УДК 519.872

Л. ЛАКАТОШ

СИСТЕМЫ С ЦИКЛИЧЕСКИМ ОЖИДАНИЕМ[1]

Ключевые слова: *система с повторными вызовами, циклическое ожидание*.

Введение. При исследовании систем массового обслуживания определяющую роль играет дисциплина обслуживания, ее характер во многом решает возможность использования того или иного математического аппарата. От правил выбора требования на обслуживание зависят характеристики системы. Эти правила могут быть довольно простыми (обслуживание осуществляется в порядке поступления требований, либо, наоборот, требования, поступившие последними, обслуживаются первыми). Эти правила могут быть и более сложными: когда накладываются ограничения на время ожидания и время пребывания отдельных требований в системе, когда требования собираются в группы по приоритетности их обслуживания и т.д. Не исключено, что исследование системы с довольно простыми вероятностными характеристиками сильно осложняется спецификой дисциплины обслуживания.

Предлагается рассмотреть одноканальную систему обслуживания, в которой вновь поступающее требование принимается на обслуживание либо в момент его поступления в систему (в случае свободного обслуживающего прибора и отсутствия других требований), либо в момент, отличающийся от момента поступления временем, кратным некоторому заданному временному интервалу-циклу (при наличии очереди).

Для большей наглядности приведем два примера таких систем.

1. Самолет заходит на посадку по заданному маршруту. Если посадочная полоса свободна, то он немедленно производит посадку. Если есть угроза несоблюдения норм эшелонирования или в зоне ожидания (на круге — по авиационной терминологии) уже есть несколько самолетов, ожидающих разрешения на посадку, то вновь прибывший самолет становится в очередь (отправляется на круг). Находясь на круге, воздушное судно ждет разрешения на посадку. Получив ее, самолет должен дойти до соответствующей геометрической точки маршрута на круге, откуда может начать процесс посадки. Период времени от момента разрешения на посадку до момента достижения самолетом соответствующей геометрической позиции называется «холостым»: система уже готова для принятия самолета, однако посадка возможна только при достижении соответствующей позиции на круге.

2. Передача оптических сигналов. В некоторый узел поступает информация в виде оптического сигнала, откуда она должна передаваться в порядке поступления. Специфика этой информации состоит в том, что нет возможности хранить ее в памяти, как это делается для другого вида информации, например, в компьютерах. Полученный сигнал направляется на линию задержки, откуда вновь поступает в узел через фиксированное время. Если подошла его очередь, он передается; если нет, опять направляется на линию задержки. Ясно, что передача сигнала из узла возможна в момент его поступления или в момент, который отличается от него временем, кратным времени, необходимому для прохождения линии задержки.

Данная модель впервые изучена в работе [1], различные ее обобщения появились в [2–5]. Е.В. Коба [6] нашла достаточное условие для существования эргодического распределения в системе типа $GI/G/1$. Е.В. Коба и К.В. Михалевич [7, 8] сравнили *FCFS* и классическую дисциплину для систем с возвращением заявок. Такие системы исследовались также в дискретном времени. Некоторые модели в случае поступления требований двух типов изучены Р. Карасом [9, 10]. Оригинальной

[1]Работа выполнена при поддержке Венгерского национального фонда по научным исследованиям (грант OTKA K60698/2005) и Венгерско-украинского межправительственного сотрудничества по науке и технике (грант UA-28/2008).

моделью заинтересовались в связи с описанием посадки самолетов [11, 12], в [13–15] она оказалась полезной для решения проблем передачи оптических сигналов; в этом направлении работают сотрудники Гентского университета.

Системы обслуживания можно охарактеризовать как с точки зрения самой системы, так и с точки зрения отдельных требований, эти характеристики частично пересекаются. С точки зрения системы, первичной информацией является количество в ней требований, а с точки зрения отдельных требований важную роль играет время ожидания. В данной статье показано, как вычислить эти характеристики и установить взаимосвязь между ними.

