УДК 519.872

Е.В. КОБА, О.Н. ДЫШЛЮК

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЗАЯВОК СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ В СИСТЕМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Ключевые слова: *система массового обслуживания, множественная заявка, интервал пересечения, алгоритм протяжки, вероятность пересечения, системы множественного доступа.*

В теории систем обслуживания наибольшее распространение получили пуассоновские, групповые пуассоновские, рекуррентные и групповые рекуррентные потоки заявок. Эти четыре типа потоков охватывают многие модели технических и вычислительных систем. Однако в практике моделирования часто приходится сталкиваться как с потоками, так и с заявками более сложной природы, которые можно наблюдать в процессах функционирования компьютерных и беспроводных сетей, а также в спутниковых и сотовых системах связи. Например, в компьютерных и беспроводных сетях, где используется множественный доступ к среде передачи данных, как правило, одной станции не разрешается долго занимать канал передачи, заставляя тем самым ждать другие станции. В связи с этим объем информации от одной станции разбивается на некоторое количество кадров (фреймов), которые и подлежат обработке по определенным правилам. В этом случае можно говорить о заявке сложной структуры (множественной заявке). Рассмотрим еще несколько примеров, где наблюдается обслуживание множественных заявок.

Управление передачей данных в локальной вычислительной сети, состоящей из N компьютеров, осуществляется с помощью протокола TCP. Транспортный протокол TCP представляет интерфейс между приложениями и сетевыми устройствами, позволяющими приложениям запрашивать определенное качество обслуживания. В случае отклонения параметров передаваемых данных от требуемого порядка протокол TCP разделяет суммарный поток прикладных данных на отдельные логические потоки и осуществляет упорядочение пакетов данных, которые могли прийти по различным сетевым траекториям или исказиться при передаче. Поступающие данные в каждом потоке обрабатываются протоколом TCP и затем передаются на следующий уровень передачи данных [1]. Таким образом, имеется наложение N потоков, каждый их которых состоит из случайного числа заявок множественной структуры.

Производительность локальной сети во многом зависит и от работы коммутатора, позволяющего одновременно обрабатывать несколько кадров. Так, в ходе передачи сообщения оно делится на кадры, которые от компьютера поступают на порт коммутатора для обслуживания. Поскольку коммутатор имеет несколько портов, это позволяет ему обрабатывать кадры параллельно между всеми парами своих портов. Таким образом, происходит диспетчеризация обслуживания множественных заявок в процессе функционирования процессоров коммутатора.

В отличие от компьютерных сетей, где в качестве физической передачи данных применяются различные виды кабелей, в беспроводных сетях используются радиоканалы, которые образуются с помощью передатчика и приемника радиоволн. Следовательно, радиочастотные сигналы подвержены искажениям, обусловленным помехами, возникающими при одновременном поступлении двух сигналов к одной приемной станции. Внутренние помехи возникают тогда, когда внешние сигналы мешают распространению радиосигналов беспроводной сети. Приемник обнаруживает ошибки, в результате чего осуществляется повторная передача, а пользователь, возможно, замечает задержку связи. Примером могут служить две беспроводные локальные сети, работающие в одних и тех же нелицензируемых диапазонах и развернутые недалеко одна от другой. Также источниками внутренних помех могут быть мобильные телефоны, микроволновые печи и устройства стандарта Bluetooth [2].

© Е.В. Коба, О.Н. Дышлюк, 2010

Пропускная способность беспроводной сети может существенно снизиться вследствие повторных передач и возрастания в сети конкуренции за право доступа к среде. Таким образом, рассматривается вопрос о множественной заявке.

Отметим, что множественность заявок в каналах беспроводной связи может быть связана со вспомогательными операциями, необходимыми для установления связи (настройка частоты, синхронизация, проверка адресных кодов, тестовые фреймы и т.п.). При достаточно высоком уровне помех в системах беспроводной связи данные обычно имеют задержку, связанную с подтверждением приема. С увеличением объема данных растет вероятность появления ошибки при их передаче, т.е. возможна повторная передача данных. В целях исключения воздействия возможных длительных помех передача данных осуществляется с перерывом. Следовательно, снова возникает задача о множественной заявке.

Приведенные примеры показывают практическую актуальность систем массового обслуживания с множественными заявками. На основании изучения различных систем обслуживания можно сделать вывод о необходимости использования имеющихся и разработке новых методов исследования типичных систем с нетрадиционными, т.е. не пуассоновскими и не рекуррентными, потоками заявок. Частный случай подобной системы рассмотрен в [3].

