УДК 518.9

К.Г. ДЗЮБЕНКО, А.А. ЧИКРИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Ключевые слова: *дискретная система, конфликтно управляемый процесс, случайное возмущение, гарантированное время достижения, многозначное отображение, условие Понтрягина.*

В настоящее время достаточно хорошо развита теория динамических игр. Существующие подходы — прямые методы Л.С. Понтрягина [1], правило экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [2], метод полугрупповых операторов Б.Н. Пшеничного [3], техника, связанная с основными уравнениями теории дифференциальных игр Р. Айзекса [4], метод разрешающих функций [5] и ряд других эффективных процедур позволяют исследовать широкие классы конфликтно управляемых процессов на предмет игрового сближения траекторий. Весьма разнообразны и убедительны методы уклонения от встречи: метод маневра обхода Л.С. Понтрягина–Е.Ф. Мищенко, методы постоянных и переменных направлений, метод инвариантных подпространств, рекурсивный метод. Соответствующий обзор содержится в [6].

Поэтому естественным образом возникает вопрос о внесении в модель конфликтно управляемого процесса не только детерминированной [7], но и стохастической неопределенности. Это можно сделать по-разному. Так, в работах [8–10] рассматривается ситуация, когда вместо начального состояния процесса известна лишь его функция распределения, что приводит к изучению уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова [8, 10, 11], решением которого является функция распределения текущего состояния процесса. Примеры оптимизации таких непрерывных процессов содержатся в [8] (на основе принципа максимума Понтрягина) и в [10], где это осуществляется с помощью необходимых условий экстремума Милютина–Дубовицкого. Поскольку нахождение решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова в непрерывном варианте — довольно трудная проблема, то часто прибегают к дискретизации начального распределения или времени. Полная картина возможных формализаций в этом классе представлена в [11]. Примеры подобного рода исследований для игровых постановок содержатся в [12, 13].

Упомянутые задачи со стохастической неопределенностью часто называют задачами поиска [14]. В работах [15–18] предложена билинейная модель поиска, где стохастическая переходная матрица представляет собой блок управления, число состояний конечно, а время дискретно. При этом критерий качества — вероятность обнаружения или среднее время обнаружения объекта. Дискретный принцип максимума или динамическое программирование позволяет оптимизировать процесс поиска, в том числе с участием группировок движущихся объектов при различных информационных предположениях.

Привнесение неопределенности в модель может быть осуществлено с помощью смешанных стратегий игроков [19, 20]. Широкий спектр исследований различного класса стохастических игр содержится в работах [21–26]. По-видимому, одним из наиболее естественных путей исследования стохастических конфликтно управляемых процессов (стохастических дифференциальных игр) является рассмотрение в исходной постановке стохастического уравнения Ито с управляющим воздействием или введение в правую часть детерминированной динамической системы случайного возмущения. Эти исследования содержатся, в частности, в [27]. При этом могут применяться различные методики для оптимизации.

В данной работе в качестве базового метода используется известный в теории динамических игр метод разрешающих функций [5, 28] для исследования дискретных систем со случайными возмущениями. Способность вычислять разрешающие функции в аналитическом виде для достаточно широкого класса задач позволяет делать заключения о возможности вывода траектории процесса на заданное множество с учетом вероятностных характеристик случайного возмущения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть динамика конфликтно управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве R^d описывается квазилинейной системой разностных уравнений

$$z(t+1) = Az(t) + \varphi(u(t), v(t)) + \varepsilon(t), \; z(0) = z_0, \; t \in N_0. \tag{1}$$

Здесь N — множество всех натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $d \in N$, A — квадратная матрица порядка d, $z_0 \in R^d$. Векторы $z(t) \in R^d$, $t \in N_0$, описывают состояния системы, $u(t)$ и $v(t)$ — параметры управления игроков, которые в каждый момент времени выбираются из множеств U и V, являющихся компактами в пространстве R^d:

$$u(t) \in U, \; v(t) \in V, \; t \in N_0.$$

Функция $\varphi: U \times V \to R^d$ — блок управления. Случайная функция $\varepsilon(t)$, $t \in N_0$, со значениями в R^d представляет собой случайные возмущения. Терминальное множество предполагается цилиндрическим:

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство в R^d, M — компакт, принадлежащий ортогональному дополнению $M_0^{\perp}$ к M_0 в пространстве R^d.

Цели первого (u) и второго (v) игроков противоположны. Первый стремится вывести траекторию процесса (1) на множество (2) за кратчайшее время, а второй — максимально отсрочить момент попадания траектории на множество M^* или вообще избежать этой встречи. Примем сторону первого игрока и оценим, что он может гарантировать себе в игре (1), (2). Взаимная информированность о выборе управлений будет уточнена далее.

Множество реализаций E случайной последовательности $\varepsilon(t)$, $t \in N_0$, обычно бесконечно. Например если в каждый момент $\varepsilon(t)$ принимает конечное число значений, то множество реализаций этой последовательности имеет мощность континуума [29, с. 22]. Зафиксируем некоторый элемент $\varepsilon_*(\cdot) \in E$ и рассмотрим уже детерминированный процесс (1), где случайная последовательность $\varepsilon(\cdot)$ заменена на некоторую ее фиксированную реализацию $\varepsilon_*(\cdot)$:

$$z(t+1) = Az(t) + \varphi(u(t), v(t)) + \varepsilon_*(t), \; z(0) = z_0, \; t \in N_0. \tag{3}$$

Для конфликтно управляемого процесса (3), (2) установим достаточные условия приведения траектории на множество (2) за некоторое гарантированное время [5]. При этом будем предполагать, что первый игрок использует контруправления, т.е.

$$u(t) = u(z_0, v(t)), \; t \in N_0. \tag{4}$$

СХЕМА МЕТОДА РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Пусть π — ортопроектор, действующий из R^d на $M_0^{\perp}$. Положив $\varphi(U, v) = \left\{ \varphi(u, v) \colon u \in U \right\}$, рассмотрим многозначные отображения

$$W(s, v) = \pi A^s \varphi(U, v), \; s \in N_0, \; v \in V;$$

$$W(s) = \bigcap_{v \in V} W(s, v), \; s \in N_0.$$

Пусть выполнено следующее условие.

Условие Понтрягина [1, с. 344]. Многозначное отображение $W(s)$ имеет непустые образы для всех $s \in N_0$.

