УДК 519.21

Е.А. ЛЕБЕДЕВ, В.В. СЕМЕНОВ

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С ИММИГРАЦИЕЙ

Ключевые слова: *ветвящийся процесс с иммиграцией, равномерная топология, диффузионный процесс, интегральный функционал*.

Ветвящийся процесс обычно определяется как марковский процесс, который удовлетворяет условию ветвления [1, с. 11]. Ветвящиеся процессы описывают достаточно широкий класс реальных явлений в физике, химии, биологии, технике, демографии, теории массового обслуживания. Отметим важные применения этих процессов в математической теории надежности [2].

Класс ветвящихся процессов включает также процессы с иммиграцией, в которых наряду с размножением и превращением частиц имеется постоянный приток частиц извне, управляемый случайным механизмом, не зависящим от числа существующих частиц. Построим модель ветвящегося процесса с иммиграцией, которая будет исследоваться в данной работе.

Пусть $\{Z(m),\ m=0,1,2,\dots\}$ — ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона [1, с. 13], а $Z=\{Z_i^j(\cdot),\ i=1,2,\dots;\ j=0,1,\dots\}$ — независимые процессы, конечномерные распределения которых совпадают с распределениями $Z(m)$, $m=0,1,\dots$ Случайную величину $Z(m)$ можно интерпретировать как количество потомков одной частицы в момент времени m. Положим $Z(1)=\xi$ — количество потомков в первом поколении. Кроме того, пусть η — случайная величина, принимающая целые неотрицательные значения. Обозначим $\mathrm{H}=\{\eta_j,\ j=\overline{1,\infty}\}$ множество целочисленных, независимых в совокупности случайных величин, распределение которых совпадает с η. Производящие функции случайных величин ξ и η обозначим соответственно

$$f(s)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k,\quad g(s)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k s^k,$$

где $P(\xi=k)=f_k$, $P(\eta=k)=g_k$, $k=0,1,\dots$, а их моменты первого и второго порядков — $E\eta=a_\eta$, $E\xi=a_\xi$, $E[\xi(\xi-1)]=\beta_\xi$.

Рассмотрим также $\{\theta_j,\ j=\overline{1,\infty}\}$ — последовательность независимых геометрически распределенных с параметром $p\in(0,1)$ случайных величин. Для соответствующего процесса восстановления введем обозначения

$$\tau_j=\theta_1+\dots+\theta_j,\quad \nu(m)=\max\{j:\tau_j\le m\}.$$

Ветвящийся процесс с иммиграцией $Y(m)$, $m=0,1,\dots$, определим следующим образом:

$$Y(m)=\sum_{j=1}^{\nu(m)}\sum_{i=1}^{\eta_j} Z_i^j(m-\tau_j),\quad m=0,1,\dots$$

Процесс $Y(m)$ является ветвящимся процессом с иммиграцией, для которого случайное количество частиц-иммигрантов η_j поступает в случайный момент времени τ_j, причем время между двумя моментами прихода иммигрантов имеет геометрическое распределение.

При условии, что $Y(0)=k$, процесс

$$\sum_{i=1}^{k} Z_i^0(m)+\sum_{j=1}^{\nu(m)}\sum_{i=1}^{\eta_j} Z_i^j(m-\tau_j)$$

обозначим $Y(k,m)$.

Описанный выше процесс $Y(m)$ можно моделировать ветвящимся процессом $Q(m)=(Q_1(m), Q_2(m))$, $m=0,1,\ldots$, с дискретным временем и двумя типами частиц T_1, T_2. Зададим для процесса $Q(m)$ вероятности превращения частиц между двумя последовательными моментами времени следующим образом:

$$\begin{cases} P(T_1 \to T_1) = p, \\ P(T_1 \to T_1 + kT_2) = qg_k, \ q = 1-p, \\ P(T_2 \to kT_2) = f_k. \end{cases} \tag{1}$$

В начальный момент времени $Q(0)=Q(1,0)$.

