УДК 62-50

В.Ф. ЗАДОРОЖНЫЙ

ПРОБЛЕМА ЛЯПУНОВА И СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Ключевые слова: *динамическая система, устойчивость по Ляпунову, оператор Гильберта–Шмидта, ядерный и диссипативный операторы, компакт*.

ПРОБЛЕМА ЛЯПУНОВА, ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теория устойчивости, основы которой изложил в 1892 г. А.М. Ляпунов [1], успешно развивались многими математиками и механиками [2]. После появления общей теории динамических систем прямой метод Ляпунова эффективно использовался и в других областях, например в теории синтеза оптимальных систем управления [3–5].

Прямой метод, или метод функций Ляпунова становится строгим основным методом исследования устойчивости программных решений динамических систем. Однако центральной проблемой метода остается проблема построения функции Ляпунова (фЛ). «Наивные» способы подбора и искусства построения достаточно «хороших» фЛ отходят на задний план, так как в задачах оптимального синтеза нужны фЛ, которые удовлетворяли бы не только достаточным, но и необходимым условиям.

В.И. Зубов доказал, что для удовлетворения этим условиям, нужно искать фЛ, которая имела бы соответствующую производную в силу системы не всюду, а только почти всюду [6]. А это уже другой уровень исследований.

Задача исследования устойчивости программных решений рассматривается (следуя А.М. Ляпунову) как задача устойчивости нулевого решения уравнений возмущенного движения

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{1}$$

где $t \in T = [0, +\infty)$ — время, $x \in R^n$, $X(t, x) = (X_1(x, t), \ldots, X_n(x, t))$ — n-мерные векторы, $X(t, 0) = 0$. Правые части X определены и непрерывно дифференцируемы в области

$$\Omega = \{(t, x)\colon t \geq 0, ||x|| < \eta\} \ (0 < \eta \leq \infty).$$

Функция Ляпунова v в классической теории устойчивости движения принадлежит классу вещественных функций, непрерывно дифференцируемых в области

$$\Omega = \{(t,x)\colon t \geq t_v, ||x|| < \eta_v\} \ (t_v \geq 0,\ 0 < \eta_v \leq \eta)$$

и уничтожающихся на невозмущенном движении $x = 0$, т.е. $v(t, 0) = 0$. При этом производная фЛ v по времени в силу уравнений возмущенного движения

$$\dot{v}(t, x) = \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} X(t, x)$$

также непрерывна в Ω_v.

Системы вида (1), для которых правая часть X не зависит явно от $t: X = X(x)$, назовем динамическими системами (д.с.), кроме того, решение $x_t(x)$, $x \in \Omega \subset R^n$ — начальное значение вектора $(x_0, t_0 = 0)$, определено на всей полупрямой $T = [0, \infty)$.

Будем изучать только асимптотическую устойчивость.

Определение. Нулевое решение системы (1) назовем устойчивым по Ляпунову, если по любому $\varepsilon > 0$ и для данного $t_0 \geq 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при $\|x\| < \delta$ будет $\|x_t\| < \varepsilon$ при $t_0 \leq t \in T$. Если, кроме того, $\|x_t\| \to 0$ при $t \to \infty$, то нулевое решение системы (1) называется асимптотически устойчивым (а.у.).

Заметим следующее: 1) для динамической системы t_0 всегда можно положить равным нулю; 2) только стремление нормы $\|x_t\|$ к нулю при $t \to \infty$ не есть а.у.

Устойчивость по Ляпунову — устойчивость по отношению к начальным возмущениям, но на бесконечном отрезке времени, этим она отличается от теории зависимости решений от начальных условий. Таким образом, здесь предполагается, что математическая модель возмущенного процесса (1) остается тождественной самой себе при любом $t \in T$, что, конечно, проблематично.

Асимптотическая устойчивость — самый важный вид устойчивости, так как она сохраняет эти свойства д.с. и при достаточно малых постоянно действующих возмущениях при любом t.

