УДК 519.21

С.А. СЕМЕНЮК

ФЛУКТУАЦИИ ПРОЦЕДУРЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ С ДИФФУЗИОННЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Ключевые слова: *флуктуация, процедура стохастической аппроксимации, марковский процесс, диффузионное возмущение.*

Поведение флуктуаций процедуры стохастической аппроксимации (ПСА) характеризует скорость схождения системы к точке равновесия. В даной работе рассмотрены свойства флуктуаций ПСА с диффузионным возмущением вокруг точки равновесия усредненной системы. В дальнейшем это дает возможность рассматривать проблемы асимптотического поведения ПСА [1].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим непрерывную процедуру стохастической аппроксимации [2]

$$du^{\varepsilon}(t)=a(t)C^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(t),\ x(t/\varepsilon^4))dt \tag{1}$$

с функцией регрессии

$$C^{\varepsilon}(u,\ x)=C(u,\ x)+\varepsilon^{-1}C_0(u,\ x),\ u\in R^n,\ x\in X, \tag{2}$$

такой, что удовлетворяет условиям существования глобального решения сопровождающей системы

$$\frac{u_x^{\varepsilon}(t)}{dt}=C^{\varepsilon}(u_x^{\varepsilon}(t),\ x),\ x\in X. \tag{3}$$

Также пусть $C(u,\cdot)\in C^2(R^n)$, $C_0(u,\cdot)\in C^3(R^n)$. Марковский процесс $x(t), t\ge 0$, в стандартном фазовом пространстве $(X, \boldsymbol{X})$ задается генератором

$$Q\varphi(x)=q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y)-\varphi(x)],\ \varphi\in \mathbf{B}(X),$$

где $\mathbf{B}(X)$ — банахово пространство дейсвительных ограниченных функций с супремум-нормой $\|\varphi\|=\max\limits_{x\in X}|\varphi(x)|$.

Стохастическое ядро $P(x, B)$, $x\in X$, $B\in \boldsymbol{X}$, определяет равномерно эргодическую встроеную цепь Маркова $x_n=x(\tau_n)$, $n\ge 0$, с стационарным распределением $\rho(B)$, $B\in \boldsymbol{X}$. Стационарное распределение $\pi(B)$, $B\in\boldsymbol{X}$, марковского процесса $x(t)$, $t\ge 0$, определяется соотношением

$$\pi(dx)q(x)=q\rho(dx),\ q=\int_X \pi(dx)q(x).$$

Потенциальный оператор R_0 генератора Q определяется соотношением $R_0=\Pi-(\Pi+Q)^{-1}$, где $\Pi\varphi(x)=\int\limits_X \pi(dy)\varphi(y)$ — проектор на подпространство $N_Q=\{\varphi:\ Q\varphi=0\}$ нулей оператора Q.

Пусть для возмущения $C_0(u,\ x)$ функции регресии (2) выполняется условие баланса

$$\int_X \pi(dx)C_0(u,\ x)\equiv 0. \tag{4}$$

При условиях теоремы [2] доказано, что непрерывная ПСА (1) с вероятностью единица сходится к точке равновесия $u_0=0$ усредненной системы

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt}=\hat{C}(\hat{u}(t)), \tag{5}$$

где $\hat{C}(u)=\int\limits_X \pi(dx)C(u,x)$.

Условием существования точки равновесия u_0 есть условие баланса

$$\Pi C(0,x)=\int_X \pi(dx)C(0,x)=0. \tag{6}$$

Таким требованиям удовлетворяет функция

$$a(t)=a/t^{\gamma},\ 0<t_0<t,\ a>0,\ 1/2<\gamma\le 1.$$

Диффузионное возмущение задается соотношением [2]

$$\overline{C}_0^{\varepsilon}(t)=\varepsilon^{-2}a\int_{t_0}^{t} C_0(u^{\varepsilon}(s),\ x(s/\varepsilon^4))/s^{\gamma}ds. \tag{7}$$

Обозначим $C_0^0(x)=C_0(0,x)$, тогда диффузионное возмущение в точке равновесия примет вид

$$C_0^{\varepsilon}(t)=\varepsilon^{-2}a\int_{t_0}^{t} C_0(0,\ x(s/\varepsilon^4))s^{\gamma}/ds=\varepsilon^{-2}a\int_{t_0}^{t} C_0^0(x(s/\varepsilon^4))/s^{\gamma}ds. \tag{8}$$

Флуктуации ПСА (1) рассматриваются в нормировании

$$V^{\varepsilon}(t)=\varepsilon^{-1}t^{\delta}[u^{\varepsilon}(t)-\varepsilon C_0^{\varepsilon}(t)], \tag{9}$$

