УДК 519.21

Т.В. ПЕПЕЛЯЕВА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

Ключевые слова: *стохастическое дифференциальное уравнение, дробное винеровское поле, оптимальное управление*.

В настоящей работе рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение с дробным винеровским полем с параметрами Харста $(H, H') \in (0, 1/2)^2$, а также задача управления решением такого уравнения. В [1, 2] исследован дробный винеровский процесс с параметром Харста $H \in (1/2, 1)$ и соответствующее стохастическое дифференциальное уравнение. Однако при решении некоторых задач финансовой математики для моделирования стохастических динамических систем используется не случайный процесс, а поле. В данной статье найдены условия существования оптимального управления полями. Полученные результаты могут применяться в экономике, гидрологии, телекоммуникациях и других областях, где возникают задачи оптимального управления стохастическими динамическими системами.

Пусть $(\Omega, \Re, P)$ — вероятностное пространство, $\Re_z$, $z \in A$, $A = [0, 1]^2$, — двупараметрическое семейство σ-подалгебр $\Re$, причем $\Re_{z_1} \subset \Re_z$, если $z_1 \le z$, где выражение $z_1 \le z$ означает покоординатное неравенство между $z_1 = (t_1, s_1)$ и $z = (t, s)$.

Обозначим $L_2([0, 1]^2)$ пространство $\Re_z$-измеримых полей $\varphi = \{\varphi(t, s), (t, s) \in A\}$, таких, что

$$\int_0^1 \int_0^1 E|\varphi_{t,s}(\omega)|^2 \, dt ds < \infty .$$

Пусть также $L([0, 1]^2)$ — пространство $\Re_z$-измеримых полей $\varphi = \{\varphi(t, s), (t, s) \in A\}$, для которых справедливо

$$P\left\{\int_0^1 \int_0^1 E|\varphi_{t,s}(\omega)|^2 \, dt ds < \infty\right\} = 1.$$

Для функций из классов $L_2([0, 1]^2)$ и $L([0, 1]^2)$ определен стохастический интеграл:

$$I(\varphi) = \int_0^1 \int_0^1 E|\varphi(t, s)|^2 \, dW(t, s).$$

Интеграл $I(\varphi)$ имеет следующие свойства:

1) если $\varphi \in L_2([0, 1]^2)$, то процесс $\{I_{t,s}(\varphi), (t, s) \in A\}$ — квадратично интегрированный мартингал;

2) $EI_{t,s}(\varphi) = 0, (t, s) \in A$, $\varphi \in L_2([0, 1]^2)$;

3) $EI^2_{t,s}(\varphi) = \int_0^t \int_0^s E|\varphi(\alpha, \beta)|^2 \, d\alpha d\beta < \infty$, $(t, s) \in A$, $\varphi \in L_2([0, 1]^2)$.

Пусть $B_z^{H,H'}$ — дробное винеровское поле с параметрами Харста $(H,H')\in(0,1/2)^2$, т.е. $B_z^{H,H'}$ — гауссовское поле, с ковариационной функцией

$$R_{H,H'}(z,z')=E(B_z^{H,H'},B_{z'}^{H,H'})=$$
$$=\frac{1}{4}(t^{2H}+t'^{2H}-|t'-t|^{2H})(s^{2H'}+s'^{2H'}-|s'-s|^{2H'}),$$
$$z=(t,s),\ z'=(t',s').$$

Заметим, что при $H=H'=1/2$ $B_z^{H,H'}$ — обычное винеровское поле.

Пусть $(C,\Im)$ — измеримое пространство непрерывных на A функций f с потоком σ-алгебр $\Im_z=\sigma\{f(z_1),z_1\le z\}$, $\Im=\sigma\{f(z),z\in A\}$.

