УДК 519.21

Л.Б. ВОВК, А.П. КНОПОВ, Т.В. ПЕПЕЛЯЕВА

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К ОЦЕНИВАНИЮ ФИНАНСОВОГО РИСКА

Ключевые слова: *кредитный риск, управление рисками, оценка риска, стохастическое программирование, стохастическая оптимизация, функция риска.*

Управление рисками — одна из основных задач в распределении активов, проводимых банками, страховыми и инвестиционными компаниями и другими финансовыми организациями, оценивающими риск.

Кредитный риск связан с деятельностью торгового партнера, не выполняющего обязательства по суммам и срокам. Существует много подходов к оцениванию такого риска. Наиболее известный и общепринятый подход основан на оценивании так называемого Value-at-Risk (VaR), который стал стандартом оценки и контроля риска. При этом важной является проблема построения портфеля с наперед заданными ограничениями на VaR или с минимально допустимыми VaR.

Как известно, VaR определяется как d-квантиль некоторой функции потерь инвестиционного портфеля. В работе [1] развивается новый подход к оценке риска, состоящий в оценке условных средних ожидаемых потерь (CVaR), превышающих α-VaR. Во многих случаях CVaR по своим свойствам предпочтительнее VaR. Хотя CVaR еще не стала стандартной мерой риска в финансовой индустрии, тем не менее она играет все большую роль в финансовой и страховой математике. Подробное обсуждение этих вопросов можно найти в [1].

Подход к решению задачи об определенности оптимального портфеля с помощью CVaR может использоваться при решении различных задач финансовой математики, в том числе и для нахождения больших портфелей инвестиционных компаний, брокерских фирм и других учреждений, где необходимо оптимальным образом установить риск от принятия тех или иных решений.

Подход, предлагаемый в [1], основан на алгоритме, который вычисляет VaR и минимизирует CVaR. При этом в зависимости от задания функции потерь может возникнуть задача негладкой оптимизации, для решения которой необходимо применять современные методы математического программирования.

Рассмотрим более подробно постановку задачи. Пусть $f: X \times R^n \to R$ — функция потерь, которая зависит от управляемого параметра $x \in X \subset R^n$ и случайного вектора $y \in R^m$. Предположим, что задана плотность распределения $P: R^n \times R^m \to R$, зависящая от параметра x.

Обозначим $\Psi(x,\alpha) = \int\limits_{f(x,\,y)\le\alpha} P(x,y)dy$. Функции $\Psi(x,\alpha)$ определяет вероятность того, что функция потерь $f(x,y)$ не превышает некоторое пороговое α.

Определим величины VaR и CVaR для данной модели следующим образом:

$$\alpha(x,\beta) = \mathrm{VaR}(x,\beta) = \min\{\alpha : \Psi(x,\alpha) \ge \beta\},$$

$$\mathrm{CVar}(x,\beta) = \frac{1}{1-\beta} \int\limits_{f(x,\,y) > \mathrm{Var}(x,\,\beta)} f(x,y)P(y)dy.$$

В [1] доказано, что задача минимизации CVaR эквивалентна задаче нахождения безусловного минимума функции $F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{1-\beta}\int [f(x,y)-\alpha]^+ p(y)dy$, $(x,\alpha) \in X \times R$, где $[z]^+ = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$

Если обозначить $g(x, y, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}[f(x, y) - \alpha]^+$, то нетрудно видеть, что

$$F(x, \alpha) = Eg(x, y, \alpha),$$

и имеется типичная задача стохастического программирования: найти

$$\min_{x \in X \times R} F(x, \alpha) = \min_{x \in X \times R} Eg(x, y, \alpha). \tag{1}$$

Вообще говоря, в силу специфики функции $g(x, y, \alpha)$ это задача недифференцируемой стохастической оптимизации и в общем случае для произвольных функций g она достаточно сложная и не всегда разрешимая.

Остановимся на одном из возможных методов ее решения — методе эмпирических средних. Отметим, что в последние годы этот метод получил достаточно широкое распространение, появилось много публикаций на эту тему, см. [2–4].