Итак, пусть д.с. записана в виде

$$\dot{x} = X(x), \quad x, X \in R^n, \tag{2}$$

где $X(0) = 0$, т.е. $x = 0$ — стационарное тривиальное решение, которому соответствует в исходной невозмущенной системе некоторое частное решение.

Пусть решение $x = 0$ а.у. для всех начальных возмущений x из окрестности нуля $\Omega \subset R^n$. При этих условиях всегда существует фЛ $v(x)$ такая, что: а) $v(x) > 0$, при $\|x\| \neq 0$ и $v(0) = 0$; б) существует такая знакоопределенная функция $w(x)$, знакопротивоположная функции $v: w(x) < 0$ при $\|x\| \neq 0$, $w(0) = 0$, и при этом

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cdot X = w. \tag{3}$$

Уравнение (3) линейное в частных производных первого порядка, которое существенным образом содержит особую точку $x = 0$, следовательно, известная теорема С. Ковалевской здесь неприменима. Основной метод решения уравнений такого типа состоит в поиске характеристики д.с. (2) и на них строятся решения (3). Однако в задачах устойчивости некорректно использовать характеристики д.с., они просто неизвестны. Исследователи пошли, вообще говоря, по пути подбора пары (v, w), удовлетворяющей некоторой теореме типа теоремы Ляпунова. В этом направлении решено много важных прикладных задач. Однако все они достаточны; кроме того, часто так построенные фЛ выделяют весьма малую область начальных возмущений Ω, что не «устраивает» прикладную сторону решаемой задачи.

Кроме того, в задаче оптимального синтеза очень важно иметь общее решение уравнения (2). Это последнее полностью определяется полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} X = 0, \tag{4}$$

где S — производящая функция [7]. Будем искать ее для стационарной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x), \\ \dot{\psi} &= -\frac{\partial X}{\partial x} \psi, \end{aligned} \tag{5}$$

в виде

$$S = e^{\alpha t} v(x), \tag{6}$$

где α — некоторое пока неопределенное число, а функция v ищется из уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial x} X = -\alpha v. \tag{7}$$

Уравнение (7) легко получить, если подставить в (4) значение S из (6).

Как известно, для построения полного интеграла уравнения (4) нужно функцию Гамильтона $H=\sum_{i=1}^{n} X_i \Psi_i$, записанную в переменных $\{x, \psi\}$, $\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, преобразовать (канонически) в функцию H', где она зависела бы только от координат, обозначим их $q=(q_1, \ldots, q_n)$, и не зависела бы от импульсов $p=(p_1, \ldots, p_n)$ [7, с. 224].

Теорема Якоби. Если найдено решение $S(q, x)$ уравнения Гамильтона–Якоби

$$H\left(\frac{\partial S(q, x)}{\partial x}, x, t\right)=H'(q), \tag{8}$$

зависящее от n параметров q_i и такое, что $\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial x} \neq 0$, то каноническое уравнение

$$\dot{\psi}=-\frac{\partial H}{\partial x}, \ \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \psi}, \tag{5'}$$

решается явно в квадратурах. При этом функции $q_i(x, \psi)$, определенные уравнениями $\frac{\partial S(q, x)}{\partial x}=\psi$, являются и первыми интегралами.

Поскольку $H(x, \psi)=H'(q)$, то в новых переменных уравнения (5') имеют вид

$$\dot{q}=0, \ \dot{p}=\frac{\partial H'}{\partial q}, \tag{9}$$

откуда непосредственно следует теорема Якоби.

«Теорема Якоби сводит решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5) к отысканию полного интеграла уравнения в частных производных (8). Может показаться удивительным, что такое сведение более простого к более сложному доставляет эффективный метод решения конкретных задач. Между тем, оказывается, что это самый сильный из существующих методов точного интегрирования, и многие задачи вообще не поддаются решению другими методами» (см. [7, с. 225]).