Рассмотрим уравнение

$$\xi(t,s)=\xi_0+\int_0^t\int_0^s a(x,y,\xi,u)\,dx\,dy+B_{(t,s)}^{H,H'},\ (t,s)\in A, \tag{1}$$

где a — $\Im_z$-измеримый функционал, $u:A\to\widetilde{U}$ — управление, не зависящее от будущего. Пусть U — класс всех управлений, для которых существует решение уравнения (1), $\aleph$ — наименьшая σ-алгебра борелевских подмножеств из A, $\aleph_{\widetilde{U}}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств из $\widetilde{U}$, $(\widetilde{U},\aleph_{\widetilde{U}})$ — метрический компакт.

Задача оптимизации управления решением уравнения (1) состоит в том, чтобы найти управление u^* в классе допустимых управлений, минимизирующее стоимость управления F, которое задается как

$$F(u)=E\int_0^1\int_0^1 f(t,s,\xi^u(t,s),u(t,s,\xi^u(t,s))\,dtds,$$

где $f(z,\xi,u)$ — непрерывная неотрицательная функция, $(z,\xi,u)\in A\times C\times\widetilde{U}$, $\xi^u(z)$ — решение уравнения (1), соответствующее управлению $u=u(z,\xi^u(z))$.

Пусть $Z=\inf\limits_{u\in U}F(u)$. Величину Z назовем оптимальной стоимостью управления в классе U. Управление γ называется оптимальным в U, если стоимость $F(u)$ при $u=\gamma$ достигает минимума.

Найдем условия существования оптимального управления решением уравнения (1).

Согласно [3] дробное винеровское поле $B^{H,H'}$ допускает интегральное представление

$$B_z^{H,H'}=\int_0^t\int_0^s K_{H,H'}(z,z')\,dW_{z'},$$

где $K_{H,H'}(z,z')=K_H(s,s')K_{H'}(t,t')$, а $K_H(s,s')$ и $K_{H'}(t,t')$ заданы в [2].

Ядро $K_{H,H'}$ определяет оператор $K_{H,H'}$ в $L_2([0,1]^2)$ как

$$K_{H,H'}h(s,t)=I^{2H,2H'}t^{1/2-H}s^{1/2-H'}I^{1/2-H,1/2-H'}t^{H-1/2}s^{H'-1/2}h,\ h\in L_2([0,1]^2),$$

где $I^{\alpha,\beta}f(x,y)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^x\int_0^y(x-u)^{\alpha-1}(y-v)^{\beta-1}f(u,v)\,dudv$, Γ — функция Эйлера, $\alpha,\beta>0$, $f\in L([0,1]^2)$.

Обратный оператор $K^{-1}_{H,H'}$ определяется как

$$K^{-1}_{H,H'}h(t,s)=t^{1/2-H}s^{1/2-H'}D^{1/2-H,1/2-H'}t^{H-1/2}s^{H'-1/2}D^{2H,2H'}h\,,$$

где $D^{\alpha,\beta}f(x,y)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\displaystyle\int_0^x\int_0^y\dfrac{f(u,v)}{(x-u)^{\alpha}(y-v)^{\beta}}dudv$.

Пусть $a(t,s,x,u)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $a(t,s,x,u)$ — $\aleph\times\Im\times\aleph_{\widetilde{U}}$-измеримая функция;

2) $\forall(t,s)\in A$ функция $a(t,s,x,u)$ $\Im\times\aleph_{\widetilde{U}}$-измерима;

3) $\forall(t,s)\in A$, $x\in C$ функция $a(t,s,x,u)$ непрерывна на $\widetilde{U}$;

4) $\forall(t,s)\in A$, $x\in C$ множество $a(t,s,x,\widetilde{U})=\{a(t,s,x,u),u\in\widetilde{U}\}$ выпукло и замкнуто;

5) $\exists L>0$ такое, что $|a(t,s,x,u)|^2\le L(1+\|x\|^2)$;

6) $\exists M>0$ такое, что

$$\left|K^{-1}\left(\int_0^t\int_0^s a(\alpha,\beta,x,u)d\alpha d\beta\right)\right|^2\le M(1+\|x\|^2),$$

где $\|x\|$ — норма в $C([0,1]^2)$.