Из определения $Q(m)$ следует, что $Q_1(m)\equiv 1$, $Q_2(m) \overset{d}{=} Y(m)$, где $\overset{d}{=}$ означает равенство конечномерных распределений. Иммиграция происходит за счет размножения фиктивной частицы типа T_1, которая порождает новые частицы типа T_2, а сама не исчезает и не размножается. Производящая функция такого процесса запишется в виде

$$F(s_1, s_2) = [s_1(p+qg(s_2)), f(s_2)] = [F_1(s_1,s_2), F_2(s_1,s_2)].$$

Будем считать, что базовые случайные величины ξ и η зависят от n (номера серии): $\xi=\xi(n)$, $\eta=\eta(n)$, $a_\xi = a_\xi(n)$, $a_\eta = a_\eta(n)$, $\beta_\xi = \beta_\xi(n)$. Ветвящийся процесс близок к критическому, если $a_\xi(n) = 1+\dfrac{\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$. Для такого ветвящегося процесса рассмотрим последовательность случайных процессов

$$y_n(t) = \frac{1}{n} Y_n([nx],[nt]), \ x\ge 0, \ t>0,$$

и докажем следующий результат.

Теорема 1. Если $a_\xi(n) = 1+\dfrac{\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\beta_\xi(n)=\beta_\xi+o(1)$, $a_\eta(n)=a_\eta+o(1)$, $\beta_\xi, a_\eta > 0$, множества случайных величин $\Xi_n^2 = \{\xi^2(n), \ n=1,2,\ldots\}$ и $\mathrm{H}_n = \{\eta(n), \ n=1,2,\ldots\}$ равномерно интегрируемы, то

$$\lim_{n\to\infty} E[\exp(-\lambda y_n(t))] = \exp(-x\theta(t,\lambda))\left(1+\frac{1}{2}\beta_\xi\lambda\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}\right)^{\frac{-2qa_\eta}{\beta_\xi}}, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} E[\exp\{-(\lambda_1 y_n(t_1)+\lambda_2 y_n(t_2)+\ldots+\lambda_l y_n(t_l))\}] =$$

$$= \exp\{-x\theta(\Delta t_1, \lambda_1+\theta(\Delta t_2, \lambda_2+\ldots+\theta(\Delta t_l, \lambda_l)))\}\left(1+\frac{1}{2}\beta_\xi\lambda\frac{e^{\alpha\Delta t_j}-1}{\alpha}\right)^{\frac{-2qa_\eta}{\beta_\xi}}, \tag{3}$$

где $\theta(t,\lambda) = \dfrac{\lambda e^{\alpha t}}{1+\dfrac{1}{2}\beta_\xi\lambda\dfrac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}}$, $\lambda_i \ge 0$, $i=1,2,\ldots,l.$

Перед тем как доказывать теорему, установим несколько вспомогательных результатов.

Лемма 1. Пусть ветвящийся процесс с двумя типами частиц T_1 и T_2 задается схемой (1). Тогда распределение количества частиц типа T_1 и T_2 в момент времени m имеет производящую функцию

$$F(m, s_1, s_2) = \left[s_1 \prod_{j=0}^{m-1}(p+qg(f^{(j)}(s_2))), f^{(m)}(s_2)\right],$$

где $f^{(k)}(s)$ — k-я итерация функции $f(s)$.

Доказательство проводится методом математической индукции по параметру m.

Лемма 2. Совместная производящая функция случайных величин $Y(k,m_1),\dots,Y(k,m_l)$ равна

$$E\left[s_1^{Y(k,m_1)}s_2^{Y(k,m_2)}\dots s_l^{Y(k,m_l)}\right]=\left[f^{(\Delta m_1)}\left(s_1 f^{(\Delta m_2)}\left(\dots\left(s_{l-1}f^{(\Delta m_l)}(s_l)\right)\dots\right)\right)\right]^k\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{l}\left[\prod_{j=1}^{\Delta m_i-1}\left[p+qg\left(f^{(j)}\left(s_i f^{(\Delta m_{i+1})}\left(s_{i+1}\dots\left(s_{l-1}f^{(\Delta m_l)}(s_l)\right)\dots\right)\right)\right)\right]\right],$$

где $0<m_1<m_2<\dots<m_l$, $\Delta m_i=m_i-m_{i-1}$, $0\le s_i\le 1$, $i=1,2,\dots,l$.