Выберем в отображении $W(s)$ некоторый селектор $\gamma(s)$ и зафиксируем его. Обозначим

$$\xi(t, z_0, \varepsilon_*(\,\cdot\,), \gamma(\,\cdot\,)) = \pi A^t z_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \pi A^{t-s-1} \varepsilon_*(s) + \sum_{s=0}^{t-1} \gamma(t-s-1), \; t \in N .$$

Введем многозначное отображение

$$A(t,s,v) = \{\alpha \geq 0 \colon \big(W(t-s-1, v) - \gamma(t-s-1)\big) \cap \alpha \big(M - \xi(t, z_0, \varepsilon_*(\,\cdot\,), \gamma(\,\cdot\,))\big) \neq \varnothing\},$$
$$s = \overline{0, t-1}, \; t \in N, \; v \in V . \tag{5}$$

Его опорная функция [30, 31] в направлении +1 имеет вид

$$\alpha(t,s,v) = \sup A(t,s,v), \; s = \overline{0,t-1}, \; t \in N, \; v \in V . \tag{6}$$

Очевидно, $\alpha(t,s,v) \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ для $s = \overline{0,t-1}$, $t \in N$, $v \in V$. Кроме того, в силу включений $\gamma(s) \in W(s)$, $s \in N$, выполнено $0 \in A(t,s,v)$ для всех возможных значений аргументов. Если $\xi(t, z_0, \varepsilon_*(\,\cdot\,), \gamma(\,\cdot\,)) \in M$, то из выражений (5), (6) следует, что

$$A(t,s,v) = [0, +\infty), \; s = \overline{0,t-1}, \; v \in V,$$

а соответствующая разрешающая функция $\alpha(t,s,v) = +\infty$ для указанных значений s и v. Если же $\xi(t, z_0, \varepsilon_*(\,\cdot\,), \gamma(\,\cdot\,)) \notin M$, то функция (6) принимает конечные значения.

Рассмотрим функцию

$$T(z_0, \varepsilon_*(\,\cdot\,), \gamma(\,\cdot\,)) = \min \left\{ t \in N \colon \sum_{s=0}^{t-1} \inf_{v \in V} \alpha(t,s,v) \geq 1 \right\} . \tag{7}$$

Если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном $t \in N$, то положим $T(z_0, \varepsilon_*(\,\cdot\,), \gamma(\,\cdot\,)) = +\infty$. Будем обозначать $T = T(z_0, \varepsilon_*(\,\cdot\,), \gamma(\,\cdot\,))$.

Условие выпуклозначности [28]. Существует такой селектор $\gamma(\,\cdot\,)$, что при заданных z_0 и $\varepsilon_*(\,\cdot\,)$ отображение $A(T,s,v)$, $s = \overline{0,T-1}$, $v \in V$, выпуклозначно.

Лемма 1. Пусть для конфликтно управляемого процесса (3), (2) выполнено условие Понтрягина, M выпукло и $T = T(z_0, \varepsilon_*(\,\cdot\,), \gamma(\,\cdot\,)) < +\infty$ для начального состояния z_0, реализации случайного возмущения $\varepsilon_*(\,\cdot\,)$ и селектора $\gamma(\,\cdot\,)$, причем выполнено условие выпуклозначности. Тогда траектория процесса (3) может быть приведена на терминальное множество (2) в момент T с помощью управления вида (4).

Доказательство. Зафиксируем некоторую функцию $v(s)$, $s = \overline{0,T-1}$, со значениями в V. Рассмотрим сначала случай $\xi(T, z_0, \varepsilon_*(\,\cdot\,), \gamma(\,\cdot\,)) \notin M$. Из условия выпуклозначности и неравенства в (7) следует, что существует такая не зависящая от v функция дискретного аргумента $\alpha_s(T)$ ($\alpha_s(T) \in A(T,s,v)$, $s = \overline{0,T-1}$), что выполнено

$$\sum_{s=0}^{T-1} \alpha_s(T) = 1 . \tag{8}$$

В частности, такую функцию можно построить следующим образом, опираясь на разрешающую функцию

$$\alpha_s(T) = \frac{1}{\alpha(T)} \inf_{v \in V} \alpha(T,s,v), \tag{9}$$

где $\alpha(T) = \sum_{s=0}^{T-1} \inf_{v \in V} \alpha(T,s,v)$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U(T,s,v)=\{u\in U: \pi A^{T-s-1}\varphi(u,v)-\gamma(T-s-1)\in\alpha_s(T)\big(M-\xi(T,z_0,\varepsilon_*(\cdot),\gamma(\cdot))\big)\},$$

$$s=\overline{0,T-1},\ v\in V. \tag{10}$$

Оно имеет непустые образы в силу предыдущих построений. В качестве управлений первого игрока на каждом шаге выберем селектор

$$u(s,v)\in U(T,s,v),\ s=\overline{0,T-1},\ v\in V. \tag{11}$$

Тогда, учитывая представление проекции решения уравнения (3) в виде

$$\pi z(T)=\pi A^T z_0+\sum_{s=0}^{T-1}\pi A^{T-s-1}\varphi(u(s),v(s))+\sum_{s=0}^{T-1}\pi A^{T-s-1}\varepsilon_*(s),$$

прибавив и вычтя из правой части величину $\sum_{s=0}^{t-1}\gamma(t-s-1)$, получим

$$\pi z(T)\in\xi(T,z_0,\varepsilon_*(\cdot),\gamma(\cdot))\left(1-\sum_{s=0}^{T-1}\alpha_s(T)\right)+\sum_{s=0}^{T-1}\alpha_s(T)M=M. \tag{12}$$

В последнем равенстве учтены соотношения (8), (9) и выпуклость множества M.

В случае $\xi(T,z_0,\varepsilon_*(\cdot),\gamma(\cdot))\in M$ положим $\alpha_s(T)=0$, $s=\overline{0,T-1}$, и выберем управления на каждом шаге в соответствии с множителями, полученными в результате соотношений (10), (11). Тогда из (12) следует, что $\pi z(T)=\xi(T,z_0,\varepsilon_*(\cdot),\gamma(\cdot))\in M$. ■

Как видно из схемы метода разрешающих функций, выбор векторов $\gamma(\cdot)$ непосредственно не связан с реализацией случайных возмущений. Предположим, что для заданного начального состояния z_0 существует такой селектор $\gamma(\cdot)$, что при любой реализации случайных возмущений $\varepsilon_*(\cdot)\in E$ выполнены предположения леммы 1 и, кроме того, $\sup\limits_{\varepsilon_*(\cdot)\in E} T(z_0,\varepsilon_*(\cdot),\gamma(\cdot))<+\infty$. Отсюда сразу же следует, что каждая реализация случайных возмущений до момента окончания игры состоит из конечного числа векторов. Более того, вероятность p_*^j каждой реализации $\varepsilon_*^j(\cdot)$ случайных возмущений можно легко вычислить (например, при независимых $\varepsilon(1),\ldots,\varepsilon(k)$). Тогда среднее гарантированное время достижения представляет собой величину $MT=\sum\limits_j p_*^j T(z_0,\varepsilon_*^j(\cdot),\gamma(\cdot))$. Это среднее гарантированное время реализуется с помощью смешанной стратегии, заключающейся в использовании чистых стратегий, предоставляемых леммой, с вероятностями p_*^j, соответствующими реализациям $\varepsilon_*(\cdot)$ случайных возмущений $\varepsilon(\cdot)$.