Идея этого метода состоит в следующем. Пусть имеются независимые наблюдения случайной величины $y: y_1, \ldots, y_n$. Составим эмпирическую функцию риска

$$F_n(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \sum_{i=1}^{n} g(x, y_i, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \sum_{i=1}^{n} [f(x, y_i) + \alpha]. \tag{2}$$

Будем решать задачу: найти

$$\min_{x \in X \times R} F_n(x, \alpha), \ (x_n^*, \alpha_n^*) = \arg\min F_n(x, \alpha), \tag{3}$$

и пусть

$$(x^*, \alpha^*) = \arg \min_{x \in X \times R} F(x, \alpha). \tag{4}$$

Проблема состоит в том, чтобы установить, когда в том или ином вероятностном смысле имеет место сходимость $(x_n^*, \alpha_n^*) \to (x^*, \alpha^*)$ и $F_n(x_n^*, \alpha_n^*) \to F(x^*, \alpha^*)$.

При этом не накладывается условие на единственность точки (x_n^*, α_n^*). Что же касается единственности точки (x^*, α^*), то для простоты это условие будем считать выполняющимся, хотя, вообще говоря, можно рассматривать случай, когда существует множество решений задачи (3), (4).

Сначала сформулируем некоторое общее утверждение [5], из которого будет следовать решение данной задачи.

Теорема 1: 1) пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \Im, P)$, поток σ-алгебр $\Im_n \subset \Im_{n+1} \subset \Im$, и пусть K — некоторое компактное множество из банахова пространства с нормой $\|\cdot\|$;

2) пусть $\{Q_n(s) = Q_n(s, \omega), (s, \omega) \in K \times \Omega, n \geq 1\}$ — последовательность действительных измеримых функций на $K \times \Omega$, которые полунепрерывны на K для любого $n \geq 1$;

3) пусть $\widetilde{Q}_n(s) = Q_n(s) - Q_n(s^*)$, $s^* \in K$, удовлетворяет следующим условиям:

- $\underline{\lim}_{n \to \infty} \widetilde{Q}_n(s) > 0$, $s \neq s^*$, с вероятностью 1;
- для любого $\delta > 0$ и $s^* \in K$ выполнено

$$P\left\{ \lim_{\gamma \to 0} \lim_{n \to \infty} \sup_{s: \|s - s'\| < \gamma, \|s - s^*\| \geq \delta, \gamma < \delta} |Q_n(s) - Q_n(s')| = 0 \right\} = 1.$$

Обозначим $s_n = \arg\min_{s \in K} Q_n(s)$. Тогда $P\{\lim_{n \to \infty} |s_n - s^*| = 0\} = 1$.

Замечание 1. Условие компактности множества K можно заменить на следующее: множество K — полукомпакт, и для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $\widetilde{K} \subset K$ и число n_0 такое, что $P\{s_n \notin \widetilde{K}\} < \varepsilon$.

Замечание 2. Если функция $Q_n(s)$ ограничена, $Q_n(s) \to \infty$ при $\|s\| \to \infty$ и множество K не компактно, то существуют значения n_0 и $a > 0$ такие, что для $n > n_0$ задачу минимизации можно свести к задаче минимизации на множестве $\{s : K \cap \{|Q_n(s)| \leq a\}\}$.

Теорема 2. Пусть $Q_n(s,\omega)$ — последовательность функций, которые удовлетворяют условия 1), 2) теоремы 1, и, кроме того:

1) существует элемент $s^* \in K$ такой, что для любой последовательности $s_n \in K$ выполнено $P\{\lim_{n\to\infty} \| s_n - s^* \| = 0\} = 1$;

2) существует функция $Q(s)$, $s \in K$, непрерывная в точке s^*, и выполнено $P\{\lim_{n\to\infty} Q_n(s^*) = Q(s^*)\} = 1$;

3) существует значение γ_0 такое, что для $0 < \gamma < \gamma_0$ выполнено

$$P\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\|s-s^*\|<\gamma} |Q_n(s) - Q_n(s^*)| < c(\gamma) \right\} = 1,$$

где $c(\gamma) > 0$ при $\gamma > 0$ и $c(\gamma) \to 0$ при $\gamma \to 0$.