Сформулируем одну из возможных постановок задачи. Имеется пуассоновский поток однородных событий — первоначальных заявок. С каждой заявкой возникает случайное множество импульсов (число импульсов и их продолжительности — произвольно связанные случайные величины). Термином «сложная заявка» будем называть случайное множество импульсов, порожденных некоторой первоначальной заявкой. Множества импульсов различных сложных заявок независимы; не зависят они и от расположения момента первоначальной заявки на прямой времени. Вследствие перекрытия сложных заявок возможны некоторые информационные потери. Ставится задача оценить вероятность пересечения этих заявок.

Отметим, что существует алгоритм статистической реализации случайного импульсного множества, порождаемого отдельной заявкой. Через характеристики этого множества (если необходимо, еще одного или двух реализованных множеств такого же вида) выражаются некоторые практически интересные случайные величины, алгоритм вычисления которых приводится.

Одним из результатов является автоматизация расчета «интервала пересечения» двух множеств (множества сдвигов, при которых имеет место пересечение).

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ДЛИНЫ «ИНТЕРВАЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ» ДВУХ МНОЖЕСТВ

Пусть заданы два числовых множества

$$U=\bigcup_{i=1}^{\nu}(a_i,b_i),\quad V=\bigcup_{k=1}^{\mu}(c_k,d_k),$$

где $0=a_1<b_1<a_2<\ldots<b_\nu$, $0=c_1<d_1<c_2<\ldots<d_\mu$, ν,μ — натуральные числа.

«Интервалом пересечения» (и.п.) множеств U и V назовем множество тех чисел τ любого знака, для которых множество U имеет хотя бы одну точку пересечения с множеством $V+\tau=\bigcup_{k=1}^{\mu}(c_k+\tau,d_k+\tau)$.

Предлагается алгоритм вычисления лебеговой меры T_{UV} «интервала пересечения». Проще говоря, если этот «интервал» состоит из нескольких непересекающихся интервалов, то T_{UV} будет их суммарной длиной, т.е.

$$\text{И. п.}=\bigcup_{i=1}^{\nu}\bigcup_{k=1}^{\mu}\bigcup_{\tau}\{\tau:(a_i,b_i)\cap(c_k+\tau,d_k+\tau)\neq\varnothing\}.$$

Рассмотрим какие-либо заданные i и k. Исследуем, для каких τ

$$(a_i,b_i)\cap(c_k+\tau,d_k+\tau)\neq\varnothing.$$

Наименьшее допустимое значение τ — такое, при котором $(c_k+\tau,d_k+\tau)$ примыкает к (a_i,b_i) слева, наибольшее — когда справа.

Соответственно $d_k+\tau=a_i$ и $c_k+\tau=b_i$.

Таким образом, τ должно входить в интервал

$$W_{ik}=(a_i-d_k, b_i-c_k).$$

Длина такого интервала для τ составляет

$$T_{ik}=(b_i-a_i)+(d_k-c_k). \tag{1}$$

Суммируя (1) по всем i и k, получаем

$$T_{UV}\le\sum_{i,k}[(b_i-a_i)+(d_k-c_k)]=\mu\sum_{i=1}^{\nu}(b_i-a_i)+\nu\sum_{k=1}^{\mu}(d_k-c_k). \tag{2}$$

Если лебегову меру множества обозначить $|\cdot|$, то (2) можно переписать следующим образом:

$$T_{UV}\le\mu|U|+\nu|V|. \tag{3}$$

Во многих случаях оценка (3) либо абсолютно точна, либо имеет малую относительную погрешность. Тем не менее, поскольку это не всегда так, приводим алгоритм точного подсчета величины T_{UV}.

Положим

$$\tau_{ik}=a_i-d_k,\ \tau'_{ik}=b_i-c_k. \tag{4}$$

Рассмотрим множество

$$S=\bigcup_{i=1}^{\nu}\bigcup_{k=1}^{\mu}\{\tau_{ik},\tau'_{ik}\}$$

и упорядочим эти числа, переобозначив их как $x_1\le x_2\le\ldots\le x_{2\nu\mu}$. (Очевидно, x_1 — это некоторое τ_{ik}, $x_{2\nu\mu}$ — некоторое τ'_{ik}). Если $x_j\in\{\tau_{ik}\}$, положим $\omega_j=1$, если $x_j\in\{\tau'_{ik}\}$, то $\omega_j=-1$. Так как $a_i<b_i, c_k<d_k$, для любого j либо $\omega_j=1$, либо $\omega_j=-1$. Тогда искомое T_{UV} можно вычислить по формуле

$$T_{UV}=\sum_{j=1}^{2\nu\mu-1}(x_{j+1}-x_j)\ \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{j}\omega_i\right), \tag{5}$$

