УДК 519.2

Ю.А. ЗАК

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СХЕМ КОМПРОМИССА В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С РАЗМЫТЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Ключевые слова: *размытые ограничения, многокритериальная оптимизация, компромиссный критерий эффективности, функции принадлежности Fuzzy-Logic, нормализация локальных критериев, выбор из множества альтернатив.*

1. ВВЕДЕНИЕ

В решении прикладных проблем часто граничные значения некоторых экономических или технических показателей, формулируемых в качестве ограничений задачи, устанавливаются субъективно. Из некоторой области значений, в которой реально может находиться этот показатель, субъективно выбирается одно определенное значение. Часто в реальной ситуации некоторые из таким образом установленных ограничений могут быть несколько нарушены в случае, если это может привести к существенному улучшению показателя эффективности общей проблемы. Кроме того, при оценке эффективности уже полученного в результате решения задачи оптимального решения (в котором выполнена вся система ограничений) не учитывается, каким образом выполняется это ограничение (например, потребность в каком-либо виде ресурсов) — как строгое равенство либо как неравенство, т.е. существует еще некоторый запас использования этого ресурса.

Заслуживает внимания рассмотрение математических моделей, в которых для некоторых ограничений $i \in \bar{I}_1$ устанавливается определенный диапазон изменения граничных значений $[b_{1i}, b_{2i}]$, при этом если значение соответствующего показателя в полученном решении меньше или равно значению b_{1i}, то это не приводит к снижению эффективности полученного решения. Значение показателя, превышающее значение b_{2i}, неприемлемо. Допускается значение показателя в диапазоне $[b_{1i}, b_{2i}]$, но это каким-то образом снижает эффективность полученного решения общей проблемы. Эксперт, т.е. лицо, принимающее решение (ЛПР), может оценить уровень выполнения любого из ограничений подмножества $i \in \bar{I}_1$ в диапазоне $[b_{1i}, b_{2i}]$ с помощью некоторой функции потерь, рассматриваемых как дополнительные локальные критерии эффективности, которые необходимо минимизировать. Таким образом, рассматриваемые задачи могут быть сведены к задачам многокритериальной оптимизации, для решения которых используются известные методы. В отличие от традиционных задач математического программирования решение таких задач в условиях размытых («гибких») ограничений всегда субъективно и зависит от выбора схемы компромисса и предпочтений эксперта.

Развитие таких подходов при многокритериальном выборе является чрезвычайно важным для многих практических приложений и позволяет осуществить эффективный и обоснованный выбор решений в тех ситуациях, когда принятие решений при использовании прежних подходов не представлялось возможным.

2. ПОСТАНОВКА ОДНОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С РАЗМЫТЫМИ (ГИБКИМИ) ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ПОДХОДЫ К ЕЕ РЕШЕНИЮ

В дальнейшем изложении понятия «размытые» и «гибкие» ограничения являются эквивалентными.

В классических задачах математического программирования

$$\varphi_k(X^*) = \max_{X \in G} \varphi(X), \; k = 1, \ldots, R, \tag{1}$$

где в частном случае $R = 1$,

$$G = \left\{ X \mid \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \le b_i, \, i = 1, \ldots, m; \; f_i(X) \le b_i, \, i = m+1, \ldots, M; \; h_j^1 \le x_j \le h_j^2, j = 1, \ldots, N \right\}, \tag{2}$$

нарушение одного из ограничений

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = 1, \ldots, m, \text{ или } f_i(X) \le b_i, \; i = m+1, \ldots, M, \tag{3}$$

недопустимо.

В практических приложениях достаточно часто встречаются ситуации, когда граничные значения b_i некоторого подмножества из этих ограничений $\bar{I} \subseteq I$, где $I = \{1, \ldots, m, \ldots, M\}$, могут быть нарушены до некоторого значения $(b_i + d_i)$, хотя это крайне нежелательно. Впервые такая математическая постановка для задач линейного программирования была сформулирована G. Sommer (1978) [1]. В дальнейшем класс таких задач Fuzzy-программирования подробно исследовался H. Rommelfanger [2, 3], S. Orlovski (1984, 1985) [4, 5], где были предложены эффективные методы их решения.

В изложении выражения

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \mathrel{\tilde{\le}} b_i, \; \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \le b_i + d_i \text{ или } f_i(X) \mathrel{\tilde{\le}} b_i, \; f_i(X) \le b_i + d_i, \; i \in \bar{I}, \tag{4}$$

может быть нарушено граничное значение b_i, но нарушение граничного значения $(b_i + d_i)$ недопустимо.