Тогда $P\{\lim_{n\to\infty} Q_n(s_n) = Q_n(s^*)\} = 1$.

Доказательство. Поскольку $P\{\lim_{n\to\infty} Q_n(s^*) = Q(s^*)\} = 1$, то достаточно доказать, что $P\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} |Q_n(s) - Q_n(s^*)| > \varepsilon \right\} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Для любого $\delta > 0$ имеем

$$P\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} |Q_n(s) - Q_n(s^*)| > \varepsilon \right\} =$$

$$= P\left\{ \omega : \| s_n - s^* \| < \delta, n \ge N(\delta);\ \lim_{n\to\infty} | Q_n(s) - Q_n(s^*) | > \varepsilon,\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\| s-s^* \|<\delta} |Q_n(s) - Q_n(s^*)| < c(\gamma) \right\} =$$

$$= P\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} |Q_n(s) - Q_n(s^*)| < c(\delta);\ \overline{\lim_{n\to\infty}} |Q_n(s) - Q_n(s^*)| > \varepsilon \right\}. \qquad (5)$$

Возьмем $\delta > 0$ такое, что $c(\delta) < \varepsilon$, тогда получим, что правая часть (5) равна нулю.

Теорема доказана.

Замечание 3. В работе [5] представлена несколько другая формулировка теоремы 2.

Из теорем 1 и 2 можем получить следующие утверждения, предложенные в [2–4] и доказанные в несколько иных формулировках в [6–9].

Теорема 3. Пусть $\{\xi_i, i \ge 1\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, которые определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$, $\xi_i \in R^m$, $m \ge 1$, функция $\{f(x,y) : J \times R^m \to R, J \subset R^p, p \ge 1\}$ — действительная измеримая функция и выполнены следующие условия:

1) множество J замкнуто в R^p;

2) для любого $c > 0$ имеем $E\left\{ \max_{x\in J,\, \|x\|_p \le c} | f(x, \xi_0) | \right\} < \infty$;

3) существует единственная точка x^* такая, что $F(x^*) = Ef(x^*, \xi_0) < Ef(x, \xi_0)$, $x \ne x^*$, $x \in J$;

4) для любого $c > 0$ функция $f(x,y)$ непрерывна по первому аргументу на множестве $\{x : \|x - x^*\|_p > \delta, x \in J\}$;

5) если J неограничена для любой последовательности $\{x_j, j \ge 1\} \subset J$ такой, что $\|x_j\|_p \to \infty$ при $j \to \infty$, функции $f(x_j, y) \to \infty$ при $j \to \infty$.

Пусть $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x, \xi_i)$ и $x_n^* = \arg\min_{x\in J} F_n(x)$. Тогда $x_n^* = x_n^*(\omega)$ можно выбрать $\Im_n$-измеримыми, $\Im_n = \sigma\{\xi_i, 1 \le i \le n\}$ и справедливо $P\{\lim_{n\to\infty} \|x_n^* - x^*\|_p = 0\} = 1$ и $P\{\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x^*)\} = 1$.

Теорема 4. Пусть $\{\xi_i, i \ge 1\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, которые определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$, $\xi_i \in R^m$, $m \ge 1$, функция $\{f(x,y) : J \times R^m \to R, J \subset R^p, p \ge 1\}$ — действительная измеримая функция, и пусть выполнены следующие условия:

1) множество J выпуклое и локально компактное на R^p;
2) функция $f(x, y)$ выпуклая по первому параметру и
- $P\{|f(x^*, \xi_0)| < \infty\} = 1$;
- существует точка $x^* \in J$ такая, что $Ef(x^*, \xi_0) < Ef(x, \xi_0), x \neq x^*$;
- $E\{\inf[f(x, \xi_0) - f(x^*, \xi_0)]^-\} < \infty$, где $g^- = |g| \chi_{g<0}$.

Тогда $P\{\lim_{n\to\infty} ||x_n - x^*||_p = 0\} = 1$ и $P\{\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x^*)\} = 1$, где величины x_n, $F_n(x)$ и $F(x)$ такие же, как в теореме 3.