где

$$\operatorname{sgn} a=\begin{cases}1, \text{если } a>0,\\ 0, \text{если } a=0,\\ -1, \text{если } a<0.\end{cases}$$

Объяснить (5) можно следующим образом. До момента x_j включительно началось столько интервалов (τ_{ik},τ'_{ik}), сколько единиц в ряду $\omega_1,\ldots,\omega_j$, и закончилось столько, сколько минус единиц. Следовательно, x_j принадлежит некоторому из этих интервалов тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{j}\omega_i>0$, т.е. $\operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{j}\omega_i\right)=1$. Но, значит, длину интервала (x_j, x_{j+1}) нужно включать в сумму, что и представлено в формуле (5). В противном случае функция $\operatorname{sgn}(\cdot)=0$, а «–1» в данном случае быть не может. Алгоритм обоснован.

МОДИФИКАЦИИ АЛГОРИТМА НАХОЖДЕНИЯ ДЛИНЫ «ИНТЕРВАЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ» ДВУХ МНОЖЕСТВ

1. Для краткости назовем (a_i, b_i) U-импульсами, (c_k, d_k) — V-импульсами. На практике часто нужно различать случаи, когда U-импульс начинается внутри V-импульса, т.е. $c_k+\tau<a_i<d_k+\tau$, либо наоборот, т.е. $a_i<c_k+\tau<b_i$. В первом случае меру «интервала пересечения» обозначим $T_{U/V}$, во втором — $T_{V/U}$. Вычисление обеих этих величин дается тем же алгоритмом, что и выше, только с тем изменением, что τ_{ik},τ'_{ik} нужно задавать не формулой (4), а другим способом. В первом случае, т.е. для вычисления $T_{U/V}$, имеем

$$\tau_{ik}=a_i-d_k,\ \tau'_{ik}=a_i-c_k,$$

во втором, аналогично,

$$\tau_{ik}=a_i-c_k,\ \tau'_{ik}=b_i-c_k.$$

В этом состоит изменение алгоритма.

Суммируя по i, k, имеем

$$T_{U/V} \le \sum_{i,k} (\tau'_{ik} - \tau_{ik}) = \sum_{i,k} (d_k - c_k),$$

или

$$T_{U/V} \le \nu\, |V|. \tag{6}$$

Аналогично

$$T_{V/U} \le \mu\, |U|. \tag{7}$$

Так как $T_{UV} \le T_{V/U} + T_{U/V}$, из (6) и (7) снова можем получить оценку (3).

2. Приведем алгоритм для учета «мертвого времени». Обозначим $T^{(\Delta)}_{U/V}$ меру множества таких τ, при которых хотя бы для одной пары (i, k) начало i-го U-импульса попадает либо на k-й V-импульс, либо на расстояние, меньшее Δ слева от него на оси времени.

Принимая практически наиболее интересное условие, что всегда

$$d_k + \Delta \le c_{k+1},$$

для $T^{(\Delta)}_{U/V}$ имеем тот же алгоритм, что и выше, для $T_{U/V}$, только в исходных данных необходимо заменить все c_k на $c_k - \Delta$.

Верхние оценки очевидны:

$$T^{(\Delta)}_{U/V} \le \nu\, (|V| + \mu\Delta), \qquad T^{(\Delta)}_{V/U} \le \mu\, (|U| + \nu\Delta).$$

Можно показать, что имеют место такие оценки:

$$T^{(\Delta)}_{U/V} \le T_{U/V} + \nu\mu\Delta, \qquad T^{(\Delta)}_{V/U} \le T_{V/U} + \mu\nu\Delta.$$

Они следуют из полуаддитивности функционала T,

$$T_{U/V_1 \cup V_2} \le T_{U/V_1} + T_{U/V_2},$$

которая вытекает из формулы (2).

Приведем алгоритм моделирования «интервала пересечения» для двух множеств.

Имеем два множества:

$$\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}, \quad \{(a'_1, b'_1), \ldots, (a'_m, b'_m)\},$$

а также ограничение $\{\tau \le 0\}$.