Вопрос существования слабого решения уравнения (1) исследован в работе [3], где был получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 5) для $a(t,s,x,u)$. Тогда уравнение (1) имеет слабое решение.

Применим теорему Гирсанова для дробного винеровского поля [3]. Она формулируется следующим образом.

Теорема 2. Пусть поле $\eta=\{\eta_z,z\in A\}$ имеет интегрированную траекторию и $\widetilde{B}^{H,H'}_z=B^{H,H'}_z+\displaystyle\int_{[0,z]}u_y\,dy$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) $\displaystyle\int_{[0,z]}u_y\,dy\in I^{H+1/2,H'+1/2}(L^2(A))$ почти наверное;

2) $E\zeta=1$, где

$$\zeta=\exp\left\{-\int_{[0,1]^2}\left(K^{-1}_{H,H'}\int_{[0,z]}u_y dy\right)(z)dW_z-\frac{1}{2}\int_{[0,1]^2}\left(K^{-1}_{H,H'}\int_{[0,z]}u_y dy\right)^2(z)dz\right\}.$$

Тогда $\widetilde{B}^{H,H'}_z$ — $\Re_z$-дробное винеровское поле с параметрами Харста (H,H') по новой вероятности $\widetilde{P}$, определенной как $\dfrac{d\widetilde{P}}{dP}=\zeta$.

Положим $a_u(t,s,x)=a(t,s,x,u(t,x))$, $(t,s)\in[0,1]^2$, $x\in C$, $u\in\widetilde{U}$.

Зафиксируем вероятностное пространство $(\Omega,\Re,P_0)$ с винеровским полем $W=(W_z,\Re_z,P_0)$.

Определим множество D как

$$D=\exp\{\zeta^{1,1}_{0,0}(a_u),u\in U\},$$

где

$$\zeta^{1,1}_{0,0}(a_u)=\int_{[0,1]^2}\left(K^{-1}_{H,H'}\int_0^t\int_0^s a_u(\alpha,\beta,W)d\alpha d\beta\right)dW(t,s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{[0,1]^2}\left(K^{-1}_{H,H'}\int_0^t\int_0^s a_u(\alpha,\beta,W)d\alpha d\beta\right)^2 dtds.$$

Докажем, что множество плотностей D — слабый компакт в пространстве $L_1([0,1]^2)$. Покажем, что D — равномерно интегрированное и слабо замкнутое множество в $L_1([0,1]^2)$.

Лемма 1. Существует константа $\gamma^* > 1$ такая, что

$$\sup_{u \in U} E_0 \exp\{\gamma^* \zeta_{0,0}^{1,1}(a_u)\} > \infty .$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\exp\{\gamma \zeta_{0,0}^{1,1}(a_u)\} = \exp\left\{\gamma \int\limits_{[0,1]^2} \left(K_{H,H'}^{-1} \int\limits_0^t \int\limits_0^s a_u(\alpha,\beta,\xi) d\alpha d\beta \right) dW(t,s) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\gamma \int\limits_{[0,1]^2} \left(K_{H,H'}^{-1} \int\limits_0^t \int\limits_0^s a_u(\alpha,\beta,\xi) d\alpha d\beta \right)^2 dtds \right\} =$$

$$= \exp\left\{\gamma \int\limits_{[0,1]^2} \left(K_{H,H'}^{-1} \int\limits_0^t \int\limits_0^s a_u(\alpha,\beta,\xi) d\alpha d\beta \right) dW(t,s) - \right.$$

$$-\frac{1}{2} \int\limits_{[0,1]^2} \left(K_{H,H'}^{-1} \int\limits_0^t \int\limits_0^s \gamma a_u(\alpha,\beta,\xi) d\alpha d\beta \right)^2 dtds +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_{[0,1]^2} \left(K_{H,H'}^{-1} \int\limits_0^t \int\limits_0^s \gamma a_u(\alpha,\beta,\xi) d\alpha d\beta \right)^2 dtds -$$