Длина очереди. Рассмотрим систему обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток требований. Если система свободна, то обслуживание начинается немедленно. В противном случае требование становится в очередь и его обслуживание осуществляется в порядке поступления и может быть начато в момент, который отличается от момента поступления временем, кратным некоторому временному циклу T. В данном случае система характеризуется наличием в ней N_{t_n} требований в моменты, предшествующие началу обслуживания. Покажем, что эти величины образуют цепь Маркова.

Пусть t_n — момент начала обслуживания n-го требования. Число требований в системе в момент t_{n+1} определяется соотношением

$$N_{t_{n+1}} = \max\{0, N_{t_n} + \Delta_n - 1\},$$

где Δ_n — число требований, поступающих в систему за время $[t_n, t_n + i)$. Покажем, что это независимые случайные величины.

Сначала рассмотрим интервалы регистрации поступающих требований. Пусть ξ_i и η_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — две последовательности независимых случайных величин; независимы они и между собой. ξ_i — интервал времени между поступлениями i- и $(i+1)$-го требований, в исследуемой системе имеет экспоненциальное распределение с параметром λ; а η_i — время обслуживания i-го требования (в данном случае имеет экспоненциальное распределение с параметром μ).

Предположим, что в момент начала обслуживания в системе находится только одно требование (это возможно, если в предшествующий момент в системе было одно требование или вообще не было). Если $\xi_i > \eta_i$, то время до начала обслуживания следующего требования равно ξ_i (обслуживание актуального требования закончится, и после свободного периода в системе появится следующее требование). Если $\xi_i < \eta_i$, то за время обслуживания появится следующее требование, отсюда отсчитываем отрезки длиной T, пока превзойдем момент окончания обслуживания первого требования (с точки зрения поступающих требований нас интересует интервал с момента поступления второго требования до начала его обслуживания), длина интервала будет некоторой функцией ξ_i и η_i, т.е. $f(\xi_i, \eta_i)$.

Если в момент начала обслуживания некоторого требования следующее требование уже находится в системе, то промежуток времени до начала обслуживания второго требования определяется следующим образом. Период обслуживания первого требования делится на интервалы длиной T (последний интервал, скорее всего, будет неполным). Поскольку моменты начала обслуживания обоих требований отличаются от моментов их поступлений кратными T, на каждом интервале длиной T будет одна точка, где обслуживание второго требования теоретически может быть начато. На самом деле оно начинается в первый возможный момент по окончании обслуживания первого требования, таким образом, необходимое время определяется отношением друг к другу времени обслуживания первого требования и времени между поступлениями двух последующих требований, т.е. является функцией случайных величин ξ_i и η_i, $f(\xi_i, \eta_i)$.

Видно, что промежутки времени, за которые наблюдаются поступающие требования, являются функциями лишь случайных величин ξ_i и η_i, таким образом, они независимы между собой. В силу пуассоновости входящего потока отсюда вытекает, что количества поступающих за эти интервалы требований Δ_i также будут независимыми случайными величинами, и значит, N_{t_i} образуют цепь Маркова.

Займемся вычислением переходных вероятностей. Сначала рассмотрим случай, когда в момент начала обслуживания в системе находится только одно требование. Пусть время его обслуживания равно u, а новое требование поступает в систему через время v. Вероятность события $\{u-v<t\}$ (т.е. время, оставшееся от обслуживания первого требования) равна

$$P(t)=\{u-v<t\}=$$

$$=\int_0^t\int_0^u \lambda e^{-\lambda v}\mu e^{-\mu u}dv\,du+\int_0^\infty\int_{u-t}^u \lambda e^{-\lambda v}\mu e^{-\mu u}dv\,du=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1-e^{-\mu t}). \qquad (1)$$

Время от поступления второго требования до начала его обслуживания

$$[I(u-v)+1]T,$$

где $I(x)$ — целая часть числа x/T. Эта формула справедлива почти всюду, за исключением точек, кратных циклу времени T. Для определения переходных вероятностей нас интересует число требований, поступивших за этот период. По (1) время от поступления требования до начала его обслуживания равно iT с вероятностью