где $\delta=1-\gamma$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема. Пусть выполняются условия баланса (6) и (4), а также условия сходимости ПСА (1), а функции $C_0'(u,\ x)$ и $C_0''(u,\ x)$ равномерно ограничены по x:

$$\sup_{x\in X}\|C_0'(u,\ x)\|\le C_1<+\infty;\quad \sup_{x\in X}\|C_0''(u,\ x)\|\le C_2<+\infty. \tag{10}$$

Тогда имеет место слабая сходимость $(V^{\varepsilon}(t),\ C_0^{\varepsilon}(t))\to(\zeta(t),W_{\sigma}(t))$, $t>0$, $\varepsilon\to 0$, в каждом конечном интервале $0<t_0<t<T$. Предельный процесс $(\zeta(t),W_{\sigma}(t))$ задается генератором

$$L\varphi(v,w)=[vt^{-\gamma}(ac+1-\gamma)+act^{1-2\gamma}w]\varphi_v'(v,w)+\frac{a^2t^{-\gamma}}{2}B\varphi_w''(v,w),$$

где $c=\int_X \pi(dx)C'(0,\ x)$;

$$B=2\int_X \pi(dx)C_0(0,x)R_0C_0(0,x).$$

Предельный процесс $\zeta(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению $d\zeta(t)=[\zeta(t)t^{-\gamma}(ac+1-\gamma)+act^{1-2\gamma}W_{\sigma}(t)]dt$.

Замечание. При $\gamma=1$, $\delta=0$ получим упрощенное выражение $d\zeta(t)=act^{-1}[\zeta(t)+W_{\sigma}(t)]dt$.

СВОЙСТВА НОРМИРОВАННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

Лемма 1. Нормированная флуктуация (9) удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dV^{\varepsilon}(t)=\mathbf{C}^{\varepsilon}(V^{\varepsilon}(t),\ x_t^{\varepsilon})dt, \tag{11}$$

где $\mathbf{C}^{\varepsilon}(v,\ x)=\varepsilon^{-1}at^{1-2\gamma}C(\varepsilon z^{\varepsilon}(t),x)+\ \varepsilon^{-2}at^{1-2\gamma}[C_0(\varepsilon z^{\varepsilon}(t),x)-C_0^0(x)]+(1-\gamma)vt^{-1}$, $z=t^{\gamma-1}v+w$, $v=V^{\varepsilon}(t)$, $w=C_0^{\varepsilon}(t)$.

Доказательство. Дифференциируя (9) и используя (1), (8), получаем (11).

Рассмотрим полугруппы операторов $\mathbf{C}_{t+s}^{\varepsilon,t}(x)\varphi(v)=\varphi(V^{\varepsilon}(t+s))$, $V_x^{\varepsilon}(s)=v$, порожденные решениями системы (10) с генератором

$$\mathbf{C}_t^{\varepsilon,V}(x)\varphi(v)=\mathbf{C}^{\varepsilon}(v,\ x)\varphi'(v). \tag{12}$$

Лемма 2. Генератор (11) полугруппы операторов $\mathbf{C}_{t+s}^{\varepsilon,t}(x)$, $x\in X$, имеет асимптотическое представление

$$\mathbf{C}_t^{\varepsilon,V}(x)\varphi(v)=[(1-\gamma)vt^{-1}+at^{1-2\gamma}(zC'(0,\ x)+z^2C_0''(0,x)/2)]\varphi'(v)+$$
$$+\varepsilon^{-1}at^{1-2\gamma}[C(0,x)+zC_0'(0,x)]\varphi'(v)+\varepsilon\theta^{\varepsilon}(x)\varphi'(v), \tag{13}$$

где $\theta^{\varepsilon}(x)$ — ограниченная равномерно по x функция.

Доказательство. Используя разложение функций C и C_0 в ряд Тейлора по первой переменной для генератора (12), получаем (13).

Лемма 3. Генератор трехкомпонентного марковського процесса [3]

$$V^{\varepsilon}(t),C_0^{\varepsilon}(t),x(t/\varepsilon^4)=x_t^{\varepsilon},\ t\ge 0, \tag{14}$$

имеет аналитическое представление

$$L^{\varepsilon}\varphi(v,w,\ x)=[\varepsilon^{-4}Q+\varepsilon^{-2}at^{-\gamma}\mathbf{C}_0(x)+\mathbf{C}_t^{\varepsilon,V}(x)],\ \varphi(v,w,x), \tag{15}$$

где $\mathbf{C}_0(x)\varphi(v,w,x)=C_0^0(x)\varphi_w'(v,w,x)$.