Следовательно, для синтеза оптимальных систем управления, для задач игры сближения–уклонения в позиционных дифференциальных играх [8, § 24], задач транспортировки пучков заряженных частиц [9] необходимо решать уравнение вида (7). Для этой цели воспользуемся основным принципом анализа, т.е. линеаризацией.

ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Известно, что нелинейное векторное поле $X(x)$ д.с. порождает линейный дифференциальный оператор L по закону

$$Lf=X\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{10}$$

где $f(x)$ — функции, имеющие частные производные $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^{n}$ по всем компонентам вектора x.

Пусть векторное поле X такое, что $x=0$ а.у. и некоторая его окрестность Ω — область притяжения, а $\overline{\Omega}=\partial\overline{\Omega} \cup \Omega$ — компакт с границей $\partial\overline{\Omega}$. Последняя, как известно, состоит из целых траекторий. Введем в рассмотрение гильбертово функциональное пространство $L^2(\overline{\Omega})$ на компакте $\overline{\Omega}$ с обычной мерой Лебега. Скалярное произведение в этом пространстве зададим так: $(f, g)=\int_{\overline{\Omega}} f\overline{g}\,dx$, при этом

$f \in L^2(\overline{\Omega})$ тогда и только тогда, когда $\| f \|^2 = \int\limits_{\overline{\Omega}} f \bar{f} \, dx < \infty$. Если $D(L)$ — область определения оператора L, то множество функций $\{f\} \in L^2(\overline{\Omega}) \cap D(L)$ плотно в $L^2(\overline{\Omega})$ и его можно замкнуть во введенной метрике $\|\cdot\|$. Рассмотренный оператор L становится замкнутым. Оставим за ним то же обозначение и введем метрику

$$[f, f] = (Lf, f) + (f, Lf). \tag{11}$$

В метрике $[\cdot, \cdot]$ оператор L замкнутый самосопряженный. Если $x = 0$ а.у. и Ω — область притяжения, то оператор L диссипативен [10], т.е.

$$[f, f] \leq 0. \tag{12}$$

Для линейных конечномерных стационарных систем

$$\dot{x} = Ax, \ x \in R^n.$$

А.М. Ляпунов доказал известную теорему, которую прочитаем так.

Терема Ляпунова. Если спектр $\sigma(A)$ оператора A лежит в левой полуплоскости, то существует такая метрика в R^n, вводимая положительно-определенной матрицей B, что оператор A в этой метрике становится диссипативным. Матрица B определяется как решение матричного уравнения $BA + A^{\mathrm{T}} B = -C$, где C — любая положительно-определенная матрица.

Несмотря на то, что операторы L и A очень разные, хотя оба линейны, оказывается, что свойство диссипативности в вопросах а.у. линейных конечномерных операторов переносится на бесконечномерные неограниченные операторы L. Ниже докажем это утверждение, решая уравнение (7), в предположении, что диссипативный оператор — оператор Гильберта–Шмидта.

Проблема построения фЛ как некоторого решения уравнения Ляпунова

$$L\upsilon = w \tag{13}$$

объясняется достаточно просто. Используя (13), запишем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\upsilon[t]}{dt} = w[t], \tag{14}$$

где скобки $[t]$ обозначают на решениях системы (2). Отсюда получаем

$$\upsilon[t] = \int\limits_0^t w(\tau)\, d\tau. \tag{15}$$

Возникает вопрос, как, не зная решений системы (2), заключить, имеет ли уравнение (15) решение υ при заданном w?

Для достаточно малого отрезка времени Δt это всегда так, что очевидно. Но прямой метод Ляпунова — это устойчивость на бесконечном интервале времени, т.е. нужно a priori указать такие критерии оценки w, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_0^\infty w \, d\tau < \infty. \tag{16}$$

Такого условия пока нет. В этом суть проблемы. Ниже условие (16) заменим решениями специально построенного однородного интегрального уравнения и, таким образом, будут найдены решения уравнения (7) как составляющая часть решения S уравнения (4).