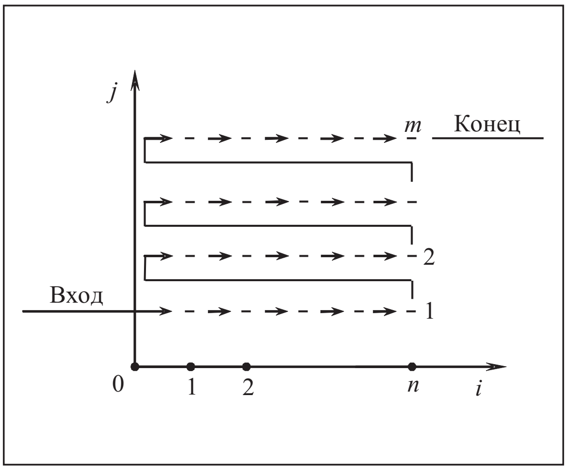

Рис. 1

Упорядочим пары (i, j), $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$, таким образом, как показано на рис. 1.

Обозначим k номер пары в этом упорядочении $(1 \le k \le nm)$, а (i_k, j_k) — координаты k-й пары. Так, для рис. 1, например, $i_1 = j_1 = 1$, $i_{n+1} = 1$, $j_{n+1} = 2$. Обозначим d_k число непересекающихся τ-интервалов по парам до k-й включительно, $(A_{k1}, B_{k1}), \ldots, (A_{k,d_k}, B_{k,d_k})$ — эти интервалы в порядке возрастания, т.е. $B_{k1} < A_{k2}$, и т.д. Тогда имеем

$$T_{UV} = \sum_{t=1}^{d_{nm}} (B_{nm,t} - A_{nm,t}).$$

Начальные данные: $d_0 = 0$; (A_{0t}, B_{0t}) не определяются (их множество пусто).

На k-м шаге $(1 \le k \le nm)$: в памяти d_{k-1}; $(A_{k-1,t}, B_{k-1,t})$, $1 \le t \le d_{k-1}$.

Поступает новый интервал (C_k, D_k), где $C_k = a_{i_k} - b'_{j_k}$, $D_k = b_{i_k} - a'_{j_k}$.

Определим подалгоритм отсечения по схеме, приведенной на рис. 2.

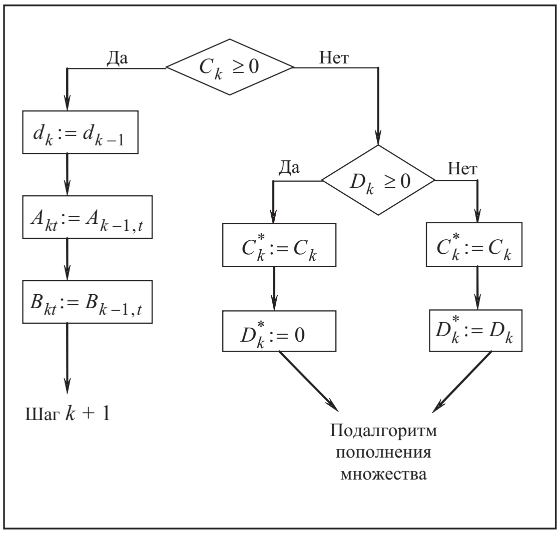

Рис. 2

Далее определим подалгоритм пополнения множества.

Обозначим

$$\sigma_{kt} = \begin{cases} 1, \text{ если } [C_k^*, D_k^*] \text{ пересекается с } [A_{k-1,t}, B_{k-1,t}], \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Для вычисления имеем формулу

$$\sigma_{kt} = \begin{cases} 0, \text{ если } D_k^* < A_{k-1,\,t};\ C_k^* > B_{k-1,t}, \\ 1 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вычисляем $\nu_k = \min\{t : \sigma_{kt} = 1\}$, $\mu_k = \max\{t : \sigma_{kt} = 1\}$ и полагаем

$$d_k = d_{k-1} + \nu_k - \mu_k;$$

$$A_{kt} = A_{k-1,t} \text{ при } 1 \le t \le \nu_k - 1;\ B_{kt} = B_{k-1,t} \text{ при } 1 \le t \le \nu_k - 1;$$

$$A_{k\nu_k} = \min(C_k^*,\ A_{k-1,\,\nu_k});\ B_{k\nu_k} = \max(D_k^*,\ B_{k-1,\,\mu_k});$$

$$A_{kt} = A_{k-1,\,t+\mu_k-\nu_k} \quad \text{при} \quad \nu_k + 1 \le t \le d_k;$$

$$B_{kt} = B_{k-1,\,t+\mu_k-\nu_k} \quad \text{при} \quad \nu_k + 1 \le t \le d_k.$$