Доказательство. Введя обозначения $x(t/\varepsilon^4)=x_t$, $V^{\varepsilon}(t)=v_t$, $C_0^{\varepsilon}(t)=w_t$, вычислим условное математическое ожидание:

$$E[\varphi(V^{\varepsilon}(t+\Delta),C_0^{\varepsilon}(t+\Delta),\ x((t+\Delta'/\varepsilon^4))-\varphi(V^{\varepsilon}(t),\ C_0^{\varepsilon}(t),$$
$$x(t/\varepsilon^4))|V^{\varepsilon}(t)=v,C_0^{\varepsilon}(t)=w,\ x(t/\varepsilon^4)=x]=$$
$$=\ E[\varphi(v_{t+\Delta},w_{t+\Delta},x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x)]=$$
$$=\ E[\varphi(v,w,x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x)]+E[\varphi(v_{t+\Delta},w,x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x_{t+\Delta})]+$$
$$+E[\varphi(v_{t+\Delta},w_{t+\Delta},x_{t+\Delta})-\varphi(v_{t+\Delta},w,x_{t+\Delta})]=$$
$$=\ E[\varphi(v,w,x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x)]+E\left[\varphi_w'(v_{t+\Delta},w,x_{t+\Delta})\frac{dC_0^{\varepsilon}(t)}{dt}\right]\Delta+$$
$$+E[\varphi(v_{t+\Delta},w,x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x_{t+\Delta})]+o(\Delta).$$

Используя определение генератора марковського процесса (13), получаем

$$L^{\varepsilon}\varphi(v,w,x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(V^{\varepsilon}(t+\Delta),C_0^{\varepsilon}(t+\Delta),\ x((t+\Delta)/\varepsilon^4))-$$
$$-\varphi(V^{\varepsilon}(t),\ C_0^{\varepsilon}(t),\ x(t/\varepsilon^4))|V^{\varepsilon}(t)=v,\ C_0^{\varepsilon}(t)=w,\ x(t/\varepsilon^4)=x]=$$
$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v_{t+\Delta},w_{t+\Delta},x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x))]=$$
$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v,w,x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x)]+$$
$$+\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E\left[\varphi'_w(v_{t+\Delta},w,x_{t+\Delta})\frac{dC_0^{\varepsilon}(t)}{dt}\right]\Delta+$$
$$+\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v_{t+\Delta},w,x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x_{t+\Delta})]. \tag{16}$$

Поскольку

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v,w,x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x)]=\varepsilon^{-4}Q\varphi(v,w,x),$$

$$\lim_{\Delta\to 0}E\left[\varphi'_w(v_{t+\Delta},w,x_{t+\Delta})\frac{dC_0^\varepsilon(t)}{dt}\right]=\varepsilon^{-2}at^{-\gamma}C_0^0(x)\varphi'_\omega(v,w,x),$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v_{t+\Delta},w,x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x_{t+\Delta})]=\mathbf{C}_t^{\varepsilon,V}(x)\varphi(v,w,x),$$

из (14) получим (15).

Лемма 4. Генератор L^ε имеет асимптотическое представление

$$L^\varepsilon\varphi(v,w,x)=[\varepsilon^{-4}Q+\varepsilon^{-2}at^{-\gamma}\mathbf{C}_0(x)+$$
$$+\varepsilon^{-1}at^{1-2\gamma}\mathbf{C}(x)+at^{-\gamma}\mathbf{C}_1(x)+\theta_L^\varepsilon(x)]\varphi(v,w,x), \tag{17}$$

где

$$\mathbf{C}_0(x)\varphi(v,w,x)=C_0^0(x)\varphi'_w(v,w,x); \tag{18}$$

$$\mathbf{C}(x)\varphi(v,w,x)=[C(0,x)+zC'_0(0,x)]\varphi'_v(v,w,x);$$

$$\mathbf{C}_1(x)\varphi(v,w,x)=(t^{1-\gamma}z[C'(0,x)+zC''_0(0,x)/2]+$$
$$+\frac{v(1-\gamma)}{a}t^{\gamma-1})\varphi'_v(v,w,x),\ \ z=t^{\gamma-1}v+w, \tag{19}$$

остаточний член такой, что $\|\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x)\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. Используя разложение (13) леммы 2, имеем (17).

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ СИНГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Усеченный оператор имеет вид

$$L_0^\varepsilon=\varepsilon^{-4}Q+\varepsilon^{-2}at^{-\gamma}\mathbf{C}_0(x)+\varepsilon^{-1}at^{1-2\gamma}\mathbf{C}(x)+at^{-\gamma}\mathbf{C}_1(x). \tag{20}$$

Решим проблему сингулярного возмущения для усеченного оператора (20), используя тест-функцию [3]

$$\varphi^\varepsilon(v,w,x)=\varphi(v,w)+\varepsilon^2t^{-\gamma}\varphi_2(v,w,x)+\varepsilon^3t^{1-2\gamma}\varphi_1(v,w,x)+\varepsilon^4t^{-\gamma}\varphi_0(v,w,x).$$

Лемма 5. Решение проблемы сингулярного возмущения для усеченного оператора (19) в условиях теоремы реализуется соотношением

$$L_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon(v,w,x)=t^{-\gamma}L\varphi(v,w)+\varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi(v,w), \tag{21}$$

где остаточний член $\theta^\varepsilon(x)$ ограничен равномерно по x.