Рассмотрим задачу минимизации (1) и проанализируем два типа условий, при которых решение задачи (3), (4) сходится п.н. к решению начальной задачи (1).

Теорема 5. Пусть условия 1, 2, 4, 5 теоремы 4 выполнены и существует единственная точка $(x^*, \alpha^*) \in J \times R$ такая, что $F(x^*, \alpha^*) < F(x, \alpha)$ для любой точки $(x, \alpha) \neq (x^*, \alpha^*)$, $(x, \alpha) \in J \times R$.

Тогда $P\{\lim_{n\to\infty} ||(x^*, \alpha^*) - (x_n^*, \alpha_n^*)|| = 0\} = 1$.

Если функция $F(x, \alpha)$ непрерывна в точке (x^*, α^*), то

$$P\{\lim_{n\to\infty} F_n(x_n^*, \alpha_n^*) = F(x^*, \alpha^*)\} = 1.$$

Теорема 6. Пусть имеют место следующие условия:
1) функция $f(x)$ выпуклая;
2) множество J выпуклое и локально компактное на R^p;
3) для точки минимума (x^*, α^*) функции $F(x, \alpha)$ для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$F(x^*, \alpha^*) < F(x, \alpha), \text{ если } ||(x^*, \alpha^*) - (x, \alpha)||_{p+1} \le \varepsilon, \ (x, \alpha) \neq (x^*, \alpha^*).$$

Тогда $P\left\{ \lim\limits_{n\to\infty} ||(x^*, \alpha^*) - (x_n^*, \alpha_n^*)||_{p+1} = 0 \right\} = 1.$

Если функция $F(x, \alpha)$ непрерывна в точке (x^*, α^*), то

$$P\{\lim_{n\to\infty} F_n(x_n^*, \alpha_n^*) = F(x^*, \alpha^*)\} = 1.$$

Доказательство теорем 5 и 6 проводится путем проверки условий теорем 3 и 4.

Далее рассмотрим подробнее некоторые регрессионные модели, широко используемые в моделях финансовой и страховой математики. Некоторые из них предложены в [1, 10]. Эти модели вписываются в общую схему оценивания с произвольной функцией критерия и в большинстве случаев с зависимыми наблюдениями. Можно выбирать точки как случайных наблюдений, так и не случайных.

Пусть $\{\xi_i, i \ge 1\}$ — случайный процесс с дискретным временем, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$, $\xi_i \in R^m$, $m \ge 1$, J — замкнутое подмножество в R^p, $p \ge 1$, x_i — неслучайная последовательность точек из R^l, и функция $f(x, y, z)\colon R^l \times J \times R^m \to R^+$, $R^+ = [0, \infty)$ полунепрерывна снизу по второму параметру и измерима по первому и третьему. Определим $F_n(y) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y, \xi_i)$, $y \in J$. Задача состоит в минимизации функции $F_n(y)$.

Теорема 7 [3, 4]. Пусть выполнены следующие условия:
1) для любого $y \in J$ существует точка $y^* \in J$ такая, что

$$\widetilde{F}(y) = \underline{\lim}_{n\to\infty} E[F_n(y) - F_n(y^*)] > 0;$$

2) если J неограничено, то $f(x, y, z) \to \infty$ при $||y||_p \to \infty$ при фиксированных x и z;
3) последовательность $\{\xi_i, i \ge 1\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания [11]

$$\sup_{i\ge 0} \sup_{A \in \sigma_{-\infty}^{i}, B \in \sigma_{i+j}^{\infty}} |P(AB) - P(A)P(B)| \le \frac{c}{j^{1+\varepsilon}}, \ j \ge 0, \ \varepsilon > 0, \ \sigma_l^m = \sigma\{\xi_i, l \le i \le m\};$$

4) $Ef^{2+\delta}(x_i, y, \xi_i) < \infty$ для любого $y \in J$ и $\varepsilon\delta > 2$;

5) $\lim\limits_{\gamma \to 0} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} E \sup\limits_{\| y - y' \|_p < \gamma, \| y - y^* \|_p \geq \delta} | f(x_i, y, \xi_i) - f(x_i, y', \xi_i) | = 0, \gamma > 0.$

Обозначим $y_n = \arg\min F_n(y)$. Тогда $P\{\lim_{n\to\infty} \| y - y^* \|_p = 0\} = 1$.