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(e^{-\mu(i-1)T}-e^{-\mu T}),$$

производящая функция числа требований

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\{e^{-\mu(i-1)T}-e^{-\mu iT}\}\frac{(\lambda iTz)^k}{k!}e^{-\lambda iT}=$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum_{i=1}^{\infty}\{e^{-\mu(i-1)T}-e^{-\mu iT}\}e^{-\lambda iT(1-z)}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{e^{-\lambda(1-z)T}(1-e^{-\mu T})}{1-e^{-[\lambda(1-z)+\mu]T}}.$$

Эта формула справедлива, если хотя бы одно требование появится в системе, так искомая производящая функция равна

$$A(z)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}z\frac{(1-e^{-\mu T})e^{-\lambda T(1-z)}}{1-e^{-[\lambda(1-z)+\mu]T}}, \qquad (2)$$

где $\frac{\mu}{\lambda+\mu}=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu x}dx$ — вероятность непоступления требования, а множитель z во втором члене правой части формулы (2) объясняется обязательным появлением одного требования.

Вычислим переходные вероятности для остальных состояний. В этом случае в момент начала обслуживания требования следующее требование уже находится в системе. Пусть $x=u-I(u)T$, а y — время между поступлениями двух требований $\bmod T$. Легко видеть, что y имеет усеченное показательное распределение с функцией распределения

$$\frac{1-e^{-\lambda y}}{1-e^{-\lambda T}},\ 0\le y\le T.$$

Время между моментами начала обслуживания двух соседних требований есть

$$\begin{cases} I(u)+y, & \text{если } x\le y,\\ (I(u)+1)T+y, & \text{если } x>y.\end{cases}$$

Вероятность поступления k требований за эти периоды составит

$$\frac{(\lambda\{I(u)T+y\})^k}{k!}\exp(-\lambda\{I(u)T+y\}), \qquad (3)$$

$$\frac{(\lambda\{[I(u)+1]T+y\})^k}{k!}\exp(-\lambda\{[I(u)+1]T+y\}). \qquad (4)$$

Зафиксируем y и поделим время обслуживания на интервалы длиной T, этот интервал состоит из двух частей: y и $T-y$, им соответствуют вероятности (3) и (4). Производящая функция числа поступивших требований при условии, что время между поступлениями по модулю T равно y, имеет вид

$$M(z^{\xi}\mid y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\int_{iT}^{iT+y}\frac{[\lambda(iT+y)z]^k}{k!}e^{-\lambda(iT+y)}\mu e^{-\mu u}du+\right.$$

$$\left.+\int_{iT+y}^{(i+1)T}\frac{[\lambda((i+1)T+y)z]^k}{k!}e^{-\lambda((i+1)T+y)}\mu e^{-\mu u}du\right\}=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-[\lambda(1-z)+\mu]T}}\{e^{-\lambda(1-z)y}-e^{-[\lambda(1-z)+\mu]y}+$$

$$+e^{-\lambda(1-z)T}e^{-[\lambda(1-z)+\mu]y}-e^{-\lambda(1-z)y}e^{-[\lambda(1-z)+\mu]T}\},$$

где ξ — случайная величина, означающая число поступающих требований за указанное время. Умножив это выражение на $\dfrac{\lambda e^{-\lambda y}}{1-e^{-\lambda T}}$ и проинтегрировав от 0 до T, получим производящую функцию переходных вероятностей

$$B(z)=\sum_{i=0}^{\infty}b_i z^i=$$

$$=\frac{1}{(1-e^{-\lambda T})(1-e^{-[\lambda(1-z)+\mu]T})}\left\{\frac{1}{2-z}(1-e^{-\lambda(2-z)T})(1-e^{-[\lambda(1-z)+\mu]T})-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda}{\lambda(2-z)+\mu}(1-e^{-[\lambda(2-z)+\mu]T})(1-e^{-\lambda(1-z)T})\right\}. \qquad (5)$$