Предельный оператор L определяется формулой

$$L\Pi=a\Pi\mathbf{C}_1(x)\Pi+a^2t^{-\gamma}\Pi\mathbf{C}_0(x)R_0\mathbf{C}_0(x)\Pi. \tag{22}$$

Доказательство. Для решения проблемы сингулярного возмущения приведем подобные члены в левой части (20) с учетом φ^ε:

$$L_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon=\varepsilon^{-4}Q\varphi+\varepsilon^{-2}t^{-\gamma}[Q\varphi_2+a\mathbf{C}_0(x)\varphi]+\varepsilon^{-1}t^{1-2\gamma}[Q\varphi_1+a\mathbf{C}(x)\varphi]+$$
$$+t^{-\gamma}[Q\varphi_0+at^{-\gamma}\mathbf{C}_0(x)\varphi_2+a\mathbf{C}_1(x)\varphi]+\varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi.$$

Поскольку φ не зависит от x, то $Q\varphi=0\Leftrightarrow\varphi\in N_Q$.

Условием баланса (4) есть условие разрешимости уравнения $Q\varphi_2+a\mathbf{C}_0(x)\varphi=0$, поэтому

$$\varphi_2=aR_0\mathbf{C}_0(x)\varphi. \tag{23}$$

Используя условия баланса (6) и (4), получаем

$$\Pi \mathbf{C}(x)\varphi(v,w)=[\Pi C(0,x)+(v+w)\Pi C_0'(0,x)]\varphi_v'(v,w)=$$
$$=\Pi C(0,x)\varphi_v'(v,w)+(v+w)[\Pi C_0(0,x)]_u'\,\varphi_v'(v,w)=0,$$

что, в свою очередь, есть условием разрешимости уравнения $Q\varphi_1+a\mathbf{C}(x)\varphi=0$, поэтому

$$\varphi_1=aR_0\mathbf{C}(x)\varphi. \tag{24}$$

Последнее уравнение $Q\varphi_0+at^{-\gamma}\mathbf{C}_0(x)\varphi_2+a\mathbf{C}_1(x)\varphi=L\varphi$ с помощью (23) и (24) можно свести к виду $Q\varphi_0+[a\mathbf{C}_1(x)+a^2t^{-\gamma}\mathbf{C}_0(x)R_0\mathbf{C}_0(x)]\varphi=L\varphi$.

Условие разрешимости последнего уравнения и дает предельный оператор L в форме (22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Используя (18) и (19) при вычислении правой части (22), получаем

$$L\varphi(v,w)=[a\Pi\mathbf{C}_1(x)+a^2t^{-\gamma}\Pi\mathbf{C}_0(x)R_0\mathbf{C}_0(x)]\varphi(v,w)=$$
$$=at^{1-2\gamma}\left[\int_X\pi(dx)\left(zC'(0,x)+z^2C_0''(0,x)/2+\frac{v(1-\gamma)}{a}t^{\gamma-1}\right)\varphi_v'(v,w)\right]+$$
$$+a^2t^{-\gamma}\int_X\pi(dx)\,C_0''(0,x)R_0C_0(0,x)\varphi_w''(v,w). \tag{25}$$

Поскольку из условий (4) и (9) имеет место соотношение $\int_X\pi(dx)C_0(0,x)=$ $=\Pi C_0''(0,x)=0$, окончательно имеем

$$L\varphi(v,w)=[vt^{-\gamma}(ac+1-\gamma)+act^{1-2\gamma}w]\varphi_v'(v,w)+\frac{a^2t^{-\gamma}}{2}B\,\varphi_v''(v,w).$$

Полное доказательство теоремы реализуется по схеме доказательства теоремы 2.1 в [4].

Флуктуации ПСА с диффузионным возмущением при наличии точки равновесия усредненной системы на возрастающем интервале времени описываются стохастическим дифференциальным уравнением, в котором скорость эволюции зависит от виннеровского процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекурентное оценивание. — М.: Наука, 1972. — 304 с.
2. Чабанюк Я.М. Непрерывная процедура стохастичекской аппроксимации с сингулярным возмущением в условиях баланса // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 3. — С. 133–139.
3. Ljung L., Pflung G., Walk H. Stochastic approximation and optimization of random systems. — Basel: Birkhauser Verlag, 1992. — 113 p.
4. Korolyuk V.S, Limnius N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. — Dordrecht: World Scientific, 2005. — 330 p.

Поступила 23.02.2009