Случай $\sup\limits_{\varepsilon_*(\cdot)\in E} T(z_0,\varepsilon_*(\cdot),\gamma(\cdot))=+\infty$ представляется более трудным. Подробнее он исследуется на примере процесса (3) с простой матрицей.

МОДЕЛЬ ПРОСТОГО ДВИЖЕНИЯ

Пусть последовательность $\varepsilon(\cdot)$ имеет произвольное распределение, $\varepsilon_*(\cdot)$ — любая ее реализация. Рассматрим специальный случай процесса (3):

$$A=\lambda E,\ \lambda\in R;$$

$$\varphi(u,v)=u-v,\ u\in U,\ v\in V$$

(E — единичная матрица $m\times m$). Тогда (3) принимает вид

$$z(t+1)=\lambda z(t)+u(t)-v(t)+\varepsilon_*(t),\ t\in N_0. \tag{13}$$

Также пусть для некоторых $a>1$ и $\delta>0$

$$U=aK_1\,,\ V=K_1\,,\ M_0\ =\ \{\vec{0}\},\ M=\delta K_1\,, \tag{14}$$

где $\vec{0}$ — нулевой вектор в R^d, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в R^d, $K_1=\{x\in R^d$: $\|x\|\le 1\}$. Тогда $M_0^{\perp}\ =R^d$, $\pi=E$, $\varphi(U,v)=aK_1-v$, $W(s,v)=\lambda^s(aK_1-v)$, $s\in N_0$, $v\in V$. Выполнено условие Понтрягина

$$W(s)\ =\ \bigcap_{v\in K_1}W(s,v)\ =\ \bigcap_{v\in K_1}\lambda^s(aK_1-v)\ =\ \lambda^s(aK_1\overset{*}{-}K_1)\ =\ \lambda^s(a-1)K_1\ne\varnothing,\ s\in N_0$$

($X\overset{*}{-}Y=\bigcap_{y\in Y}(X-y)$ — геометрическая разность множеств X и Y). Также выполнено условие выпуклозначности при любом конечном значении $T=t$ для селекторов $\gamma_0(s)=0$, $s=\overline{0,t-1}$, в силу следующего утверждения.

Лемма 2. Для процесса, определяемого (13), (14), множество

$$A(t,s,v)\ =\ \{\alpha\ge 0:\ W(t-s-1,v)\cap\alpha\,(M(t)-\xi(t,z_0,\varepsilon_*(\,\cdot\,),\gamma_0(\,\cdot\,)))\ne\varnothing\}$$

выпукло при всех $s=\overline{0,t-1}$, $t\in N$, $v\in K_1$.

Доказательство. Запишем рассматриваемое множество в виде

$$A(t,s,v)=\left\{\alpha\ge 0\!:\lambda^{t-s-1}\,(aK_1-v)\cap\alpha\,\left(\delta K_1-\lambda^t z_0-\sum_{k=0}^{t-1}\lambda^{t-k-1}\varepsilon_*(k)\right)\ne\varnothing\right\}.$$

Зафиксируем произвольные $\alpha_1,\alpha_2\in A(t,s,v)$, не равные нулю одновременно, и $x_1,x_2\in\delta K_1$, удовлетворяющие соотношениям $\alpha_i\left(x_i-\lambda^t z_0-\sum_{k=0}^{t-1}\lambda^{t-k-1}\varepsilon_*(k)\right)\in$ $\in aK_1-v$, $i\in\{1,2\}$. Обозначим $\zeta(t)=\xi(t,z_0,\varepsilon_*(\cdot),\gamma_0(\cdot))=\lambda^t z_0+\sum_{k=0}^{t-1}\lambda^{t-k-1}\varepsilon_*(k)$. В силу выпуклости aK_1-v для любого $\beta\in(0,1)$ выполнено

$$\alpha K_1-v\ni\beta\alpha_1\,(x_1-\zeta(t)\,)+(1-\beta)\,\alpha_2\,(x_2-\zeta(t))=$$

$$=\ (\beta\alpha_1+(1-\beta)\alpha_2\,)\left(\frac{\beta\alpha_1}{\beta\alpha_1+(1-\beta)\alpha_2}x_1+\frac{(1-\beta)\alpha_2}{\beta\alpha_1+(1-\beta)\alpha_2}x_2-\zeta(t)\right).$$

Ввиду выпуклости δK_1 верно $\dfrac{\beta\alpha_1}{\beta\alpha_1+(1-\beta)\alpha_2}x_1+\dfrac{(1-\beta)\alpha_2}{\beta\alpha_1+(1-\beta)\alpha_2}x_2\in\delta K_1$. Следовательно, имеет место $\beta\alpha_1+(1-\beta)\alpha_2\in A(t,s,v)$. ■

Лемма 3. Для процесса, определяемого (13), (14), множество $A(t,s,v)$ замкнуто при всех $s=\overline{0,t-1}$, $t\in N$, $v\in K_1$.

Доказательство. Пусть $v\in K_1$, $t\in N$, $s\in\{0,\dots,t-1\}$, и пусть $\alpha^*=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$, где $\alpha_n\in A(t,s,v)$, $n\in N$. Найдутся $x_n\in aK_1$, $y_n\in\delta K_1$, $n\in N$, такие, что

$$\lambda^{\,t-s-1}\,(x_n-v)=\alpha_n(y_n-\zeta(t)),\ n\in N\,. \tag{15}$$

В силу компактности множеств aK_1 и δK_1 найдется подпоследовательность $n(k)$, $k\in N$, и $x^*\in aK_1$, $y^*\in\delta K_1$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n(k)}=x^*$, $\lim\limits_{k\to\infty}y_{n(k)}=y^*$. Тогда переход к пределу в (15) для $n=n(k)$ влечет $\lambda^{t-s-1}(x^*-v)=\alpha^*(y^*-\zeta(t))$, т.е. $\alpha^*\in A(t,s,v)$. ■

Поскольку 0 содержится в $A(t,s,v)$ очевидным образом, $A(t,s,v)$ представляет собой либо замкнутый интервал с началом в нуле, либо $[0,+\infty)$.