Отсюда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Рассмотрим систему обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток требований с параметром λ, а время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Обслуживание требования может начаться в момент его поступления (при свободной системе) или в момент, отличающийся от него на временной интервал, кратный некоторому времени T (в случае занятости или наличия очереди). Требования обрабатываются в порядке поступления. Если обслуживающий прибор свободен, в системе нет ранее поступившего требования и актуальное требование находится в соответствующей позиции, то обслуживание обязательно начнется. Введем цепь Маркова, состояния которой соответствуют числу требований в системе в моменты $t_k-0\,t_k$ — момент начала обслуживания k-го требования). Ее матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

а ее элементы определяются с помощью производящих функций (2) и (5). Запишем производящую функцию эргодического распределения этой цепи:

$$P(z)=p_0\frac{B(z)(\lambda z+\mu)-zA(z)(\lambda+\mu)}{\mu[B(z)-z]},$$

где

$$p_0=1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1-e^{-(\lambda+\mu)T}e^{-\lambda T}}{(1-e^{-\mu T})}. \qquad (7)$$

Тогда условие существования эргодического распределения имеет вид

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{e^{-\lambda T}(1-e^{-\mu T})}{1-e^{-\lambda T}}. \tag{8}$$

Доказательство. Функционирование системы описывается с помощью вложенной цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей (6). Обозначим эргодические вероятности через p_i $(i=0,1,\dots)$ и введем производящую функцию $P(z)=\sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$. Тогда

$$p_j = p_0 a_j + p_1 a_j + \sum_{i=2}^{j+1} p_i b_{j-i+1}, \ j=1,2,\dots, \tag{9}$$

$$p_0 = p_0 a_0 + p_1 a_0. \tag{10}$$

Из (9) и (10)

$$P(z)=\frac{p_0[zA(z)-B(z)]+p_1 z[A(z)-B(z)]}{z-B(z)}.$$

Это выражение содержит неизвестные вероятности p_0 и p_1, но, используя (10), p_1 запишем через p_0; p_0 определяется из условия $P(1)=1$, т.е.

$$p_0 = \frac{1-B'(1)}{1+A'(1)-B'(1)+\lambda\mu[A'(1)-B'(1)]}.$$

Поскольку цепь неприводима, $p_0>0$. Используя

$$A'(1)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left\{1+\frac{\lambda T}{1-e^{-\mu T}}\right\}, \ B'(1)=1-\frac{\lambda T e^{-\lambda T}}{1-e^{-\lambda T}}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\lambda T\frac{1-e^{-(\lambda+\mu)T}}{(1-e^{-\lambda T})(1-e^{-\mu T})},$$

получаем

$$\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)A'(1)-\frac{\lambda}{\mu}B'(1)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\lambda T\frac{1-e^{-(\lambda+\mu)T}}{(1-e^{-\lambda T})(1-e^{-\mu T})}>0,$$

так как должно выполниться условие $1-B'(1)>0$. Это ведет к неравенству

$$\lambda T e^{-\lambda T}\, 1-e^{-\lambda T}\ -\lambda\lambda+\mu\lambda T 1-e^{-(\lambda+\mu)T}\,(1-e^{-\lambda T})(1-e^{-\mu T})>0,$$

откуда

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} < \frac{e^{-\lambda T}(1-e^{-\mu T})}{1-e^{-(\lambda+\mu)T}},$$

а это равносильно (8).

Теорема доказана.

За «период занятости» принимаются интервалы, необходимые для достижения нужной для начала обслуживания позиции, их влияние с уменьшением T также уменьшается, в предельном случае обслуживание становится непрерывным.