Доказательство. Проверим это утверждение для $l=2$. Общий случай доказывается по индукции. Представим

$$Y(k,m_2)=Y(k,m_1+\Delta m_2)=\sum_{i=1}^{Y(k,m_1)}Z^{(i)}(\Delta m_2)+I(\Delta m_2),$$

где $\{Z^{(i)}(\cdot)\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона, которые определяются производящей функцией $f(s)$, а $I(\Delta m_2)$ — часть популяции частиц, которые являются потомками иммигрантов, поступивших в промежутке времени $(m_1,m_2]$ длины Δm_2. Используя свойства условного математического ожидания и независимость $I(\Delta m_2)$, $Y(k,m_1)$, имеем

$$E\left[s_1^{Y(k,m_1)}s_2^{Y(k,m_2)}\right]=E\left[s_1^{Y(k,m_1)}E\left(s_2^{\sum_{i=1}^{Y(k,m_1)}Z^{(i)}(\Delta m_2)+I(\Delta m_2)}\,\middle|\,Y(k,m_1)\right)\right]=$$

$$=E\left[s_1^{Y(k,m_1)}s_2^{I(\Delta m_2)}(f_{\Delta m_2}(s_2))^{Y(k,m_1)}\right]=E\left[s_2^{I(\Delta m_2)}\right]E\left[(s_1 f_{\Delta m_2}(s_2))^{Y(k,m_1)}\right].$$

Из леммы 1 следует, что распределение числа иммигрантов в момент времени Δm_2 имеет производящую функцию

$$h(\Delta m_2,s)=F_1(\Delta m_2,1,s)=\prod_{j=0}^{\Delta m_2-1}[p+qg(f^{(j)}(s))].$$

Таким образом,

$$E[s^{Y(k,m)}]=[f^{(m)}(s)]^k\prod_{j=0}^{m-1}[p+qg(f^{(j)}(s))].$$

Следовательно, справедливо равенство

$$E\left[s_2^{I(\Delta m_2)}\right]E\left[(s_1 f^{(\Delta m_2)}(s_2))^{Y(k,m_1)}\right]=$$

$$=\left[f^{(m_1)}\left(s_1 f^{(\Delta m_2)}(s_2)\right)\right]^k\prod_{j=0}^{m_1-1}\left[p+qg\left(f^{(j)}\left(s_1 f^{(\Delta m_2)}(s_2)\right)\right)\right]\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{\Delta m_2-1}[p+qg(f^{(j)}(s_2))].$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3 [3]. Предположим, что $\beta_\xi(n) = \beta_\xi + o(1)$ и множество Ξ_n^2 равномерно интегрируемо. Тогда для произвольного числа ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\beta_\xi$, существуют числа $s(\varepsilon) \in [0,1]$ и $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $s \in [s(\varepsilon), 1]$, $n \ge N(\varepsilon)$ и $k = 1, 2, \ldots$ справедлива оценка

$$1 - \frac{(a_\xi(n))^{k+1}}{\frac{a_\xi(n)}{1-s} + \left(\frac{1}{2}\beta_\xi + \varepsilon\right)\frac{(a_\xi(n))^k - 1}{a_\xi(n) - 1}} \ge f_n^{(k)}(s) \ge 1 - \frac{(a_\xi(n))^{k+1}}{\frac{a_\xi(n)}{1-s} + \left(\frac{1}{2}\beta_\xi - \varepsilon\right)\frac{(a_\xi(n))^k - 1}{a_\xi(n) - 1}}.$$

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем равенство (2). Используя лемму 1, запишем равенство

$$E[\exp(-\lambda y_n(t))] = [f_n^{([nt])}(e^{-\lambda/n})]^{[nx]} \prod_{j=0}^{[nt]-1} [p + qg_n(f_n^{(j)}(e^{-\lambda/n}))].$$

Тот факт, что $\lim\limits_{n\to\infty} [f_n^{([nt])}(e^{-\lambda/n})]^{[nx]} = \exp(-x\theta(t,\lambda))$, является следствием предельной теоремы из [3]. Таким образом, осталось найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{[nt]-1} [p + qg_n(f_n^{(j)}(e^{-\lambda/n}))].$$

Не нарушая общности, будем предполагать, что $\overline{a}_\eta = \min\limits_{n\ge1} a_\eta(n) > 0$. Производящую функцию $g_n(s)$ можно представить в виде

$$g_n(s) = 1 + \left(a_\eta(n) - \sum_{i_1=2}^{\infty} g_{i_1} \sum_{i_2}^{i_1-1} (1 - s^{i_2})\right)(s-1).$$