$$\left. -\frac{1}{2}\gamma \int\limits_{[0,1]^2} \left(K_{H,H'}^{-1} \int\limits_0^t \int\limits_0^s a_u(\alpha,\beta,\xi) d\alpha d\beta \right)^2 dtds \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \zeta_{0,0}^{1,1}(\gamma a_u) + \frac{\gamma^2 - \gamma}{2} \int\limits_{[0,1]^2} \left(K_{H,H'}^{-1} \int\limits_0^t \int\limits_0^s a_u(\alpha,\beta) d\alpha d\beta \right)^2 dtds \right\} \le$$

$$\le \exp\left\{ \zeta_{0,0}^{1,1}(\gamma a_u) + \frac{\gamma^2 - \gamma}{2} M \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (1 + |W(t,s)|^2) dtds \right\} .$$

Последнее неравенство вытекает из свойства 6) функционала a.

Пусть

$$\eta_{t,s} = W_{t,s} - \gamma \int\limits_0^t \int\limits_0^s K_{H,H'}^{-1} \left(\int\limits_0^y \int\limits_0^v a_u(\alpha,\beta,W) d\alpha d\beta \right)(y,v) dy dv . \qquad (2)$$

Из соотношения (2), свойства 6) функционала a и неравенства Иенсена получаем

$$|W_{t,s}|^2 = \left(\eta_{t,s} + \gamma \int\limits_0^t \int\limits_0^s K_{H,H'}^{-1} \left(\int\limits_0^y \int\limits_0^v a_u(\alpha,\beta,W) d\alpha d\beta \right)(y,v) dy dv \right)^2 \le$$

$$\le 2|\eta_{t,s}|^2 + 2\gamma^2 \left(\int\limits_0^t \int\limits_0^s K_{H,H'}^{-1} \left(\int\limits_0^y \int\limits_0^v a_u(\alpha,\beta,W) d\alpha d\beta \right)(y,v) dy dv \right)^2 \le$$

$$\leq 2|\eta_{t,s}|^2 + 2\gamma^2 \int_0^t \int_0^s \left(K_{H,H'}^{-1} \left(\int_0^y \int_0^v a_u(\alpha, \beta, W)\, d\alpha d\beta \right)(y, v) \right)^2 dy dv \leq$$

$$\leq 2|\eta_{t,s}|^2 + 2\gamma^2 M \int_0^t \int_0^s |W_{\alpha,\beta}|^2 \, d\alpha d\beta.$$

Согласно неравенству Гронуола–Беллмана имеем

$$|W_{t,s}|^2 \leq 2(\gamma^2 M + |\eta_{t,s}|^2)\exp\{2\gamma^2 M\},$$

откуда

$$E\exp\{\gamma\zeta(a_u)\} \leq$$

$$\leq E\exp\left\{ \zeta(\gamma a_u) + \frac{\gamma^2 - \gamma}{2} M \int_{[0,1]^2} (1 + 2(\gamma^2 M + |\eta_{t,s}|^2)\exp\{2\gamma^2 M\})\, dt ds \right\} =$$

$$= h(\gamma) E\exp\left\{ \zeta(\gamma a_u) + (\gamma^2 - \gamma) M \exp\{2\gamma^2 M\} \int_{[0,1]^2} |\eta_{t,s}|^2 \, dt ds \right\},$$

где $h(\gamma) = \exp\left\{ \dfrac{\gamma^2 - \gamma}{2} M + 2\gamma^2 M \exp\{2\gamma^2 M\} \right\}$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi_z = f(t, s, \xi, u(t, s, \xi))\, dt ds + dW_{t,s}, \ (t, s) \in [0,1] \times [0,1]. \tag{3}$$

Для уравнения (3) плотность $\zeta_{(00)}^{(t,s)}(f)$ определена в работе [4] следующим образом:

$$\zeta_{(00)}^{(t,s)}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(t, s, W, u)\, dW(t, s) - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 |f(t, s, W, u)|^2 \, dt ds, \ (t, s) \in [0,1]^2. \tag{4}$$

В [4] доказано, что $E\exp\{\zeta_{(00)}^{(t,s)}(\gamma f)\} = 1$ для $\gamma > 0$.

