном отрезке, т.е. в момент времени $T = t^{qm}$. Применив последовательно оценку (10) к временным отрезкам $[(r-1)m\tau;\ rm\tau]$, $r = 1, \ldots, q$, получим

$$\left\| y_{(m)}^{qm} - y_{(1)}^{qm} \right\| \le \frac{m(m-1)\tau^2}{2} \left(c_0 \sum_{r=0}^{q-1} \left\| y_{(m)}^{rm} \right\| + \sum_{k=1}^{p} c_k \sum_{r=0}^{q-1} \max_{[rm\tau;\, (r+1)m\tau]} \| f_k \| \right) + o(\tau^2),$$

где $y_{(m)}^0 = u^0$.

С учетом того, что $N = qm$ и $\tau = T / N$, оценка приобретает окончательный вид

$$\left\| y_{(m)}^{N} - y_{(1)}^{N} \right\| \le \frac{\tau(m-1)T}{2} \left(c_0 \| y_{(m)} \| + \sum_{k=1}^{p} c_k \| f_k \| \right) + o(\tau), \tag{11}$$

где $\| y_{(m)} \| = \max\limits_{r} \left\| y_{(m)}^{rm} \right\|$, $\| f_k \| = \max\limits_{t \in [0; T]} \| f_k(t) \|$.

ОПТИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПАРАМЕТРА

Перед постановкой многокритериальной задачи оптимизации [7, 8] обоснуем некоторые предположения. Как было показано, функция временных затрат $\theta(w)$ монотонно убывает, оставаясь ограниченной снизу асимптотой. Поэтому можно говорить о некотором пороговом значении m_0 для аргумента, после которого функция $\theta(w)$ изменяется несущественно. С учетом (2) зададим уровень изменения функции $\Delta\theta(w) \le (1-\varepsilon)c_2$, где ε — малый параметр, задающий уровень несущественных изменений временных затрат на решение. Из неравенства $\theta(1) - \theta(m_0) \le (1-\varepsilon)c_2$ находим, что $m_0 = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil$. В дальнейших рассуждениях будем считать, что $\theta(m) = \theta(m_0)$ для $m > m_0$.

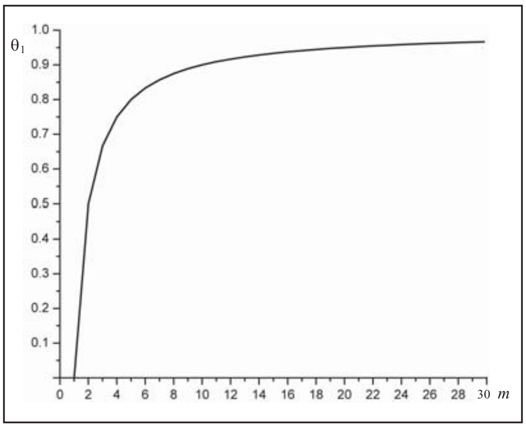

Рис. 3. График зависимости уменьшения времени решения от параметра m

При выборе значения m_0 (т.е. значения ε) необходимо ориентироваться на вспомогательную функцию (рис. 1)

$$\theta_1(m) = \frac{\theta(1) - \theta(m)}{\theta(1) - \theta(+\infty)},$$

которая выражает относительное уменьшение временных затрат от теоретически возможного. Для практических целей интересен диапазон наибольшего ее изменения, т.е. значения $m = 2,\ldots,10$. Он соответствует $\varepsilon \in [0,1;\ 0,5]$ и обеспечивает от 50 до 90% возможного сокращения времени вычислений. Поэтому будем считать, что $m_0 \geq 2$.

Двухкритериальная задача выбора оптимального значения параметра m при фиксированном временном шаге τ с учетом равенства (1) и оценки (11) имеет вид

$$\theta(m) = c_1 + \frac{c_2}{m} \to \min,\ \ E(m) = (m-1)c_3 + c_4 \to \min,$$

$$m \in M = \{1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

где $c_i = \text{const} > 0$ — некоторые постоянные, зависящие от τ, M — множество альтернатив.