В силу равномерной интегрируемости H_n для произвольного $\varepsilon \in (0, \overline{a}_\eta)$ существует $s_1(\varepsilon) \in [0,1]$ такое, что для $s \in [s_1(\varepsilon), 1]$ и всех $n \ge 1$ выполняются неравенства

$$1 - (a_\eta(n) - \varepsilon)(1-s) > g_n(s) > 1 - a_\eta(n)(1-s). \tag{4}$$

Пусть $s_1(\varepsilon)$ настолько близко к 1, что все члены неравенства (4) больше 0. Для любого $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\beta_\xi$, существуют $s_2(\varepsilon) \in [0,1]$ и $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $s \in [s_2(\varepsilon), 1]$, $n \ge N(\varepsilon)$ и $j = 1, 2, \ldots$ справедлива оценка (лемма 3)

$$1 - \frac{(a_\xi(n))^{j+1}}{\frac{a_\xi(n)}{1-s} + \left(\frac{1}{2}\beta_\xi + \varepsilon\right)\frac{(a_\xi(n))^j - 1}{a_\xi(n) - 1}} \ge f_n^{(j)}(s) \ge$$

$$\ge 1 - \frac{(a_\xi(n))^{j+1}}{\frac{a_\xi(n)}{1-s} + \left(\frac{1}{2}\beta_\xi - \varepsilon\right)\frac{(a_\xi(n))^j - 1}{a_\xi(n) - 1}}. \tag{5}$$

Пусть $s_2(\varepsilon)$ настолько близко к 1, что все члены неравенства (5) принадлежат отрезку $[s_1(\varepsilon), 1]$. Положим $s(\varepsilon) = \max[s_1(\varepsilon), s_2(\varepsilon)]$. Тогда для всех $s \in [s(\varepsilon), 1]$ и $n \ge N(\varepsilon)$ неравенства (4) и (5) будут выполняться одновременно. Пусть $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n \ge N(\varepsilon)$ $e^{-\lambda/n} \in [s(\varepsilon), 1]$. Тогда из неравенств (4) и (5) следует

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{[nt]-1}\ln\left(1-qa_\eta(n)\frac{(a_\xi(n))^j(1-e^{-\lambda/n})}{1+\frac{\left(\frac{1}{2}\beta_\xi-\varepsilon\right)}{a_\xi(n)}(1-e^{-\lambda/n})\frac{(a_\xi(n))^j-1}{a_\xi(n)-1}}\right)\le$$

$$\le\varliminf_{n\to\infty}\ln\prod_{j=0}^{[nt]-1}[p+qg_n(f_n^{(j)}(e^{-\lambda/n}))]\le\varlimsup_{n\to\infty}\ln\prod_{j=0}^{[nt]-1}[p+qg_n(f_n^{(j)}(e^{-\lambda/n}))]\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{[nt]-1}\ln\left(1-q(a_\eta(n)-\varepsilon)\frac{(a_\xi(n))^j(1-e^{-\lambda/n})}{1+\frac{\left(\frac{1}{2}\beta_\xi+\varepsilon\right)}{a_\xi(n)}(1-e^{-\lambda/n})\frac{(a_\xi(n))^j-1}{a_\xi(n)-1}}\right).$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}-\sum_{j=0}^{[nt]-1}\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^j\lambda}{1+\frac{\left(\frac{1}{2}\beta_\xi\pm\varepsilon\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}\lambda\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^j-1}{\alpha}}\frac{1}{n}=-\int_0^t\frac{\lambda e^{\alpha u}du}{1+\left(\frac{1}{2}\beta_\xi\pm\varepsilon\right)\lambda\frac{e^{\alpha u}-1}{\alpha}}=$$

$$=-\frac{1}{\frac{1}{2}\beta_\xi\pm\varepsilon}\ln\left(1+\lambda\left(\frac{1}{2}\beta_\xi\pm\varepsilon\right)\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}\right).$$

Таким образом,

$$-\frac{qa_\eta}{\frac{1}{2}\beta_\xi-\varepsilon}\ln\left(1+\lambda\left(\frac{1}{2}\beta_\xi-\varepsilon\right)\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}\right)\le\varliminf_{n\to\infty}\ln\prod_{j=0}^{[nt]-1}[p+qg_n(f_n^{(j)}(e^{-\lambda/n}))]\le$$

$$\le\varlimsup_{n\to\infty}\ln\prod_{j=0}^{[nt]-1}[p+qg_n(f_n^{(j)}(e^{-\lambda/n}))]\le-\frac{q(a_\eta-\varepsilon)}{\frac{1}{2}\beta_\xi+\varepsilon}\ln\left(1+\lambda\left(\frac{1}{2}\beta_\xi+\varepsilon\right)\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}\right).$$

Поскольку это неравенство выполняется для любого $0<\varepsilon<\min\left(\overline{a}_\eta,\frac{1}{2}\beta_\xi\right)$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{j=0}^{[nt]-1}[p+qg_n(f_n^{(j)}(e^{-\lambda/n}))]=-\frac{2qa_\eta}{\beta_\xi}\ln\left(1+\frac{1}{2}\beta_\xi\,\lambda\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}\right).$$

Равенство (2) доказано. Доказательство (3) аналогично. Вместо производящей функции случайной величины $Y(k,m)$ используется совместная производящая функция $Y(k,m_1),\ldots,Y(k,m_l)$, которая найдена в лемме 2.