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕКРЫТИЯ СЛОЖНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЗАЯВОК

Рассмотрим пуассоновский поток сложных заявок с параметром λ. С каждой заявкой ассоциируется случайное множество $U = \bigcup_{i=1}^{\nu} (a_i, b_i)$, где $0 = a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_\nu$, величины ν, a_i, b_i — случайные: они определяются общим элементарным событием $\omega \in \Omega$, где Ω — пространство элементарных событий. Элемент ω реализуется по мере $P(A)$ на некоторой σ-алгебре событий $\mathfrak{F}$. Будем считать, что имеется алгоритм, позволяющий находить реализации множества U. Если t — момент поступления сложной заявки, то множество U расположим на оси времени с началом в моменте t. Целью является вычисление методом Монте-Карло вероятности q перекрытия между данным и другим некоторым импульсом. Слово «перекрытие» можно понимать в любом смысле, указанном выше. Гипотетический «мешающий» импульс обозначим V. Тогда

$$q = q_{UV},\ q = q_{U/V},\ q = q_{V/U},\ q = q_{U/V}^{(\Delta)},\ q = q_{V/U}^{(\Delta)},$$

где q_{UV} — вероятность перекрытия хотя бы одного U-импульса с одним V-импульсом, $q_{U/V}$ — вероятность начала хотя бы одного U-импульса во время V-импульса, $q_{V/U}$ — наоборот, $q_{V/U}^{(\Delta)}$ и $q_{U/V}^{(\Delta)}$ — то же с учетом продления на время Δ.

Обозначим λ^* интенсивность потока забитых заявок. Тогда из теории Хинчина потоков однородных событий [4] имеем $q = \dfrac{\lambda^*}{\lambda}$.

Событие появления в интервале длины dt заявки, которая должна быть забитой, равна пересечению следующих двух событий:

1) появление в интервале $(t_0,\ t_0 + dt)$ заявки со случайным множеством U;

2) появление в интервале $(t_0 + \tau,\ t_0 + \tau + d\tau)$ заявки со случайным множеством V.

Здесь U и V независимые, причем U и $V + \tau$ пересекаются. Если U и V фиксировать, то вероятность пересечения указанных двух событий равна $\lambda dt \cdot \lambda d\tau$ при пересечении U с $V + \tau$ и равна нулю в противном случае.

Интегрируя по всем τ, получаем $\lambda^2 T_{UV}\, dt$. Усредняя по V и U (ими определяется T), выводим формулу

$$\lambda^* \le \lambda^2 MT_{UV},$$

откуда

$$q_{UV} \le \lambda MT_{UV}. \tag{8}$$

Аналогичные оценки получим и при других определениях перекрытий импульсов:

$$q_{U/V} \le \lambda MT_{U/V}, \tag{9}$$

$$q_{V/U} \le \lambda MT_{V/U}, \tag{10}$$

$$q_{U/V}^{(\Delta)} \le \lambda MT_{U/V}^{(\Delta)}, \tag{11}$$

$$q_{V/U}^{(\Delta)} \le \lambda MT_{V/U}^{(\Delta)}. \tag{12}$$

Подчеркнем, что V и U должны быть независимы, т.е. генерироваться на основании независимых элементов ω_1 и ω_2 с распределением $P(A)$.

Имея алгоритм построения случайного множества U (тот же для V) и применяя алгоритм нахождения длины «интервала пересечения» двух множеств, находим реализацию случайной величины T_{UV} или аналогичных ей. Затем путем усреднения находим состоятельную оценку T_{UV}, а по ней и формулам (8)–(12) — верхнюю оценку q_{UV}, $q_{U/V}$, $q_{V/U}$, $q_{U/V}^{(\Delta)}$, $q_{V/U}^{(\Delta)}$.

Предложенные алгоритмы статистического моделирования не относятся к очевидным, так как основаны не на расчете возможного пересечения случайных множеств, что практически маловероятно, а на определенном алгоритме «протяжки» одного множества через другое (переменный сдвиг по времени одного из них).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спортак М. Компьютерные сети и сетевые технологии. — СПб.: ООО «ДиаСофтЮП», 2005. — 720 с.
2. Столлингс В. Беспроводные линии связи и сети. — СПб.: Питер, 2003. — 640 с.
3. Коба Е.В. Система обслуживания пуассоновского потока сдвоенных заявок // Доп. НАН України. — 1995. — № 3. — С. 9–11.
4. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. — М.: РУДН, 1995. — 529 с.

Поступила 19.05.2009