Поскольку $\frac{dS}{dt} = 0$ и $S = e^{\alpha t} v(x)$, то при а.у. $x = 0$ на решениях $x_t(x)$ функция $v[t]$ должна удовлетворять условию $v[t] = e^{-\alpha t}$. Следовательно, производящая функция S может иметь форму солитонных решений. Действительно, рассмотрим достаточно простую динамическую систему $\dot{x} = -\sin\varphi$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Нетрудно показать, что $\varphi = 0$ а.у., кроме того, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi}{\eta}\right)$ — решение этого уравнения.

Найдем решение сопряженного уравнения $\dot{\psi} = \cos\varphi\psi$:

$$\psi = \psi_0 e \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} dg \to \infty$$

при $g \to 0$. Таким образом, решение S состоит из линейного экспоненциального неустойчивого решения и нелинейного а.у.

$$S = e^{\omega_0 t} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi}{\eta}\right),$$

найденное решение описывает особое движение маятника. На фазовом портрете оно соответствует сепаратрисе, идущей из точки $-\pi$ при $t = -\infty$ в точку π при $t \to +\infty$.

ОПЕРАТОР ГИЛЬБЕРТА–ШМИДТА В ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ

Из необходимых и достаточных условий а.у. следует, что в области притяжения Ω точки $x = 0$ всегда существует пара функций (v, w), удовлетворяющих теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости. При этом имеет место условие

$$-v(x) = \int_0^{\infty} w_x[t] dt, \ x \in \Omega. \tag{17}$$

Введем над областью $\overline{\Omega}$ пространство Гильберта $L^2(\overline{\Omega})$ с обычной мерой dx. Если $g(\cdot) \in L^2(\overline{\Omega})$, то $\|g\|^2 = \int_{\Omega} |g|^2 dx < \infty$ и элемент g представим обобщенным рядом Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$, $c_k = (g, \varphi_k) = \int_{\Omega} g \overline{\varphi}_k dx$, а φ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, — некоторое полное множество ортонормированных функций в $L^2(\overline{\Omega})$. Формула (17) вводит в $L^2(\overline{\Omega})$ функционал $l(g)$ по закону

$$l(g) = \int_0^{\infty} g_x[t] d\mu_x[t], \tag{18}$$

$$d\mu_t[t] = w(x_t(x)) dt.$$

Так как $g_x[t]$ суммируем по модулю, то, по крайней мере, на плотном множестве непрерывных функций в $L^2(\overline{\Omega})$ задан линейный непрерывный функционал. Используя теорему Банаха о распространении линейного функционала, можем считать, что оператор $l(g)$ задан на всем пространстве $L^2(\overline{\Omega})$.

Если рассмотреть в момент времени $t = 0$ сразу все точки $x \in \Omega$, то очевидно, что такие функционалы образуют линейный оператор, обозначим его R:

$$Rg = \int_0^{\infty} \sum c_k \varphi_k(x) d\mu_t(x), \ g \in L^2(\overline{\Omega}). \tag{19}$$

Теорема 1. Оператор R — оператор Гильберта–Шмидта.

Рассмотренный вариант этой теоремы приведен в [11].

Доказательство. Покажем, что в области притяжения Ω имеет место оценка

$$|Rg| \le \left\{ \int_0^\infty \sum_{k,r} c_k c_r \varphi_t^r(x) \overline{\varphi}_t^k(x) d\mu_t(x) \right\}^{1/2} \le C\|g\| v(x).$$

Действительно, N-мерная матрица $K_N = \|K_{rq}\|_0^N$, $k_{rq} = \int_0^\infty \varphi^r \overline{\varphi}^q dt$, $r, q = 0, 1, 2, \ldots, N$, как матрица Грама, удовлетворяет следующим условиям:

1) она положительно-определенная, т.е. $(K_N C, C)_1 \ge 0$, $C = (c_0, \ldots, c_N)$;

2) из 1) следует $(K_N c(\lambda g), c(\lambda g)) = |\lambda| (K_N C, K_N C)_1$;

3) $(K_N C(g_1 + g_2), C(g_1 + g_2))_1 = (K_N C(g_0), C(g_1))_1 + (K_N C(g_0), C(g_1))$.