Теорема доказана.

Правые части соотношений (2) и (3) представляют собой преобразование Лапласа конечномерных распределений диффузионного процесса $y_0(t)$, $t>0$, с коэффициентами переноса $a(x)=\alpha x+qa_\eta$ и диффузии $b(x)=\beta_\xi x$. Таким образом, основной результат теоремы 1 состоит в доказательстве сходимости $y_n(t)$ к диффузионному процессу $y_0(t)$ в смысле конечномерных распределений. Покажем, что при тех самых условиях $y_n(t)$ сходится к процессу $y_0(t)$ в равномерной топологии U [4].

Теорема 2. Пусть $a_\xi(n)=1+\dfrac{\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\beta_\xi(n)=\beta_\xi+o(1)$, $a_\eta(n)=a_\eta+o(1)$, множества Ξ_n^2 и H_n равномерно интегрируемы. Тогда на любом конечном промежутке $[0,T]$ последовательность $y_n(t)$ сходится в U-топологии к диффузионному процессу $y_0(t)$, $t>0$, с коэффициентом переноса $a(x)=\alpha x+qa_\eta$ и диффузии $b(x)=\beta_\xi x$.

При доказательстве теоремы будем использовать следующий результат.

Лемма 4. Пусть ветвящийся процесс с двумя типами частиц T_1 и T_2 задается схемой (1). Тогда имеют место следующие утверждения:

1) если первые моменты ξ, η конечны, a_ξ, $a_\eta<\infty$, то матрица математических ожиданий $A(m)$ процесса $Q(m)=(Q_1(m),Q_2(m))$ конечна и имеет вид

$$A(m)=\begin{pmatrix} 1 & qa_\eta\dfrac{a_\xi^m-1}{a_\xi-1} \\ 0 & a_\xi^m \end{pmatrix};$$

2) если выполняются условия п. 1 и, кроме того, вторые моменты $M\xi(\xi-1)=\beta_\xi$, $M\eta(\eta-1)=\beta_\eta$ конечны, то

$$E[Q_2(m)(Q_2(m)-1)]=q\left(\beta_\eta-a_\eta^2+\frac{\beta_\xi a_n}{a_\xi(a_\xi-1)}\right)\left(\frac{a_\xi^m+1}{a_\xi+1}\right)\left(\frac{a_\xi^m-1}{a_\xi-1}\right)+$$

$$+q\left(a_\eta^2+\left(a_\eta(a_\xi-1)-\frac{\beta_\xi a_\eta}{a_\xi}\right)\frac{1}{a_\xi^m-1}\right)\left(\frac{a_\xi^m-1}{a_\xi-1}\right)^2. \tag{6}$$

Утверждения 1, 2 леммы 4 следуют из леммы 1.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что случайные величины $\eta_j(n)$ принимают значения из ограниченного множества $\{0,1,\ldots,N\}$. Поскольку траектории предельного процесса с вероятностью 1 непрерывны, для сходимости $y_n(t)$ к $y_0(t)$ в U-топологии достаточно показать сходимость в J-топологии [4]. Для этого оценим вероятность

$$\Delta_n=P(|y_n(t)-y_n(t_1)|\ge\varepsilon,\ |y_n(t_2)-y_n(t)|\ge\varepsilon),\ \ 0\le t_1<t<t_2\le T.$$

В силу неравенства Чебышева имеем

$$\Delta_n=E[\bar\chi_\varepsilon(y_n(t)-y_n(t_1))\bar\chi_\varepsilon(y_n(t_2)-y_n(t))]=$$

$$=E[\bar\chi_\varepsilon(y_n(t)-y_n(t_1))\,E\{\bar\chi_\varepsilon(y_n(t_2)-y_n(t))|\,y_n(t)\}]\le$$

$$\le\varepsilon^{-2}E[\bar\chi_\varepsilon(y_n(t)-y_n(t_1))\,E\{(y_n(t_2)-y_n(t))^2|y_n(t)\}],$$