ВРЕМЯ ГАРАНТИРОВАННОГО ДОСТИЖЕНИЯ ТЕРМИНАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

Следующая теорема дает формулу для гарантированного времени достижения в рассматриваемом случае.

Теорема 1. Пусть для конфликтно управляемого процесса (13), (2) выполнены условия (14). Тогда гарантированное время сближения, конечное или бесконечное, задается формулой

$$T(z_0,\varepsilon_*(\cdot))=\min\left\{t\ge 1:\left\|\lambda^t z_0+\sum_{s=0}^{t-1}\lambda^{t-s-1}\varepsilon_*(s)\right\|\le (a-1)\sum_{i=0}^{t-1}|\lambda|^i+\delta\right\}.$$

Доказательство. Гарантированное время достижения $T(z_0,\varepsilon_*(\cdot))$ находится как

$$T(z_0,\varepsilon_*(\cdot))=\min\left\{t\ge 1:\sum_{s=0}^{t-1}\inf_{v\in V}\alpha(t,s,v)\ge 1\right\}.$$

Зафиксируем $t\in N$. Обозначим $\zeta(t)=\xi(t,z_0,\varepsilon_*(\cdot),\gamma_0(\cdot))$. Имеют место представления:

$$\alpha(t,s,v)=\sup\{\alpha\ge 0:\lambda^{t-s-1}(aK_1-v)\cap\alpha(\delta K_1-\zeta(t))\ne\varnothing\}=$$

$$=\sup\{\alpha\ge 0:\lambda^{t-s-1}v-\alpha\zeta(t)\in\lambda^{t-s-1}aK_1-\alpha\delta K_1\},\ s=\overline{0,t-1},\ v\in K_1.$$

При каждом $\alpha\ge 0$ множество $\lambda^{t-s-1}aK_1-\alpha\delta K_1$ есть шар в R^d радиуса $|\lambda|^{t-s-1}a+\alpha\delta$ с центром в начале координат. $\|\lambda^{t-s-1}v-\alpha\zeta(t))\|\le$ $\le|\lambda|^{t-s-1}a+\alpha\delta$ равносильно квадратному относительно α неравенству

$$\alpha^2(\|\zeta(t)\|^2-\delta^2)-2\alpha|\lambda|^{t-s-1}((-1)^{t-s-1}(\zeta(t),v)+a\delta)-$$

$$-|\lambda|^{2(t-s-1)}(a^2-\|v\|^2)\le 0. \tag{16}$$

Поскольку в случае $\|\zeta(t)\|\le\delta$ выполнено $\underline{\xi(t,z_0},\varepsilon_*(\cdot),\gamma(\cdot))\in M$, из выражений (5), (6) следует, что $A(t,s,v)=[0,+\infty)$, $s=\overline{0,t-1}$, $t\in N$, $v\in V$, а соответствующая разрешающая функция $\alpha(t,s,v)=+\infty$ для указанных значений s и v. Рассмотрим случай $\|\zeta(t)\|>\delta$. Корни соответствующего (16) квадратного уравнения равны:

$$\alpha_{12}=\frac{|\lambda|^{t-s-1}}{\|\zeta(t)\|^2-\delta^2}\Big((-1)^{t-s-1}(\zeta(t),v)+a\delta\pm$$

$$\pm\sqrt{((-1)^{t-s-1}(\zeta(t),v)+a\delta)^2+(\|\zeta(t)\|^2-\delta^2)(a^2-\|v\|^2)}\Big).$$

Меньший корень α_1 уравнения отрицателен, больший корень α_2 положителен и неравенство (16) выполнено при $\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$. Тогда $\alpha(t,s,v)=\alpha_2$, $A(t,s,v)=[0,\alpha_2]$, $s=\overline{0,t-1}$, $t\in N$, $v\in K_1$.

При $v=0$ больший корень равен $\alpha_2=\dfrac{|\lambda|^{t-s-1}}{\|\zeta(t)\|^2-\delta^2}(a\delta+a\|\zeta(t)\|)=$ $=\dfrac{a|\lambda|^{t-s-1}}{\|\zeta(t)\|-\delta}$. При $v\ne 0$ $\min\limits_{v\in K_1\setminus\{0\}}\alpha(t,s,v)$ достигается при $v=-\dfrac{(-1)^{t-s-1}\zeta(t)}{\|(-1)^{t-s-1}\zeta(t)\|}=$

$= (-1)^{t-s} \dfrac{\zeta(t)}{\|\zeta(t)\|}$ и равен $\dfrac{(a-1)|\lambda|^{t-s-1}}{\|\zeta(t)\|-\delta}$. Объединяя случаи $v=0$ и $v \neq 0$, заключаем, что при $\|\zeta(t)\| > \delta$

$$\min_{v \in K_1} \alpha(t,s,v) = \min\left(\frac{a|\lambda|^{t-s-1}}{\|\zeta(t)\|-\delta}, \frac{(a-1)|\lambda|^{t-s-1}}{\|\zeta(t)\|-\delta} \right) = \frac{(a-1)|\lambda|^{t-s-1}}{\|\zeta(t)\|-\delta}.$$

В итоге при любом $t \in N$ $\min\limits_{v \in K_1} \alpha(t,s,v) = +\infty$, $s = \overline{0, t-1}$, если $|\zeta(t)| \leq \delta$, и $\min\limits_{v \in K_1} \alpha(t,s,v) = \dfrac{(a-1)|\lambda|^{t-s-1}}{\|\zeta(t)\|-\delta}$, $s = \overline{0, t-1}$, если $\|\zeta(t)\| > \delta$. При $\|\zeta(t)\| > \delta$ неравенство $\sum\limits_{s=0}^{t-1} \min\limits_{v \in V} \alpha(t,s,v) \geq 1$ равносильно $\|\zeta(t)\| - \delta \leq (a-1) \sum\limits_{s=0}^{t-1} |\lambda|^{t-s-1}$. Это неравенство выполнено и в случае $\|\zeta(t)\| \leq \delta$, поскольку $a > 1$, поэтому

$$T(z_0, \varepsilon_*(\cdot)) = \min\left\{ t \geq 1 \colon \|\zeta(t)\| - \delta \leq (a-1) \sum_{s=0}^{t-1} |\lambda|^{t-s-1} \right\},$$