Зададим отношение нестрогого и строгого предпочтения на множестве M следующим образом:

$$m_1 \succ m_2 \Leftrightarrow (E_1 \leq E_2 \wedge \theta_1 \leq \theta_2),\ \ m_1 \succ\!\succ m_2 \Leftrightarrow (m_1 \succ m_2 \wedge (E_1 \neq E_2 \vee \theta_1 \neq \theta_2)).$$

Как легко заметить (рис. 2), имеет место отношение $n \succ m\ \ \forall n \in M_0 = \{1, 2, 3, \ldots, m_0\}$ и $\forall m \in M / M_0$, т.е. подмножество M / M_0 не может содержать оптимальной альтернативы.

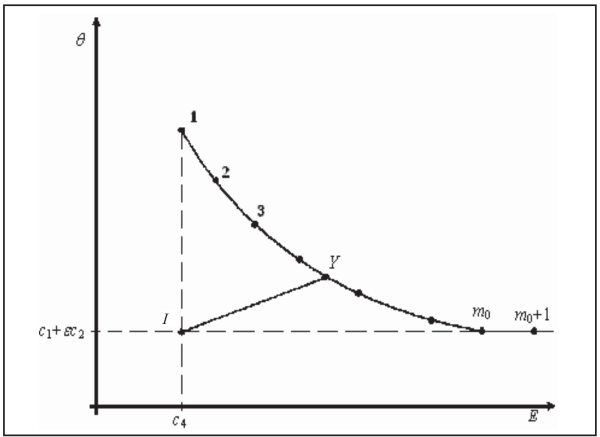

Рис. 2. Множество оценок задачи выбора

В то же время альтернативы из $M_0 = \{1, 2, 3, \ldots, m_0\}$ являются мажорантами. Действительно, $\forall m \in M_0$ не существует альтернативы $n \in M_0$, которая бы имела строгое преимущество перед m, так как элементы из M_0 несравнимы между собой. Поэтому подмножество M_0 оптимально по Парето [7].

Следует отметить, что альтернативы из M_0 неэквивалентны и для осмысленного выбора единственного оптимального значения целесообразно использовать более полную информацию о предпочтениях. Например, задать соотношение между затратами времени и точностью решения или использовать опыт решения тестовых задач. Однако существует возможность выбора альтернативы с привлечением минимума дополнительной информации. Для этой цели используем метод идеальной точки [8], который учитывает приемлемое соотношение между качеством решения и затратами на его получение. Перейдем к непрерывной области оптимальных альтернатив $X_0 = [1; m_0]$ с соответствующими векторами оценок:

$$Y = \left((x-1)c_3 + c_4;\ c_1 + \frac{c_2}{x} \right).$$

Идеальная точка имеет координаты $I = (\min E(x);\ \min \theta(x)) = (c_4; c_1 + \varepsilon c_2)$. Нормировочно-весовые коэффициенты имеют вид

$$q = (q_1, q_2) = \left(\frac{\alpha}{(m_0 - 1)c_3}, \frac{1-\alpha}{(1-\varepsilon)c_2} \right),$$

где $\alpha \in [0; 1]$ — параметр, регулирующий соотношение между точностью решения и временными затратами на его получение.

Минимизируем функцию квадрата расстояния

$$z(x)=\sum_{i=1}^{2} q_i^2\,(I_i-Y_i)^2=\left(\frac{\alpha}{m_0-1}\right)^2(x-1)^2+\left(\frac{1-\alpha}{1-\varepsilon}\right)^2\frac{(\varepsilon x-1)^2}{x^2}\to\min_{x\in X_0}$$

для нахождения единственной оптимальной альтернативы $x^*\in X_0$.

Найдем точки экстремума

$$z'(x)=2\left(\frac{\alpha}{m_0-1}\right)^2(x-1)-2\left(\frac{1-\alpha}{1-\varepsilon}\right)^2\frac{(1-x\varepsilon)}{x^3},$$

$$z'(x)=0:\ v(x)\equiv\frac{\alpha^2x^3(x-1)}{(m_0-1)^2}+(1-\alpha)^2\frac{\varepsilon x-1}{(1-\varepsilon)^2}=0. \qquad (12)$$

Покажем, что $\exists\,!x^*\in X_0: v(x^*)=0$. Действительно, существование корня уравнения (12) следует из неравенств

$$v(1)=-\frac{(1-\alpha)^2}{1-\varepsilon}\le 0,\quad v(m_0)=\frac{\alpha^2m_0^3}{m_0-1}+(1-\alpha)^2\frac{\varepsilon m_0-1}{(1-\varepsilon)^2}\ge 0.$$