Следствие. Предельное распределение описанной в теореме системы при $T\to 0$

$$P^*(z)=\frac{1-\rho}{1-\rho z}\quad\left(\rho=\frac{\lambda}{\mu}\right),$$

т.е. является геометрическим распределением с параметром ρ.

Доказательство. Определим значения p_0, $A(z)$ и $B(z)$ при $T\to 0$, предельные значения обозначим p_0^*, $A^*(z)$ и $B^*(z)$. Используя (7), (2) и (5), получаем

$$p_0^* = \lim_{T\to 0} p_0 = \lim_{T\to 0}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1-e^{-(\lambda+\mu)T}}{e^{-\lambda T}(1-e^{-\mu T})}\right)=1-\frac{\lambda}{\mu}=1-\rho,$$

$$\lim_{T\to 0} A(z)=\lim_{T\to 0} B(z)=\frac{\mu}{\lambda(1-z)+\mu},$$

т.е.

$$P^*(z)=(1-\rho)\frac{(\lambda z+\mu)\dfrac{\mu}{\lambda(1-z)+\mu}-z(\lambda+\mu)\dfrac{\mu}{\lambda(1-z)+\mu}}{\mu\left[\dfrac{\mu}{\lambda(1-z)+\mu}\right]}=\frac{1-\rho}{1-\rho z}.$$

Эта формула служит производящей функцией эргодического распределения для системы $M/M/1$, что совпадает с классическими результатами.

Время ожидания. Рассмотрим систему обслуживания, описанную в предыдущем разделе, и, используя результаты Е.В. Кобы [6], определим распределение времени ожидания. Пусть t_n — момент поступления n-го требования, тогда его обслуживание начнется в момент $t_n+T\cdot X_n$, где X_n — неотрицательное целое число. Пусть $\xi_n=t_{n+1}-t_n$, а η_n — время обслуживания n-го требования. Между X_n и X_{n+1} имеет место следующее соотношение: если $(k-1)T<iT+\eta_n-\xi_n\le kT$ $(k\ge 1)$, то $X_{n+1}=k$; если $iT+\eta_n-\xi_n\le 0$, то $X_{n+1}=0$. Следовательно, X_n — однородная цепь Маркова с переходными вероятностями p_{ik}, где

$$p_{ik}=P\{(k-i-1)T<\eta_n-\xi_n\le(k-i)T\},$$

если $k\ge 1$;

$$p_{i0}=P\{\eta_n-\xi_n\le -iT\}.$$

Введем обозначения:

$$f_j=P\{(j-1)T<\eta_n-\xi_n\le jT\}, \tag{11}$$

$$p_{ik}=f_{k-i},\ k\ge 1,\ p_{i0}=\sum_{j=-\infty}^{-i}f_j=\hat{f}_i. \tag{12}$$

Учитывая (12), эргодическое распределение цепи будет удовлетворять системе уравнений

$$p_j=\sum_{i=0}^{\infty}p_i p_{ij},\ j\ge 0,\ \sum_{j=0}^{\infty}p_j=1. \tag{13}$$

Теорема 2. Рассмотрим описанную в теореме 1 систему. Введем цепь Маркова, состояния которой соответствуют времени ожидания в моменты поступления требований. Матрица переходных вероятностей этой цепи имеет вид

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{j=-\infty}^{0}f_j & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \cdots \\ \sum\limits_{j=-\infty}^{-1}f_j & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & \cdots \\ \sum\limits_{j=-\infty}^{-2}f_j & f_{-1} & f_0 & f_1 & f_2 & \cdots \\ \sum\limits_{j=-\infty}^{-3}f_j & f_{-2} & f_{-1} & f_0 & f_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{14}$$