Рассмотрим теперь применение теоремы 7 к модели нелинейной регрессии с аддитивным шумом.

Предположим, имеется последовательность случайных величин вида $\eta_i = g(x_i, y^*) + \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots$, где функция $g(x, y): R^l \times J \to R$ измерима по первому параметру, полунепрерывна снизу по второму и ограничена на $R^l \times J$. Точка y^* — неизвестный параметр, который нужно оценить, $\{\xi_i, i \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$.

Рассмотрим следующие критерии оценивания:

$$Q_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\eta_i - g(x_i, y)]^2, \quad \widetilde{Q}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\eta_i - g(x_i, y)|,$$

$$\hat{Q}_n(y, \alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i, y) - \eta_i + \alpha_2]^+ - \alpha_2(1-\gamma) +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\eta_i - g(x_i, y) - \alpha_1]^+ - \alpha_1(1-\gamma), \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2). \tag{6}$$

Нужно оценить параметр y в первом и втором критериях и параметр (y, α) в третьем критерии.

Теорема 8. Пусть имеют место следующие условия:

1) существует точка $y^* \in J$ такая, что $\underline{\lim} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} [g(x_i, y) - g(x_i, y^*)]^2 = F(y)$, $y \neq y^*$, $y \in J$;

2) если J не компактно, то $g(x, y) \to \infty$ при $\| y \|_p \to \infty$;

3) $\lim\limits_{\gamma\to 0} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \sup\limits_{\| y - y' \|_p < \gamma, \| y - y^* \|_p > \lambda} [g(x_i, y) - g(x_i, y')]^2 = 0, \lambda > 0$;

4) $\sup\limits_{i\geq 0} \sup\limits_{A \in \sigma_{-\infty}^{i}, B \in \sigma_{i+j}^{\infty}} |P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{c}{j^{1+\varepsilon}}, j \geq 0, \varepsilon > 0, \sigma_l^m = \sigma\{\xi_i, l \leq i \leq m\}$;

5) $E|\xi_i|^{2+\delta} < \infty$, $\varepsilon\delta > 2$.

Обозначим $y_n = \arg\min_{y\in J} Q_n(y)$. Тогда $P\left\{ \lim\limits_{n\to\infty} \| y_n - y^* \|_p = 0 \right\} = 1$.

Доказательство проводится путем проверки условий теоремы 7.

Теорема 9. Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $g(x, y)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 7, и существует точка $y^* \in J$ такая, что:

- $\inf\limits_{i\geq 1} [g(x_i, y) - g(x_i, y^*)] = \lambda(y) > 0$, если $y \neq y^*$;
- $\underline{\lim} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} E[y_i - g(x_i, y)] = F(y) > 0 \ \ y \neq y^*$;
- $\lim\limits_{\gamma\to 0} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \sup\limits_{\| y - y' \|_p < \gamma, \| y - y^* \|_p > \lambda} | g(x_i, y) - g(x_i, y') | = 0, \lambda > 0$;

2) случайная последовательность $\{\xi_i, i \geq 1\}$ удовлетворяет условиям 3) и 4) предыдущей теоремы и следующим:

- $P\{\xi_i < 0\} = \frac{1}{2}$;
- $P\{\xi_i \in A_\beta\}$, $A_\beta = \begin{cases} [0, \beta), & \beta > 0, \\ [-\beta, 0), & \beta < 0. \end{cases}$

Обозначим $\widetilde{y}_n = \arg\min_{y \in J} \widetilde{Q}_n(y)$. Тогда $P\left\{ \lim\limits_{n\to\infty} \| \widetilde{y}_n - y^* \|_p = 0 \right\} = 1.$

Доказательство проводится путем проверки условий теоремы 7.