Определим множество допустимых планов

$$Q = \left\{ X \mid \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \mathrel{\tilde{\le}} (b_i + d_i), i \in (1, \ldots, m) \cap \bar{I}; \; f_i(X) \mathrel{\tilde{\le}} (b_i + d_i), i \in (m+1, \ldots, M) \cap \bar{I}; \right.$$
$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \le b_i, i \in (1, \ldots, m) \cap (I / \bar{I}); \; f_i(X) \le b_i, i \in (m+1, \ldots, M) \cap (I / \bar{I});$$
$$\left. h_j^1 \le x_j \le h_j^2, j = 1, \ldots, N \right\}. \tag{5}$$

ЛПР может оценить уровень выполнения любого из ограничений подмножества $i \in \bar{I}$ для каждого решения (для вектора переменных задачи X или для каждой альтернативы) с помощью функции, аналогичной функции принадлежности $\mu_i(X) \in [0, 1]$, $i \in \bar{I}$, применяемой в нечеткой логике (Fuzzy-Logic) [6–8]:

$$\mu_i(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \le b_i, \\ 0 < \mu_i(X) \le 1, & \text{если } \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j > b_i, \; \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \le b_i + d_i, \; i \in \bar{I}, \\ 0, & \text{если } \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j > b_i + d_i; \end{cases} \tag{6}$$

$$\mu_i(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_i(X) \le b_i, \\ 0 < \mu_i(X) \le 1, & \text{если } f_i(X) > b_i, \; f_i(X) \le b_i + d_i, \; i \in \bar{I}. \\ 0, & \text{если } f_i(X) > b_i + d_i. \end{cases} \tag{7}$$

Рассмотрим нечеткое множество

$$\bar{A}_i = \{X, \mu_i(X) \mid X \in Q\},\ i \in \bar{I}; \tag{8}$$

$$\bar{A} = \bigcap_{i \in \bar{I}} \bar{A}_i = \bigcap_{i \in \bar{I}} \{X, \mu_i(x) \mid X \in Q\} = \{X, \mu_{\bar{A}}(X) \mid X \in Q\}. \tag{9}$$

Сформулируем рассматриваемую выше проблему (даже в случае $R = 1$), как многокритериальную задачу

$$\varphi_k(X^*) = \max_{X \in Q} \varphi(X),\ k = 1, \ldots, R, \tag{10}$$

$$\mu_i(X^*) = \max_{X \in Q} \mu_i(X),\ i \in \bar{I}. \tag{11}$$

Применяя min-оператор [6], получаем

$$\mu_{\bar{A}}(X) = \min_{i \in \bar{I}} \{\mu_i(X)\} = \min \{\mu_1(X), \mu_2(X), \ldots, \mu_l(X), \ldots, \mu_L(X)\}, \tag{12}$$

где L — число ограничений, входящих в подмножество $\bar{I}$. Тогда условие (11) может быть заменено условием

$$\mu_{\bar{A}}(X^*) = \max_{X \in Q} \mu_{\bar{A}}(X) = \min_{i \in \bar{I}} \{\mu_i(X)\} =$$

$$= \max_{X \in Q} [\min \{\mu_1(X), \mu_2(X), \ldots, \mu_l(X), \ldots, \mu_L(X)\}]. \tag{13}$$

В развитии работ (см., например, [11–13]) назовем Парето-оптимальным решением (множеством эффективных решений) некоторый вектор переменных $\hat{X} \in Q$ такой, что не существует никакого другого вектора $X \in Q$, для которого справедливы выражения

$$\varphi_k(\hat{X}) \le \varphi(X),\ k = 1, \ldots, R;\ \mu_i(\hat{X}) \le \mu_i(X),\ i \in \bar{I}. \tag{14}$$

При этом по крайней мере одно из этих выражений выполняется как строгое неравенство. M. Weber (1983) [14] назвал такое решение для случая задачи линейного программирования с одной целевой функцией Fuzzy-эффективным.

S.A. Orlovski (1985) [5] было введено понятие α-уровня для множества $\mu_{\bar{A}}(X)$, представленного в виде (12),

$$\bar{A}_\alpha = \{X \in Q \mid \mu_{\bar{A}}(X) \ge \alpha\},\ 0 < \alpha \le 1. \tag{15}$$

Решение задачи существует, если $\bar{A}_\alpha \ne \varnothing$.