ее элементы определяются формулами (11), (12). Тогда производящая функция эргодического распределения имеет вид

$$P(z)=\left[1-\frac{\lambda}{\mu}\frac{1-e^{-\lambda T}}{e^{-\lambda T}(1-e^{-\mu T})}\right]\frac{\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}-\dfrac{\mu(1-e^{-\lambda T})}{\lambda+\mu}\dfrac{z}{z-e^{-\lambda T}}}{1-\dfrac{\lambda(1-e^{-\mu T})}{\lambda+\mu}\dfrac{z}{1-ze^{-\mu T}}-\dfrac{\mu(1-e^{-\lambda T})}{\lambda+\mu}\dfrac{z}{z-e^{-\lambda T}}}, \tag{15}$$

а условие существования эргодического распределения выражается неравенством

$$\frac{\lambda}{\mu}<\frac{e^{-\lambda T}(1-e^{-\mu T})}{1-e^{-\lambda T}}. \tag{16}$$

Доказательство. Имеем

$$P\{\xi < x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \; P\{\eta < x\} = 1 - e^{-\mu x}.$$

Для функции распределения $\eta - \xi$ получим

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} e^{\lambda x}, & \text{если } x \le 0, \\ 1 - \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-\mu x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Находим переходные вероятности цепи Маркова: для $j > 0$

$$f_j = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-\mu(j-1)T} - 1 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-\mu jT} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - e^{-\mu T}) e^{-\mu(j-1)T},$$

для отрицательных значений $(j \ge 0)$

$$f_{-j} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda jT} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda(j+1)T} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}(1 - e^{-\lambda T}) e^{-\lambda jT},$$

$$p_{i0} = \hat{f}_i = \sum_{j=-\infty}^{-i} f_j = \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\mu}{\lambda+\mu}(1 - e^{-\lambda T}) e^{-\lambda jT} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda iT}.$$

Используя матрицы переходных вероятностей (14), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} p_0 &= p_0 \hat{f}_0 + p_1 \hat{f}_1 + p_2 \hat{f}_2 + p_3 \hat{f}_3 + \ldots \\ p_1 &= p_0 f_1 + p_1 f_0 + p_2 f_{-1} + p_3 f_{-2} + \ldots \\ p_2 &= p_0 f_2 + p_1 f_1 + p_2 f_0 + p_3 f_{-1} + \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Умножая j-е уравнение на z^j и суммируя от 0 до бесконечности для производящей функции $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j$, получаем

$$P(z) = P(z) F_+(z) + \sum_{j=1}^{\infty} p_j z^j \sum_{i=0}^{j-1} f_{-i} z^{-i} + \sum_{j=0}^{\infty} p_j \hat{f}_j. \tag{17}$$

В данном случае

$$F_+(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i z^i = \frac{\lambda z}{\lambda+\mu}(1 - e^{-\mu T}) \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\mu(i-1)T} z^{i-1} = \frac{\lambda(1 - e^{-\mu T})}{\lambda+\mu} \frac{z}{1 - z e^{-\mu T}},$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} f_{-i} z^{-i} = \frac{\mu(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda+\mu} \sum_{i=0}^{j-1} e^{-\lambda iT} z^{-i} = \frac{\mu(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda+\mu} \frac{1 - (e^{-\lambda T} z)^j}{1 - \dfrac{e^{-\lambda T}}{z}},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i \hat{f}_i = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda iT} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} P(e^{-\lambda T}).$$

Используя эти выражения, имеем

$$P(z) = P(z) F_+(z) + \sum_{j=1}^{\infty} p_j z^j \frac{\mu(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda+\mu} \frac{1 - \left(\dfrac{e^{-\lambda T}}{z}\right)^j}{1 - \dfrac{e^{-\lambda T}}{z}} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} P(e^{-\lambda T}) =$$

$$= P(z)F_+(z) + \frac{\mu(1-e^{-\lambda T})}{\lambda+\mu} \frac{z}{z-e^{-\lambda T}} [P(z) - P(e^{-\lambda T})] + \frac{\mu}{\lambda+\mu} P(e^{-\lambda T})$$

или

$$P(z)\left[1 - F_+(z) - \frac{\mu(1-e^{-\lambda T})}{\lambda+\mu} \frac{z}{z-e^{-\lambda T}}\right] = P(e^{-\lambda T})\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu(1-e^{-\lambda T})}{\lambda+\mu} \frac{z}{z-e^{-\lambda T}}\right].$$