откуда следует утверждение теоремы. ■

Пусть для случайной последовательности $\varepsilon(t)$, $t \in N_0$, заданы конечномерные распределения $F_{\varepsilon(t_1),\ldots,\varepsilon(t_n)}(x_1, \ldots, x_n)$, $t_k \in N_0$, $x_k \in R^d$, $k = \overline{1,n}$, $n \in N$, удовлетворяющие свойству согласованности:

$$F_{\varepsilon(t_1),\ldots,\varepsilon(t_n),\varepsilon(t_{n+1}),\ldots,\varepsilon(t_{n+l})}(x_1, \ldots, x_n, +\infty, \ldots, +\infty) = F_{\varepsilon(t_1),\ldots,\varepsilon(t_n)}(x_1, \ldots, x_n),$$
$$t_k \in N_0,\ k = \overline{1, n+l};\ \ x_k \in R^d,\ k = \overline{1,n};\ l \in N,\ n \in N.$$

Здесь $\varepsilon(t) = \varepsilon(t, \omega)$ и $z(t) = z(t, \omega)$ рассматриваются как случайные функции аргументов $t \in N_0$ и $\omega \in \Omega$. В качестве пространства элементарных событий естественно выбрать $\Omega = (R^d)^{N_0} = \{\omega(\cdot) \colon N_0 \to R^d\}$ — множество всех d-мерных векторных функций на N_0. Каждое элементарное событие $\omega \in \Omega$ интерпретируется как отдельная траектория, являющаяся реализацией случайного процесса $\varepsilon(t)$. Пусть $B(\Omega)$ — минимальная σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами $\{\omega(\cdot) \in \Omega \colon \omega(t_k) < x_k,\ k = \overline{1,n}\}$, где $t_k \in N_0$, $x_k \in R^d$, $k = \overline{1,n}$, $n \in N$ (неравенства для векторов выполнены по компонентам). Вероятностная мера $P(\cdot)$ на этих цилиндрических множествах задана конечномерными распределениями случайной последовательности $\varepsilon(t)$:

$$P(\{\omega(\cdot) \in \Omega \colon \omega(t_k) < x_k, k = \overline{1,n}\}) = F_{\varepsilon(t_1),\ldots,\varepsilon(t_n)}(x_1, \ldots, x_n),$$
$$t_k \in N_0,\ x_k \in R^d,\ k = \overline{1,n},\ n \in N,$$

и удовлетворяет условиям согласованности, R^d — полное сепарабельное метрическое пространство. Теорема Колмогорова о продолжении меры гарантирует единственное продолжение меры $P(\cdot)$ на σ-алгебру $B(\Omega)$ [32, с. 110].

Для случайной последовательности $\varepsilon(\cdot)$ положим

$$T(z_0, \varepsilon(\cdot)) = \min\left\{ t \geq 1 \colon \left\| \lambda^t z_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \lambda^{t-s-1} \varepsilon(s) \right\| \leq (a-1) \sum_{i=0}^{t-1} |\lambda|^i + \delta \right\}, \quad (17)$$

имея в виду, что (17) выполнено на реализациях при каждом $\omega \in \Omega$.

Пусть случайные величины $\varepsilon(t)$, $t \in N_0$, независимы и имеют одинаковые распределения вида $P(\varepsilon(t) = \varepsilon_k) = p_k$, $k = \overline{1, k^*}$, $t \in N_0$, где $k^* \in N$; $\varepsilon_k \in R^d$,

$p_k > 0$, $k=\overline{1,k^*}$; $\sum_{k=1}^{k^*} p_k = 1$. При каждом $n \in N_0$ перечислим все возможные наборы значений $\{\varepsilon(t),\ t=\overline{0,n}\}$ как $\{(\varepsilon_{k(0)},\dots,\varepsilon_{k(n)})\colon k(t)\in\{1,\dots,k^*\},\ t=\overline{0,n}\}$. Тогда математическое ожидание $T(z_0,\varepsilon(\cdot))$, конечное или бесконечное, имеет вид

$$M\,T(z_0,\varepsilon(\,\cdot\,)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{t=0}^{n}\sum_{k(t)=1}^{k^*} T(z_0,(\varepsilon_{k(0)},\dots,\varepsilon_{k(n)},0,\dots))\,p_{k(0)}\dots p_{k(n)}\,,$$

где $T\,(z_0,(\varepsilon_{k(0)},\dots,\varepsilon_{k(n)},0,\dots))$ находится согласно (17) при $\varepsilon(l)=\varepsilon_{k(l)}$, $l=\overline{0,n}$; $\varepsilon(l)=0$, $l\ge n+1$. В общем случае распределения случайной функции $\varepsilon(\,\cdot\,)$ математическое ожидание $T(z_0,\varepsilon(\,\cdot\,))$, конечное или бесконечное, имеет вид

$$M\,T(z_0,\varepsilon(\,\cdot\,)) = \int_\Omega T(z_0,\omega(\,\cdot\,))\,P\big(d\omega(\,\cdot\,)\big)\,.$$

УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ ВРЕМЕНИ ГАРАНТИРОВАННОГО ДОСТИЖЕНИЯ

Конечность гарантированного времени достижения (17) связана с предельным поведением сумм $\sum_{s=0}^{t-1}\lambda^{t-s-1}\varepsilon(s)$, $t\in N$. Найдем условия, при которых $T(z_0,\varepsilon(\,\cdot\,))$ конечно с положительной вероятностью. В случае $|\lambda|>1$ $\lim_{t\to\infty}\|\lambda^t z_0\|=+\infty$ для всех $z_0\ne\vec{0}$, и в силу формулы (17) трудно гарантировать конечность $T(z_0,\varepsilon(\cdot))$ с какой-либо положительной вероятностью. Поэтому ограничимся рассмотрением случая $\lambda\in[-1,1]$.

Теорема 2. Пусть $d\in N$, $\varepsilon(t)$, $t\in N_0$, — независимые одинаково распределенные случайные векторы в R^d. Если одновременно выполнены условия $\lambda=1$ и $M\,\varepsilon(0)=\vec{0}$ либо $\lambda=-1$ и $M\,|\varepsilon(0)|<+\infty$, то $T(z_0,\varepsilon(\,\cdot\,))$ конечно с вероятностью 1.