Условия 1)–3) показывают, что квадратичная форма 1) в каждом евклидовом N-мерном пространстве выпуклая. Кроме того, из (18) следует, что для каждой g из $L^2(\overline{\Omega})$ и каждой точки $x \in \Omega$ имеет место неравенство

$$\sup K_N(g) \le N_g v(x), \tag{20}$$

где N_g — ограниченное число, которое существует согласно теореме о среднем, для каждой $g_t(x)$. Согласно принципу равномерной ограниченности существует такая константа C, что

$$K_N(g) \le C\|g\|_2. \tag{21}$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$|Rg| \le C\|g\|_2 v(x). \tag{22}$$

Теперь, чтобы доказать, что R — оператор Гильберта–Шмидта, воспользуемся теоремой Халмоша–Сандера, которая утверждает [11, с. 136], что R будет оператором Гильберта–Шмидта тогда и только тогда, когда существует функция $S(x)$ в $L^2(\overline{\Omega})$, $0 \le S(x) < \infty$, что для $g \in L^2$ $|Rg| \le \|g\| S(x)$ почти всюду.

Функция $v(x)$ как функция Ляпунова удовлетворяет этому условию, поэтому (22) корректно и теорема доказана.

Как известно, оператор Гильберта–Шмидта задается некоторым симметричным интегральным ядром $\omega(x, y)$, которое можно записать

$$\omega(x, y) = \sum_k \mu_k \psi_k(x) \psi_k(y), \; x, y \in \Omega. \tag{23}$$

Теперь

$$Rg = \int_\Omega \sum_k \mu_k \psi_k(x) \psi_k(y) g(y) dy,$$

где μ_k — собственные числа оператора R, а ψ_k — его собственные функции.

Решение уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x} X = gw \tag{24}$$

можно «истокообразно» представить ядром (23), которое индуцируется функцией w, соотношением

$$f(x) = \int_\Omega \omega(x, y) g(y) dy, \; x \in \Omega. \tag{25}$$

Поскольку правая часть (25) удовлетворяет (24), то $f(x)$ — непрерывная функция для $g \in L^2$, поэтому ядро ω непрерывно и, кроме того, из принадлежности функции $L^2(\overline{\Omega})$ имеем $v(x)=\int_{\overline{\Omega}} \omega(x,y)dy$, а так как ядро положительно по x и из его симметрии следует, что оператор R положительно-определенный и согласно теореме Мерсера (см. [12, с. 145]) спектр $\sigma(R)$ удовлетворяет условию $\sum_k \mu_k < \infty$.

Таким образом, оператор R ядерный и его сумма ряда не зависит от выбора ортонормированной системы $\{\varphi_k(x)\}$ в $L^2(\overline{\Omega})$ (см., например, [12, с. 126]). Выберем φ_k, $k=0,1,2,\ldots$, так, чтобы они имели производные в силу д.с. (векторного поля) по всем координатам $(x_1,\ldots,x_n)$, тогда, подставляя φ_k вместо ψ_k в ряд (23), и, дифференцируя левую и правую части уравнения (25), в силу поля X приходим к уравнению

$$g+v_0=\int_{\overline{\Omega}} \sum_k \mu_k \dot{\varphi}_k(x)\varphi_k(y)g(y)dy, \tag{26}$$

где $g+v_0=gw$ и v_0 — некоторая заданная функция, $(g,v_0)=0$, $\dot{\varphi}_k=\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x}X$, $k=1,2,\ldots$.

Уравнение (26) легко разрешимо известными способами [13]. Оказывается, что μ_k, $k=1,2,\ldots$, — собственные числа матрицы $K^0=K+K^{\mathrm{T}}$, $K=\|K_{ij}\|$, $K_{ij}=\int_{\Omega} \dot{\varphi}_i\varphi_j\,dx$. Эти рассуждения резюмирует следующая теорема.