Его единственность доказывается монотонным ростом функции $v(x)$ при $x\ge 1$:

$$v'(x)=\left(\frac{\alpha x}{m_0-1}\right)^2(4x-3)+\varepsilon\left(\frac{1-\alpha}{1-\varepsilon}\right)^2>0.$$

Минимальность значения функции $z(x)$ в точке $x=x^*$ вытекает из положительности второй производной при $x\ge 1$:

$$z''(x)=2\left(\frac{\alpha}{m_0-1}\right)^2+2\left(\frac{1-\alpha}{1-\varepsilon}\right)^2\frac{3-2x\varepsilon}{x^4}.$$

Пусть имеет место равенство $\varepsilon=1/m_0$, где $m_0\ge 2$. Тогда уравнение (12) запишется в виде

$$\alpha^2\varepsilon^2x^3(x-1)+(1-\alpha)^2(\varepsilon x-1)=0.$$

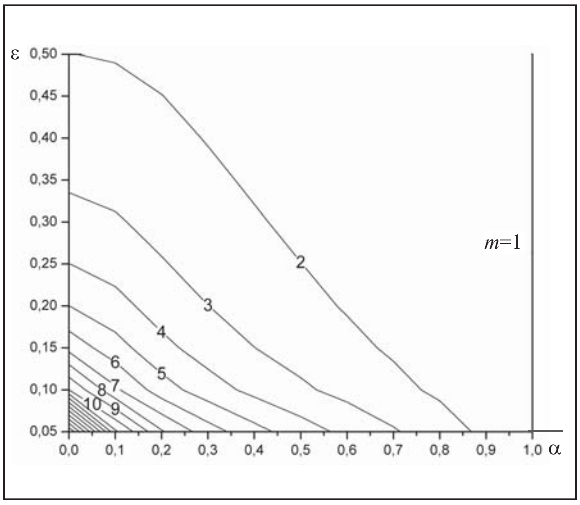

Рис. 3. График зависимости оптимальных значений параметра m от ε и α

Его численные решения приведены на рис. 3. График позволяет сделать выбор оптимального значения параметра $m\in M_0$ по известным ε и α.

Рисунок отражает тенденцию изменения оптимального значения параметра m в зависимости от α. Когда предпочтение отдается наиболее точному решению ($\alpha=1$), то $m^*=1$ и приемлемым является обычный аддитивно-усредненный метод. Если же предпочтение отдается наиболее быстрому решению ($\alpha=0$), то $m^*=m_0$, что соответствует модифицированному аддитивно-усредненному методу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главным преимуществом модифицированного аддитивно-усредненного метода перед обычным являются меньшие временные затраты на решение задачи. Это в первую очередь связано с меньшим количеством обменов данными, которые необходимы для этапа усреднения. Но не менее важно и качество решения, поэтому сравнения методов лишь по одному критерию недостаточно.

Более эффективно сопоставление, выраженное парой «временные затраты–точность решения». Рассмотрение оптимизационной задачи выбора параметра m с этими критериями показало, что оба варианта метода парето-оптимальны. Однако для выбора конкретного m из множества парето-оптимальных целесообразно использовать дополнительные сведения, которые позволят идентифицировать наиболее подходящее значение.

Выбор оптимального значения параметра методом идеальной точки с использованием только информации относительно приоритетности цены и качества решения указывает на обоснованность широкого использования модифицированного аддитивно-усредненного метода. Диапазон его применимости исключает лишь случай получения наиболее точного решения, которое допустимо при заданных значениях параметров конечно-разностных схем решения подзадач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И. Метод численного решения многомерной задачи конвективной диффузии // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 1. — С. 100–107.
2. Гордезиани Д.Г., Меладзе Г.В. О моделировании третьей краевой задачи для многомерных параболических уравнений в произвольной области одномерными уравнениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1974 — **14**, № 1. — С. 246–250.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. — М.: Наука, 2001. — 320 с.
4. Дорошенко А. Е. Лекции по параллельным вычислительным системам. — К.: КМ Академія, 2003. — 44 с.
5. Хокни Р., Джесхоуп К. Параллельные ЭВМ. Архитектура, программирование, алгоритмы. — М.: Радио и связь, 1986. — 392 с.
6. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 2004. — 71 с.
7. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
8. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. — М.: Физматлит, 2004. — 176 с.

Поступила 18.09.2008