где $\bar\chi_\varepsilon(x)=1-\chi_\varepsilon(x)$, $\chi_\varepsilon(x)=\begin{cases}1, & |x|\le\varepsilon,\\ 0, & |x|>\varepsilon.\end{cases}$

Не теряя общности, будем считать, что $a_\xi(n)=1+\dfrac{\alpha}{n}$. Тогда, используя результаты леммы 4, нетрудно показать, что имеют место неравенства

$$E[(y_n(t_2)-y_n(t))^2 \,|\, y_n(t)] \le (H_1 y_n^2(t)+H_2)\left[\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt_2]-[nt]}-1}{\alpha}\right]^2 +$$

$$+(H_3 y_n(t)+H_4)\left[\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt_2]-[nt]}-1}{\alpha}\right], \qquad (7)$$

$$E[(y_n(t)-y_n(t_1))^2] \le \widetilde{H}_1\left[\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]-[nt_1]}-1}{\alpha}\right]^2 + \widetilde{H}_2\left[\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]-[nt_1]}-1}{\alpha}\right], \qquad (8)$$

причем константы $H_i > 0$, $i=\overline{1,4}$, и $\widetilde{H}_i > 0$, $i=1,2$, зависят только от N, T и q.

Используя (7) и (8), находим

$$\Delta_n \le \varepsilon^{-2}\left[\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt_2]-[nt]}-1}{\alpha}\right]^2 E[H_1 y_n^2(t)-H_2]+$$

$$+\varepsilon^{-3}\left[\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt_2]-[nt]}-1}{\alpha}\right][E(y_n(t)-y_n(t_1))^2]^{1/2}\,[E(H_3 y_n(t)+H_4)^2]^{1/2}.$$

Следовательно, существуют константы $K_\varepsilon^1(N,T,q)$ и $K_\varepsilon^2(N,T,q)$ такие, что

$$\Delta_n \le K_\varepsilon^1(N,T,q)\left[\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt_2]-[nt]}-1}{\alpha}\right]^2 +$$

$$+K_\varepsilon^2(N,T,q)\left[\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt_2]-[nt]}-1}{\alpha}\right]\sqrt{\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]-[nt_1]}-1}{\alpha}}.$$

Нетрудно проверить, что для произвольных $s,t\in[0,T]$, $t>s$, и $n\ge\overline{n}=$ $=\min\left\{n: 1+\frac{\alpha}{n}>0\right\}$ имеем

$$\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]-[ns]}-1}{\alpha} \le \max\left\{\frac{e^{\alpha T}-1}{\alpha T}, \frac{n}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\right\}(n^{-1}[nt]-n^{-1}[ns]).$$

Используя это неравенство, а также соотношения

$$n^{-1}[nt_2]-n^{-1}[nt]\le n^{-1}[nt_2]-n^{-1}[nt_1],$$

$$n^{-1}[nt]-n^{-1}[nt_1]\le n^{-1}[nt_2]-n^{-1}[nt_1],$$

имеем

$$\Delta_n \le C_\varepsilon(N,T,q)(n^{-1}[nt_2]-n^{-1}[nt_1])^{3/2},$$

где $C_\varepsilon(N,T,q)$ — константа, не зависящая от n.

Рассмотрим два случая: $t_2-t_1\le n^{-1}$ и $t_2-t_1>n^{-1}$. Во втором случае

$$\Delta_n \le C_\varepsilon(N,T,q)(n^{-1}[nt_2]-n^{-1}[nt_1])^{3/2}\le C_\varepsilon(N,T,q)(t_2-t_1+n^{-1})^{3/2}\le$$
$$\le 2^{3/2}C_\varepsilon(N,T,q)(t_2-t_1)^{3/2}. \tag{9}$$

Неравенство (9) справедливо и в первом случае, поскольку при $t_2-t_1\le n^{-1}$ $\Delta_n=0$. В силу теоремы 15.6 [5] из неравенства (9) следует сходимость $y_n(t)$ к $y_0(t)$ в J-топологии.