Доказательство. Пусть $\lambda=1$ и $M\,\varepsilon(0)=\vec{0}$. Уравнение (17) принимает вид

$$T(z_0,\varepsilon(\cdot)) = \min\left\{t\ge 1\colon \left\|\frac{1}{t}z_0+\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t-1}\varepsilon(k)\right\| \le a-1+\frac{\delta}{t}\right\}.$$

По усиленному закону больших чисел $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t-1}\varepsilon(k)=M\varepsilon(0)=\vec{0}$ п.н. и $T(z_0,\varepsilon(\cdot))$ конечно п.н. Пусть $\lambda=-1$ и $M\ \|\varepsilon(0)\|<+\infty$. В случае $t=2n$, $n\in N$:

$$\frac{1}{2n}\sum_{s=0}^{2n-1}(-1)^{2n-s-1}\varepsilon(s)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{2n-2k-1}\varepsilon(2k)+\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{2n-(2k+1)-1}\varepsilon(2k+1)=$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon(2k)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon(2k+1)\to-\frac{1}{2}M\varepsilon(0)+\frac{1}{2}M\varepsilon(0)=\vec{0},\ n\to\infty \text{ п.н.}$$

Здесь использован усиленный закон больших чисел для последовательностей $\{\varepsilon(2k),k\in N_0\}$ и $\{\varepsilon(2k+1),k\in N_0\}$. При $t=2n+1$, $n\in N$, имеем

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^{2n-s}\varepsilon(s)=\frac{1}{2n+1}\varepsilon(0)+\frac{n}{2n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon(2k)-\frac{n}{2n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon(2k+1)\to$$

$$\to\vec{0}+\frac{1}{2}M\varepsilon(0)-\frac{1}{2}M\varepsilon(0)=\vec{0},\ n\to\infty \text{ п.н. } \blacksquare$$

Следующая теорема обеспечивает конечное гарантированное время достижения и его оценку в случае, когда все $\varepsilon(t)$ п.н. ограничены по модулю определенной величиной.

Теорема 3. Пусть $d \in N$ и выполнены условия:

1) $\lambda \in (-1,1)$;

2) $\varepsilon(t)$, $t \in N_0$, — случайные векторы в R^d;

3) $b \in (0, \delta(1-|\lambda|) + a - 1)$;

4) $\|\varepsilon(t,\omega)\| \le b$, $t \in N_0$ п.н.

Тогда гарантированное время достижения $T(z_0, \varepsilon(\cdot))$ с вероятностью 1 конечно и не превышает $t^* = \max\left(0, \operatorname{Int}\left(\dfrac{\ln(c+\delta) - \ln(c + |z_0|)}{\ln|\lambda|}\right)\right) + 1$, где $c = \dfrac{a-b-1}{1-|\lambda|}$, $\operatorname{Int}(\cdot)$ — целая часть числа.

Доказательство. В условиях теоремы верны неравенства $\left\|\dfrac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\lambda^{t-s-1}\varepsilon(s)\right\| \le b$ п.н., $t \in N$. При $t \ge t^*$ выполнено $|\lambda|^t (\|z_0\| + c) < \delta + c$. Тогда при $t \ge t^*$ с вероятностью 1

$$\|\lambda^t z_0 + \sum_{s=0}^{t-1}\lambda^{t-s-1}\varepsilon(s)\| \le |\lambda|^t \|z_0\| + b\frac{1-|\lambda|^t}{1-|\lambda|} < \delta + c - c|\lambda|^t + b\frac{1-|\lambda|^t}{1-|\lambda|} =$$

$$= \delta + \frac{a-b-1}{1-|\lambda|}(1-|\lambda|^t) + b\frac{1-|\lambda|^t}{1-|\lambda|} = (a-1)\sum_{i=0}^{t-1}|\lambda|^i + \delta.$$

Следовательно, $T(z_0, \varepsilon(\cdot)) \le t^*$ п.н. ■

Для доказательства условия конечности $T(z_0, \varepsilon(\cdot))$ с положительной вероятностью в случае $\lambda \in (-1,1)$ используем следующие три леммы. Для событий A_n, $n \in N$, событие $\overline{\lim}\, A_n$ состоит в том, что произошло бесконечное число A_n.

Лемма 4. Пусть X, X_n, $n \in N$, — случайные величины и $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ п.н. Тогда для любого открытого $O \subset R$

$$P(\overline{\lim}\{X_n \in O\}) = \lim_{n\to\infty} P(X_n \in O) = P(X \in O).$$

Доказательство. Рассмотрим любое открытое $O \subset R$. $X = \lim\limits_{n\to\infty} X_n \in O$ тогда и только тогда, когда $I_{\{X_n \in O\}} = 1$ начиная с некоторого номера. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} I_{\{X_n \in O\}} = I_{\{X \in O\}}$ п.н. и

$$P(\overline{\lim}\{X_n \in O\}) = M(\overline{\lim}\, I_{\{X_n \in O\}}) = M(I_{\{X \in O\}}) = P(X \in O).$$

Также вследствие теоремы Лебега об ограниченной сходимости

$$M(\lim_{n\to\infty} I_{\{X_n \in O\}}) = \lim_{n\to\infty} M(I_{\{X_n \in O\}}) = \lim_{n\to\infty} P(X_n \in O). \ ■$$

Лемма 5. Пусть $d \in N$ и выполнены условия:

1) $\lambda \in (-1,1)$;

2) $\varepsilon(t)$, $t \in N_0$, — независимые одинаково распределенные случайные векторы в R^d;

3) $M\|\varepsilon(0)\| < +\infty$.

Обозначим $S_n=\sum_{s=0}^{n}\lambda^{n-s}\varepsilon(s)$, $\widetilde{S}_n=\sum_{s=0}^{n}\lambda^{s}\varepsilon(s)$, $n\in N_0$. Тогда существует $\lim_{n\to\infty}\widetilde{S}_n=\widetilde{S}$ п.н. и для любого открытого $O\subset R$

$$P\,(\overline{\lim}\,\{\widetilde{S}_n\in O\})=\lim_{n\to\infty}P(\widetilde{S}_n\in O)=P(\widetilde{S}\in O)\le P\,(\overline{\lim}\,\{S_n\in O\}). \qquad (18)$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $M\left\|\varepsilon(0)\right\|>0$ (случай $\varepsilon(t)=0$ п.н., $t\in N_0$, тривиален). Сходимость в среднем для $\widetilde{S}_n$ устанавливается по критерию Коши. Для всех $n\in N_0$ имеем

$$\sup_{m>n}M\left\|\widetilde{S}_m-\widetilde{S}_n\right\|=\sup_{m>n}M\left\|\sum_{s=n+1}^{m}\lambda^s\varepsilon(s)\right\|\le M\left\|\varepsilon(0)\right\|\sup_{m>n}\sum_{s=n+1}^{m}|\lambda|^s=$$

$$=\frac{M\left\|\varepsilon(0)\right\|}{1-|\lambda|}|\lambda|^{n+1},$$

откуда $\lim_{n\to\infty}\sup_{m>n}M\left\|\widetilde{S}_m-\widetilde{S}_n\right\|=0$. Следовательно, существует случайная величина $\widetilde{S}$ такая, что $\widetilde{S}_n$ сходится к $\widetilde{S}$ в среднем и выполнены неравенства