Теперь рассмотрим критерий $\hat{Q}_n(y, \alpha)$, определенный в (6). Задачи минимизации с таким критерием возникают в некоторых финансовых математических моделях, где случайные величины в функции критерия могут иметь несимметрическое распределение.

Преобразуем $\hat{Q}_n(y, \alpha)$, заданную в (6):

$$\hat{Q}_n(y,\alpha) = \underline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[g(x_i, y) - \eta_i + \alpha_2]^+ - \alpha_2(1-\gamma) +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[\eta_i - g(x_i, y) - \alpha_1]^+ - \alpha_1(1-\gamma) =$$

$$= \underline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left\{ \frac{g(x_i, y) - g(x_i, y^*) - \xi_i + \alpha_2}{2} + \frac{|g(x_i, y) - g(x_i, y^*) - \xi_i + \alpha_2|}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{g(x_i, y^*) - g(x_i, y) + \xi_i - \alpha_1}{2} + \frac{|g(x_i, y^*) - g(x_i, y) + \xi_i - \alpha_1|}{2} \right\} +$$

$$+ \alpha_1(1-\gamma) - \alpha_2(1-\gamma) =$$

$$= \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left\{ \frac{|g(x_i, y^*) - g(x_i, y) + \xi_i - \alpha_1| + |g(x_i, y) - g(x_i, y^*) - \xi_i + \alpha_2|}{2} \right\} +$$

$$+ \left(\gamma - \frac{1}{2} \right)(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Очевидно, что если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и условия теоремы 9 выполнены, то имеем $y_n = \arg\min_{y \in J} \hat{Q}_n(y, \alpha)$ — строго состоятельную оценку параметра y^*.

Пусть $P\{\xi_i < \lambda\} = \frac{1}{2}$, т.е. λ — медиана ξ_i. Тогда $E|\xi_i + a| > E|\xi_i - \lambda|$ для любого $a > 0$.

Если $(\hat{y}, \hat{\alpha})$ — единственная точка минимума для функции $\hat{Q}_n(y, \alpha)$ и все условия теоремы 9 выполнены, то последовательность $(y_n, \alpha_n) = \arg\min_{y \in J, \alpha \in R^2} \hat{Q}_n(y, \alpha)$ сходится к точке $(\hat{y}, \hat{\alpha})$ с вероятностью 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rokafellar R.T., Uryasev S.P. Optimization of conditonal value-at-risk // J. of Risk. — 2000. — N 2. — P. 21–42.
2. Knopov P.S., Kasitzkaya E.J. Properties of the empirical estimates in stochastic optimization and identification problems // Annals of Oper. Res. — 1995. — **56**. — P. 225–239.
3. Knopov P.S., Kasitzkaya E.J. Empirical estimates in stochastic optimization and identification. — N.Y.: Kluwer Academ. Publ., 2002. — 250 p.
4. Кнопов П.С. Асимптотические свойства некоторых классов M-оценок // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 4. — С. 10–27.
5. Дороговцев А.Я. Теория оценивания параметров случайных процессов. — Киев: Вища шк., 1982. — 190 с.
6. Pfanzagl J. On the measurability and consistency of minimum constraint estimates // Metrica. — 1969. — **14.** — P. 249–272.
7. Jeunrich R.J. Asymptotic properties of non-linear least squares estimates // Ann. Math. Statist. — 1969. — **40.** — P. 633–643.
8. Huber P.J. The behavior of maximum likelihood estimates under non-standard conditions // Proc. 5-th Berkley symp. on Mathematic. Statist. and Probab. 1 (Un-t of California Press: Berkley), 1967. — P. 221–234.
9. Nemirovsky A.S., Polyak B.T., Tzybakov A.B. Signal treatment by non-parametric maximum likelihood method // Inform. Transact. Probl. — 1984. — **20,** N 3. — P. 29–45.
10. Konno H. Convex structure of the constrained least square problem for estimating the forward rate sequence: Financial Engineering and the Japanese Markers. — 1997. — **4.** — P. 179–185.
11. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные случайные величины. — М.: Наука, 1965. — 524 с.

Поступила 22.10.2009