Предположим, что случайные величины $\eta_j(n)$ принимают произвольные значения из множества $\{0,1,2,\dots\}$. Для фиксированного $N=1,2,3,\dots$ представим процесс с иммиграцией в виде

$$Y^n(k,m)=Y^n_{0N}(k,m)+Y^n_{1N}(m),\ \ m\ge 0, \tag{10}$$

где $Y^n_{0N}(k,0)=k$,

$$Y^n_{0N}(k,m)=\sum_{i=1}^{k}Z_i^{0,n}(m)+\sum_{j=1}^{\nu(m)}\sum_{i=1}^{\eta_{jN}(n)}Z_i^{j,n}(m-\tau_j),\ \ m\ge 1,$$

$$Y^n_{1N}(0)=0,\ \ Y^n_{1N}(m)=\sum_{j=1}^{\nu(m)}\sum_{i=1}^{\overline{\eta}_{jN}(n)}Z_i^{j,n}(m-\tau_j),\ \ m\ge 1,$$

$$\eta_{jN}(n)=\chi_N(\eta_j(n))\eta_j(n),\ \ \overline{\eta}_{jN}(n)=\overline{\chi}_N(\eta_j(n))\eta_j(n),$$

$$\chi_N(x)=\begin{cases}1, & |x|\le N,\\ 0, & |x|>N,\end{cases}\ \ \overline{\chi}_N(x)=1-\chi_N(x).$$

Из соотношения (10) следует, что процесс $y_n(t)$ раскладывается на сумму двух процессов $y_n(t)=y^N_{0n}(t)+y^N_{1n}(t)$, где $y^N_{0n}(t)=\dfrac{1}{n}Y^n_{0N}([nx],[nt])$, $y^N_{1n}(t)=$ $=\dfrac{1}{n}Y^n_{1N}([nx],[nt])$.

Не теряя общности, будем считать, что случайные величины η^n_j слабо сходятся при $n\to\infty$ к некоторой случайной величине η. Тогда в силу равномерной интегрированности множества H_n имеем

$$E\eta=\alpha_\eta,\ \ \lim_{n\to\infty}E\eta_{jN}(n)=E\chi_N(\eta)\eta=a_\eta(N),\ \ E\eta_{jN}(n)=a_\eta(N)+o(1).$$

Пусть $y^N_0(t)$, $t\ge 0$, — случайный процесс, конечномерные распределения которого имеют вид

$$E[\exp\{-(\lambda_1 y^N_0(t_1)+\lambda_2 y^N_0(t_2)+\ldots+\lambda_l y^N_0(t_l))\}]=$$

$$=\exp\{-x\theta(\Delta t_1,\lambda_1+\theta(\Delta t_2,\lambda_2+\ldots+\theta(\Delta t_l,\lambda_l)))\}\left(1+\frac{1}{2}\beta_\xi\,\lambda\,\frac{e^{\alpha\Delta t_j}-1}{\alpha}\right)^{\frac{-2qa_\eta(N)}{\beta_\xi}}, \tag{11}$$

где $\theta(t,\lambda)=\dfrac{\lambda e^{\alpha t}}{1+\dfrac{1}{2}\beta_\xi\,\lambda\,\dfrac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}}$.

Из теоремы 1 следует $y_{0n}^{N}(t) \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\Rightarrow}} y_{0}^{N}(t)$, где $\overset{d}{\Rightarrow}$ означает сходимость конечномерных распределений для случайных процессов. Равенство (11) доказывает

$$y_{0}^{N}(t) \underset{N\to\infty}{\overset{d}{\Rightarrow}} y_{0}(t).$$

Согласно первой части теоремы последние два соотношения можно усилить:

$$y_{0n}^{N}(t) \underset{n\to\infty}{\overset{U}{\Rightarrow}} y_{0}^{N}(t) \text{ для любого } N, \quad y_{0}^{N}(t) \underset{N\to\infty}{\overset{U}{\Rightarrow}} y_{0}(t).$$

Для того чтобы применить теорему 4.2 из [5] и завершить доказательство, необходимо проверить, что

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sup P\left\{ \sup_{t\in[0,T]} y_{1n}^{N}(t) > \varepsilon \right\} = 0. \tag{12}$$

Для этого рассмотрим

$$P\left\{ \sup_{t\in[0,T]} y_{1n}^{N}(t) > \varepsilon \right\} = P\left\{ \max_{1\le m\le[nT]} Y_{1N}^{n}(m) > n\varepsilon \right\} \le$$

$$\le P\left\{ \max_{1\le m\le[nT]} \frac{Y_{1N}^{n}(m)}{a_{\xi}^{m}(n)} > n\varepsilon\left(1+\frac{|\alpha|}{n}\right)^{-[nT]} \right\} =$$

$$= E\left\{ P\left\{ \max_{1\le m\le[nT]} \frac{Y_{1N}^{n}(m)}{a_{\xi}^{m}(n)} > n\varepsilon\left(1+\frac{|\alpha|}{n}\right)^{-[nT]} \middle| F_{[nT]} \right\}\right\},$$