$$M\left\|\widetilde{S}_n-\widetilde{S}\right\|\le\frac{M\|\varepsilon(0)\|}{1-|\lambda|}|\lambda|^{n+1},\ n\in N_0.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(\|\widetilde{S}_n-\widetilde{S}\|>\varepsilon)\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M\|\widetilde{S}_n-\widetilde{S}\|}{\varepsilon}\le\frac{M\|\varepsilon(0)\|}{1-|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda|^{n+1}=$$

$$=\frac{|\lambda|M\|\varepsilon(0)\|}{(1-|\lambda|)^2}<+\infty.$$

Итак, $\widetilde{S}=\lim_{n\to\infty}\widetilde{S}_n$ п.н. Равенства в (18) следуют из леммы 4. Применив лемму Фату для величин $I_{\{S_n\in O\}}$ [33, с. 233] и одинаковую распределенность величин S_n, $\widetilde{S}_n$, для любого открытого $O\subset R$ получим

$$P\,(\overline{\lim}\,\{S_n\in O\})=M(\overline{\lim}\,I_{\{S_n\in O\}})\ge\overline{\lim}\,M(I_{\{S_n\in O\}})=\overline{\lim}\,P(S_n\in O)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}P(\widetilde{S}_n\in O)=P(\widetilde{S}\in O).\ \blacksquare$$

Лемма 6. Пусть $d\in N$ и выполнены условия:

1) $\lambda\in(-1,1)$;

2) $\varepsilon(t)$, $t\in N_0$, — независимые одинаково распределенные случайные векторы в R^d;

3) $M\|\varepsilon(0)\|<+\infty$;

4) $P(\|\varepsilon(0)\|<\alpha)>0$, $\alpha>0$.

Тогда $\lim_{n\to\infty}P\left(\left\|\sum_{t=0}^{n}\lambda^t\varepsilon(t)\right\|<\alpha\right)=P\left(\left\|\sum_{t=0}^{\infty}\lambda^t\varepsilon(t)\right\|<\alpha\right)>0$, $\alpha>0$.

Доказательство. Снова без ограничения общности считаем $M\|\varepsilon(0)\|>0$. В силу леммы 5 ряд $\sum_{t=0}^{\infty}\lambda^t\varepsilon(t)$ сходится п.н. и для любого $\alpha>0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\sum_{t=0}^{n}\lambda^t\varepsilon(t)\right\|<\alpha\right)=P\left(\left\|\sum_{t=0}^{\infty}\lambda^t\varepsilon(t)\right\|<\alpha\right)\geq$$

$$\geq P\,(\|\lambda^t\varepsilon(t)\|<\alpha\,(1-|\lambda|^{1/2})|\lambda|^{t/2},\ t\in N_0)=$$

$$=\prod_{t=0}^{\infty}P\,(\|\varepsilon(t)\|<\alpha\,(1-|\lambda|^{1/2})|\lambda|^{-t/2})\geq$$

$$\geq(P\,(\|\varepsilon(0)\|<\alpha\,(1-|\lambda|^{1/2})))^{t_0-1}\prod_{t=t_0}^{\infty}\left(1-\frac{M\,\|\varepsilon(0)\|}{\alpha\,(1-|\lambda|^{1/2})}|\lambda|^{t/2}\right)\geq 0$$

(при $t\geq t_0$ применено неравенство Чебышева). Здесь t_0 выбрано так, что $|\lambda|^{t_0/2}<\dfrac{\alpha\,(1-|\lambda|^{1/2})}{M\,\|\varepsilon(0)\|\,|}$, а рассматриваемое бесконечное произведение с членами, меньшими 1, сходится в силу $\sum\limits_{t=0}^{\infty}|\lambda|^{t/2}<+\infty$. ■

Обозначим $B_R=\{x\in R^d:|x|<R\}$, $R>0$. Следующая теорема дает оценку снизу для вероятности гарантированного сближения за конечное время.

Теорема 4. Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда

$$P\,(T(z_0,\varepsilon(\cdot))<+\infty)\ \geq\ \lim_{n\to\infty}P\left(\left\|\sum_{t=0}^{n}\lambda^t\varepsilon(t)\right\|<\frac{a-1}{1-|\lambda|}+\delta\right)>0.$$

Доказательство. Пусть $\alpha^*=\dfrac{a-1}{1-|\lambda|}+\delta$. Рассмотрим любое $\alpha\in(0,\alpha^*)$. Существует такое $t_0\in N$, что $|\lambda|^{t_0}\left(\|z_0\|+\dfrac{a-1}{1-|\lambda|}\right)<\alpha^*-\alpha$. Тогда $\|\lambda^t z_0\|\leq(a-1)\sum\limits_{i=0}^{t-1}|\lambda|^i+\delta-\alpha$, $t\geq t_0$. Также вследствие лемм 5 и 6

$$P\,(\overline{\lim}\,\{S_n\in B_\alpha\})\geq\ P(\widetilde{S}\in B_\alpha)\ =\ P\left(\left\|\sum_{t=0}^{\infty}\lambda^t\varepsilon(t)\right\|<\alpha\right)>0.$$

Одновременное выполнение неравенств $\|\lambda^t z_0\|\leq(a-1)\sum\limits_{i=0}^{t-1}|\lambda|^i+\delta-\alpha$ и $\|S_{t-1}\|<\alpha$ влечет $\left\|\lambda^t z_0+\sum\limits_{s=0}^{t-1}\lambda^{t-s-1}\varepsilon(s)\right\|\leq(a-1)\sum\limits_{i=0}^{t-1}|\lambda|^i+\delta$. Тогда в силу произвольности выбора $\alpha\in(0,\alpha^*)$ и леммы 5 имеем

$$P\,(T(z_0,\varepsilon(\cdot))<+\infty)\ \geq\ \sup_{\alpha\in(0,\alpha^*)}P(\overline{\lim}\,\{S_n\in B_\alpha\})\geq\ \sup_{\alpha\in(0,\alpha^*)}P\left(\left\|\sum_{t=0}^{\infty}\lambda^t\varepsilon(t)\right\|<\alpha\right)=$$

$$=P\left(\left\|\sum_{t=0}^{\infty}\lambda^t\varepsilon(t)\right\|<\alpha^*\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\left\|\sum_{t=0}^{n}\lambda^t\varepsilon(t)\right\|<\alpha^*\right)>0.\ ■$$

Теорема 5. Пусть $d \in N$ и выполнены следующие условия:

1) $\lambda \in (-1, 1)$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{t=0}^{n} \lambda^{2(n-t)} D(t) = D$, где D, $D(t)$, $t \in N_0$, — ненулевые неотрицательно определенные симметричные матрицы $d \times d$;

3) $\varepsilon(t)$, $t \in N_0$, — независимые случайные векторы в R^d;

4) $\varepsilon(t) \sim N(\vec{0}, D(t))$, $t \in N_0$;

5) $F(x)$, $x \in R^d$, — функция распределения, соответствующая $N(\vec{0}, D)$.