Для функции $K_{H,H'}^{-1} \int_0^t \int_0^s a_n(v, y, \xi)\, dv dy$ условия 1)–5) выполнены. Тогда

$$E\exp\{\zeta(\gamma a_u(t, s, W))\} = E\exp\left\{ \varphi\zeta_{(00)}^{(t,s)} \left(\gamma K_{H,H'}^{-1} \int_0^t \int_0^s a_n(v, y, W)\, dv dy \right) \right\} = 1.$$

По теореме 2 для дробных винеровских полей

$$P'(dw) = \exp\{\zeta(\gamma a_u)\} P_0(dw).$$

Тогда

$$E_0 \exp\{\gamma\zeta(a_u)\} \leq h(\gamma) E_0 \exp\{M(\gamma^2 - \gamma)\exp\{2\gamma^2 M\} |W_{t,s}|^2\}. \tag{5}$$

Легко проверить, что функция $h(\gamma)$ ограничена в окрестности точки $\gamma = 1$. Возьмем $\gamma > 1$, близкое к 1, тогда математическое ожидание в правой части неравенства (5) конечно и $E_0 \exp\{\gamma\zeta(a_u)\} \leq C < \infty$, где константа C зависит лишь от γ и M.

Лемма доказана.

Докажем замкнутость множества D в пространстве L_1. Определим множество G следующим образом:

$$G = \{a_n : E\exp\zeta_{0,0}^{1,1}(a_n) = 1\}.$$

Приведем формулировку леммы из [4], которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 2. Пусть $\xi_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ — последовательность случайных величин таких, что $\xi_n \to \xi$ по вероятности при $n \to \infty$. Если $E\xi_n = E\xi = c$, то

$$\lim_{n\to\infty} E\,|\xi_n - \xi| = 0.$$

Лемма 3. Пусть множество G замкнуто в смысле сходимости по вероятности. Тогда множество D замкнуто в L_1.

Доказательство. Пусть последовательность элементов $\exp\zeta_{0,0}^{1,1}(a_n) \in D$ сходится к $\rho \in L_1$ по вероятности. Имеем $E\exp\{\zeta_{0,0}^{1,1}(a_n)\} = 1$ и $E\rho = 1$, тогда согласно лемме 2

$$\lim_{n\to\infty} E\,|\exp\zeta_{0,0}^{1,1}(a_n) - \rho| = 0,$$

откуда следует замкнутость множества D в пространстве L_1.

Лемма доказана.

Следовательно, из лемм 1 и 3 вытекает, что множество D слабо компактно в пространстве L_1. Функционал $F(u)$ непрерывен. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1)–6) для функционала $a(t, s, x, u)$ и множество G замкнуто в смысле сходимости по вероятности. Тогда существует управление $u^* \in U$ такое, что

$$F(u^*) = \inf_{u\in U} F(u).$$

Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы о том, что непрерывная на компакте функция достигает своего минимума на компакте.

Данная теорема дает условия существования оптимального управления полями, которые удовлетворяют стохастическим уравнениям с дробным винеровским полем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дериева Е. Н., Пепеляева Т. В. Об одной задаче управления случайными процессами // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 1. — С. 116–121.
2. Пепеляева Т. В. Об одной задаче управления стохастической системой на финансовом рынке // Теория оптимальных решений. — 2004. — № 3. — С. 133–141.
3. Erraoui M., Nualart D., Ouknine Yo. Hyperbolic stochastic partial differential equation with additive fractional brownian sheet. — Barcelona, 2002. — 19 p. — (Math. Prepr. Ser.; N 307).
4. Кнопов П. С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем. — К.: Наук. думка, 1981. — 151 с.

Поступила 15.09.2009