где $F_{[nT]}$ — σ-алгебра, порождаемая случайными величинами $\nu([nt])$, $t\le T$. Учитывая, что при фиксированной траектории $\nu([nt])$, $0\le t\le T$, процесс $Y_{1N}^{n}(m)/a_{\xi}^{m}(n)$, $m=1,2,\ldots,[nT]$, является полумартингалом, то, используя неравенство Дуба [6, с. 283] для полумартингалов, находим

$$P\left\{ \sup_{t\in[0,T]} y_{1n}^{N}(t) > \varepsilon \right\} \le \frac{1}{n\varepsilon}\left(1+\frac{|\alpha|}{n}\right)^{[nT]} E\left\{ E\left\{ \frac{Y_{1N}^{n}([nT])}{a_{\xi}^{[nT]}(n)} \Big/ F_{[nT]} \right\}\right\} =$$

$$= \frac{1}{n\varepsilon}\left(\frac{1+\dfrac{|\alpha|}{n}}{1+\dfrac{\alpha}{n}}\right)^{[nT]} E\overline{\eta}_{N}(n) E\left\{ \sum_{j=1}^{\nu([nT])} a_{\xi}^{[nT]-\tau_j}(n) \right\} \le$$

$$\le \frac{1}{n\varepsilon}\left(\frac{1+\dfrac{|\alpha|}{n}}{1+\dfrac{\alpha}{n}}\right)^{[nT]} E\overline{\eta}_{N}(n) \frac{a_{\xi}^{[nT]}(n)-1}{a_{\xi}(n)-1} \le$$

$$\le \frac{T}{\varepsilon}\left(\frac{1+\dfrac{|\alpha|}{n}}{1+\dfrac{\alpha}{n}}\right)^{[nT]} \max\left\{ \frac{e^{\alpha T}-1}{\alpha T}, \frac{n}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\right\} E\overline{\eta}_{N}(n).$$

Из этой оценки следует справедливость утверждения (12).

Теорема доказана.

Применим данную теорему для изучения предельного поведения суммарного количества частиц во всех поколениях.

Следствие. Пусть $S_n(t)=n^{-2}\sum\limits_{k=0}^{[nt]}Y_n([nx],k)$ и выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} Ee^{-\lambda S_n(t)}=\exp\left\{-x\varphi(t,\lambda)-qa_\eta\int\limits_0^t\varphi(u,\lambda)du\right\},$$

где

$$\varphi(t,\lambda)=\frac{\alpha}{\beta_\xi}+\frac{1}{\beta_\xi}\sqrt{2\lambda\beta_\xi+\alpha^2}\left(1+\frac{\alpha+\sqrt{2\lambda\beta_\xi+\alpha^2}}{\alpha-\sqrt{2\lambda\beta_\xi+\alpha^2}}e^{-\sqrt{2\lambda\beta_\xi+\alpha^2 t}}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\alpha+\sqrt{2\lambda\beta_\xi+\alpha^2}}{\alpha-\sqrt{2\lambda\beta_\xi+\alpha^2}}e^{-\sqrt{2\lambda\beta_\xi+\alpha^2 t}}\right)^{-1}.$$

Доказательство этого результата основано на сходимости $y_n(t)$ к $y_0(t)$ в равномерной топологии и использовании явного вида преобразования Лапласа соответствующего интегрального функционала для процесса $y_0(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971. — 436 с.
2. Барзилович Е.Ю., Беляев Ю.К., Каштанов В.А., Коваленко И.Н., Соловьев А.Д., Ушаков И.А. Вопросы математической теории надежности / Под ред. Б.В. Гнеденко. — М.: Радио и связь, 1983. — 376 с.
3. Лебедев Е.А. Уточнение одной предельной теоремы для ветвящихся процессов // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1979. — № 5. — С. 334–338.
4. Скороход А.В. Предельные теоремы для случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. — 1956. — **1**, № 3. — С. 289–319.
5. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Мир, 1977. — 352 с.
6. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1956. — 607 с.

Поступила 18.02.2010