Тогда $P(T(z_0, \varepsilon(\cdot)) < +\infty) \geq \int\limits_{B_{\alpha^*}} dF(x) > 0$, где $\alpha^* = \dfrac{a-1}{1-|\lambda|} + \delta$.

Доказательство. Рассмотрим любое $\alpha \in (0, \alpha^*)$. Подобно доказательству теоремы 4 достаточно доказать, что для $S_n = \sum\limits_{t=0}^{n} \lambda^{n-t} \varepsilon(t)$ с вероятностью не менее $\int\limits_{B_\alpha} dF(x)$ выполнено $S_n \in B_\alpha$ для бесконечного числа $n \in N$. S_n имеет распределение $N(\vec{0}, \sum\limits_{t=0}^{n} \lambda^{2(n-t)} D(t))$. При $n \to \infty$ функция распределения S_n слабо сходится к $F(\cdot)$ вследствие сходимости соответствующих характеристических функций. В силу нормальности распределения $\int\limits_{\partial B_\alpha} dF(x) = 0$, где $\partial B_\alpha = \{x \in R^d : ||x|| = \alpha\}$ — граница B_α. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} P(S_n \in B_\alpha) = \int\limits_{B_\alpha} dF(x)$ [33, с. 400]. Следовательно,

$$P(\overline{\lim} \{S_n \in B_\alpha\}) = M(\overline{\lim} I_{\{S_n \in B_\alpha\}}) \geq \overline{\lim} M(I_{\{S_n \in B_\alpha\}}) =$$
$$= \overline{\lim} P(S_n \in B_\alpha) = \int\limits_{B_\alpha} dF(x) > 0.$$

Здесь применена лемма Фату для величин $I_{\{S_n \in B_\alpha\}}$. В силу произвольности выбора $\alpha \in (0, \alpha^*)$ это влечет $P(T(z_0, \varepsilon(\cdot)) < +\infty) \geq \sup\limits_{\alpha \in (0, \alpha^*)} P(\overline{\lim} \{S_n \in B_\alpha\}) \geq$
$\geq \int\limits_{B_{\alpha^*}} dF(x) > 0$. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. — М.: Наука, 1988. — 575 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
3. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1992. — 264 с.
4. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 480 с.
5. Chikrii A.A. Conflict-Controlled Proccesses. — Boston; London; Dordrecht: Kluwer Academ. Publ., 1997. — 424 p.
6. Chikrii A.A. The Problem of Avoidance for Controlled Dynamic Objects // Int. J. of Math., Game Theory and Algebra, Nova Sci. Publ. — 1998. — **7**, N 2/3. — P. 81–95.
7. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев: Наук. думка, 2006. — 262 с.
8. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Т., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969. — 384 с.

9. Чикрий Г.Ц. О поиске неподвижной цели движущимся объектом // Прикладная математика и механика. — 1984. — **48**, № 4. — С. 580–583.
10. Хеллман О. Введение в теорию оптимального поиска. — М.: Наука, 1985. — 248 с.
11. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 487 с.
12. Чикрий А.А. Дискретная игровая задача поиска движущихся объектов // Докл. АН УССР. — 1984. — № 10. — С. 341–345.
13. Чикрий А.А., Грицевский А.Э. Непрерывная задача поиска с дискретным распределением состояния // Там же. — 1985. — № 9. — С. 153–157.
14. Андрианов В.Ю., Петров Н.Н. Поиск с противодействием // Тр. ИММ. Динамические системы и проблемы управления: К 80-летию акад. Н.Н. Красовского. — Екатеринбург, 2005. — **11**, № 1. — С. 17–25.
15. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Редьковский Н.Н. и др. Дискретная задача поиска. — Киев, 1984. — 30 с. — (Препр. АН УССР Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; 84–12).
16. Klimenko Ye.V., Chikrii A.A. Search methods for moving evaders // Facta Universitatis, University of Niš, Yugoslavia. — 1994. — **1**, N 4. — P. 451–460.
17. Чикрий А.А., Дзюбенко К.Г. Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов // Проблемы управления и информатики. — 1997 — № 1. — С. 92–107.
18. Дзюбенко К.Г., Чикрий А.А. Об одной полумарковской модели поиска движущихся объектов // Там же. — 2006. — № 5. — С. 5–15.
19. Красовский Н.Н., Субботин А.И., Россохин В.Ф. Стохастические стратегии в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. — 1975. — **220**, № 5. — С. 652–656.
20. Третьяков В.И. К теории стохастических игр // Там же. — 1983. — **269**, № 3. — С. 251–254.
21. Jaskiewicz A. Nowak A.S. On the optimality equation for zero-sum ergodic stochastic games // Math. Methods of Oper. Res. — 2001. — **54**, N 2. — P. 291–301.
22. Najim K., Poznyak A.S., Gomez E. Adaptive policy for two finite Markov chains zero sum stochastic game with unknown transition matrices and average payoff // Automatica. — 2001. — **37**, N 7. — P. 1007–1018.
23. Flesch J., Thuijsman F., Vrieze O.J. Optimality in different strategy classes in zero-sum stochastic games // Math. Methods of Oper. Res. — 2002. — **56**, N 2. — P. 315–322.
24. Kaluski J. An *n*-person stochastic game with coalitions // The Int. Conf. on Appl. Math. ded. to the 65-th Anniversary of B.N. Pschenichnyi. — Kiev, 2002. — P. 62.
25. Yeung D.W.K., Petrosian L.A. Subgame consist cooperative solutions in stochastic differential games // J. Optimiz. Theory and Appl. — 2004. — **120**, N 3. — P. 651–666.
26. Завьялова Т.В. Робастное управление системами случайной структуры // Тез. докл. Междунар. семинара «Теория управления и теория обобщенных решений уравнения Гамильтона–Якоби»: К 60-летию акад. А.И. Субботина. — Екатеринбург, 2005. — С. 71–72.
27. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1978. — 342 с.
28. Чикрий А.А., Раппопорт И.С., Чикрий К.А. Многозначные отображения и их селекторы в теории конфликтно управляемых процессов // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 5. — С. 129–144.
29. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
30. Рокафеллер Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 472 с.
31. Згуровский М.З., Мельник В.С. Нелинейный анализх и управление бесконечномерными системами. — Киев: Наук. думка, 1999. — 630 с.
32. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 568 с.
33. Ширяев А.Н. Вероятность. — М.: МЦНМО, 2004. — 928 с.

Поступила 05.06.2009