Для нахождения $P(e^{-\lambda T})$ воспользуемся тем, что $P(1)=1$, отсюда

$$P(e^{-\lambda T}) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \frac{1-e^{-\lambda T}}{e^{-\lambda T}(1-e^{-\mu T})}.$$

Для производящей функции получим выражение (15), а из него вероятность того, что время ожидания равно нулю

$$p_0 = \left[1 - \frac{\lambda}{\mu} \frac{1-e^{-\lambda T}}{e^{-\lambda T}(1-e^{-\mu T})}\right] \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Для того чтобы имело место $p_0 > 0$, должно выполняться неравенство

$$\frac{\lambda}{\mu} \frac{1-e^{-\lambda T}}{e^{-\lambda T}(1-e^{-\mu T})} < 1,$$

оно ведет к условию эргодичности (16).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lakatos L. On a simple continuous cyclic-waiting problem // Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. — 1994. — **14**. — P. 105–113.
2. Lakatos L. On a cyclic-waiting queueing system // Theory of Stochastic Processes. — 1996. — **2(18)**. — P. 176–180.
3. Lakatos L. On a simple discrete cyclic-waiting queueing problem // J. Math. Sci. (New York). — 1998. — **92 (4)**. — P. 4031–4034.
4. Lakatos L. A retrial system with time-limited tasks // Theory of Stochastic Processes. — 2002. — **8(24).** — P. 250–256.
5. Lakatos L. A retrial queueing system with urgent customers // J. Math. Sci. — 2006. — **138 (1)**. — P. 5405–5409.
6. Коба Е.В. О системе обслуживания $GI/G/1$ с повторением заявок при обслуживании в порядке очереди // Доп. НАН України. — 2000. — **6**. — С. 101–103.
7. Коба Е.В., Михалевич К.В. Сравнение систем обслуживания типа $M/G/1$ с повторением при быстром возвращении с орбиты // Queues: Flows, Systems, Networks. Proc. of Int. Conf. «Modern Math. Methods of Telecommunication Networks». — Gomel, BGU, Minsk, 23–25 September, 2003. — P. 136–138.
8. Mykhalevych K.V. A comparison of a classical retrial $M/G/1$ queueing system and a Lakatos-type $M/G/1$ cyclic-waiting time queueing system // Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. — 2004. — **23**. — P. 229–238.
9. Kárász P. Special retrial systems with requests of two types // Theory of Stochastic Processes. — 2004. — 1**0 (26)**. — P. 51–56.
10. Kárász P. A special discrete cyclic-waiting queui ng system // Central European J. Oper. Res. — 2008. — 1**6 (4).** — P. 391–406.
11. Коваленко И.Н. Вероятность потери в системе обслуживания $M/G/m$ с T-повторением вызовов в режиме малой нагрузки // Доп. НАН України. — 2002. — **5.** — С. 77–80.
12. Коваленко И.Н., Коба Е.В. Три системы обслуживания с повторными вызовами, отражающие некоторые особенности процесса посадки воздушных судов // Проблемы управления и информатики. — 2002. — № 2. — С. 78–82.
13. Laevens K., Van Houdt B., Blondia C., Bruneel H. On the sustainable load of fiber delay line buffers // Electronic Letters. — 2004. — **40**. — P. 137–138.
14. Rogiest W., Laevens K., Fiems D., Bruneel H. Analysis of a Lakatos-type queueing system with general service times // Proc. of ORBEL 20. Quantitative Methods for Decision Making. — Ghent, January 19–20, 2006. — P. 95–97.
15. Rogiest W., Laevens K., Walraevens J., Bruneel H. Analyzing a degenerate buffer with general inter-arrival and service times in discrete time // Queueing Systems. — 2007. — **56**. — P. 203–212.

Поступила 26.10.2009