Теорема 2. В области притяжения Ω оператор L диссипативный в метрике, порождаемой оператором R.

Доказательство этой теоремы следует из того, что $\sigma(LR+RL^*)<0$, если Ω — область притяжения точки $x=0$.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

В задачах управления динамическими системами особую роль играют параметры, с помощью которых управляют системой. Они называются управляющими и традиционно их обозначают $u=(u_1,u_2,\ldots,u_m)$, где $m\le n$. Они принадлежат некоторой допустимой области $\overline{U}$, которая ограничивает ресурс управления: $u\in\overline{U}$. Таким образом, динамическая управляемая система имеет стандартный вид

$$\dot{x}=X(x,u),\ x\in R^n,\ u\in\overline{U}\subset R^m, \tag{27}$$

где правая часть такая, что удовлетворяются некоторые условия существования и единственности при начальных условиях: $t_0=0$, $x\in\Omega_0\subset R^n$.

В задачах синтеза часто возникает задача оптимальной стабилизации. Требуется найти и такие управляющие воздействия $u^0=(u_1^0,\ldots,u_m^0)$, которые обеспечивали бы асимтотическую устойчивость невозмущенного программного движения в силу уравнений (27). Для заданного критерия качества I, который характеризует качество управления, выполняется условие минимума $I(u^0)\le I(u)$. Удобно задавать I на решениях x_t в виде некоторого интеграла

$$I=\int_0^\infty (x[t],u[t])dt. \tag{28}$$

Основной результат в этом направлении сформулирован в [1–3] и состоит в следующем:

1) функция $\omega(x,u^0(x))$ положительно-определенная;

2) справедливо равенство

$$L = \frac{\partial}{\partial x} X = \omega ; \tag{29}$$

3) для всех $u \neq u^0$, но принадлежащих $\overline{U}$, $Lv - \omega \geq 0$.

Решение этой задачи очевидным образом теперь свелось к решению уравнения Гамильтона–Якоби $\dfrac{\partial v}{\partial x} X(x, u) = \omega(x, u)$, при условиях $v(0) = 0$, $\omega(x, u^0) \leq \omega(x, u)$, $u \in \overline{U}$; что, в свою очередь, сводится к решению соответствующих (см. выше) интегральных уравнений Фредгольма второго рода. При этом следует отметить, что полученные решения удовлетворяют не только достаточным, но и необходимым условиям, так как построенное таким образом уравнение Гамильтона–Якоба будет обобщенным в смысле Кларка [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. — Харьков: Математическое общество Харькова, 1892.
2. Анапольский Л.Ю., Иртегов В.Д., Матросов В.М. Способы построения функции Ляпунова. — М.: Итоги науки и техники. — 1975. — Т. 2. — С. 53–111.
3. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. — 1960. — **21**, № 4. — С. 436–441; № 5. — С. 561–568; № 6. — С. 661–665; 1961. — **22**, № 4. — С. 425–435; 1962. — **23,** № 11. — С. 1405–1413.
4. Гальперин Е.Н., Красовский Н.Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем // ПММ. — 1963. — **27**, вып. 6. — С. 988–1004..
5. Зубов В.И. К теории аналитического построения регуляторов // Автоматика и телемеханика. — 1963. — **24**, № 8. — С. 1037–1041.
6. Зубов В.И. Устойчивость движения. — М.: Высш. шк., 1973. — 271 с.
7. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974. — 431 с.
8. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
9. Parsa Z., Zadorozhny V. Mathematical methods of optimization for charged particle beams // J. Nonlinear Studies. — 2007. — **14,** N 4. — P. 319–325.
10. Задорожный В.Ф. Управляемые динамические системы и оператор Карлемана // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 5. — С. 54–61.
11. Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. — М.: Наука, 1985. — 154 с.
12. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965. — 448 с.
13. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954. — 499 с.
14. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1968. — 280 с.

Поступила 14.05.2009