Рассмотрим некоторый компромиссный критерий, например, в виде линейной свертки локальных критериев оптимальности

$$F(X) = \sum_{k=1}^{R} w_k \varphi_k(X),\ \text{где}\ w_k > 0,\ \sum_{k=1}^{R} w_k = 1. \tag{16}$$

Решение сформулированной компромиссной задачи с размытыми ограничениями может быть сформулировано как результат решения задачи

$$F_\alpha(X^*) = \max_{X \in \bar{A}_\alpha} F(X), \tag{17}$$

которое гарантирует выполнение неравенств

$$\sum_{j}^{N} a_{ij} x_j \le b_i,\ \{i = 1, \ldots, m\} \bigcap (I / \bar{I}); \tag{18}$$

$$f_i(X) \le b_i,\ \{i = m+1, \ldots, M\} \bigcap (I / \bar{I}), \tag{19}$$

$$\mu_i(X) \ge \alpha,\ i \in \bar{I}. \tag{20}$$

Найдем решения задачи (16)–(18) для различных значений $\alpha > 0$. S.A. Orlovski в [5] рассматривал методы решения задачи с размытыми ограничениями (1)–(3) только для одного частного случая, когда существует лишь одна целевая функция, которая (как и все ограничения задачи) является линейной функцией вектора переменных X. В качестве метода решения этой задачи предлагалось найти решения задачи

$$(C, \overline{X}_\alpha) = \max_{X \in \Omega(\alpha)} \sum_{j=1}^{N} c_j x_j \tag{21}$$

для различных значений параметра $\alpha > 0$, после чего эксперт (ЛПР), сравнивая различные значения критерия оптимальности $(C, \overline{X}_\alpha)$, приходит к соответствующему выводу.

Следует отметить, что в основе такого подхода лежит применение *MIN*-оператора Fuzzy-логики вида

$$\mu^1_{\overline{Q}}(X) = \min_{i \in \overline{I}} \{\mu_i(X)\}, \ \overline{\Omega}(\alpha) = \{X \in Q \mid \mu^1_{\overline{Q}}(X) \ge \alpha\}, \tag{22}$$

т.е. учет только одного «наиболее плохо» выполняемого ограничения, не учитывая при этом уровень выполнения других размытых ограничений задачи.

Применение *PRODUCT*-оператора в виде

$$\mu^2_{\overline{Q}}(X) = \prod_{i \in \overline{I}} \{\mu_i(X)\}, \ \overline{\Omega}(\alpha) = \{X \in Q \mid \mu^2_{\overline{Q}}(X) \ge \alpha\} \tag{23}$$

позволит учитывать в каждом решении не только одно «наиболее плохо» выполняемое ограничение, но и уровень выполнения остальных гибких ограничений задачи. Наряду с этими могут использоваться и другие Fuzzy-логические операторы [6–8]. Профессором H. Rommelfanger [2, 3, 8] в развитии этих методов применительно к решению однокритериальной задачи с гибкими ограничениями (задача (1)–(3) при $R = 1$) был разработан следующий алгоритм.

1. Находим

$$\varphi(Z^-) = \max_{X \in G} \varphi(X), \ \varphi(Z^+) = \max_{X \in Q} \varphi(X). \tag{24}$$

2. Введем некоторую функцию принадлежности

$$\mu_{\overline{\varphi}}[\varphi(X)] = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi(X) = \varphi(Z^-), \\ 0 < \mu < 1, & \text{если } \varphi(Z^-) < \varphi(X) < \varphi(Z^+), \\ 1, & \text{если } \varphi(X) = \varphi(Z^+), \end{cases} \tag{25}$$

вид которой определяется экспертом и может быть выбран в качестве монотонно-возрастающих или неубывающих функций (рис. 1–4), свойства которых рассматривались в работах [15, 16].

3. Оптимальное решение задачи находим следующим образом:

$$\mu_{\max}[\varphi(Z^*)] = \max_{0 < \lambda \le 1} \min \{\mu_{\overline{\varphi}}[\varphi(X)], \mu_{\overline{Q}}(X)\} =$$
$$= \max_{X \in Q} \min \{\mu_{\overline{\varphi}}[\varphi(X)]; \min_{i \in \overline{I}} \mu_i[f_i(X)]\}. \tag{26}$$

Задача (26) эквивалентна задаче математического программирования

$$\mu_{\max}[\varphi(Z^*)] = \max_{\eta, X \in Q} \eta \tag{27}$$

в условиях ограничений

$$\mu_{\overline{\varphi}}[\varphi(X)] \le \eta, \tag{28}$$

$$\mu_i[f_i(X)] \le \eta, \ i \in \overline{I}. \tag{29}$$

Если функция цели и функции ограничений задачи (1), (2) линейны, то задача (27)–(29) является задачей линейного программирования и может быть решена симплексным методом.

3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С РАЗМЫТЫМИ (ГИБКИМИ) ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматриваемый выше подход к решению задачи математического программирования с гибкими (размытыми) ограничениями даже при наличии одной функции цели не является единственным и для многих практических приложений наиболее эффективным. В ряде случаев эксперты могут иметь несколько другие представления о наиболее эффективном решении сформулированной задачи (1), где допустимое множество решений задачи Q определяется выражением (5). Наличие нескольких критериев эффективности в условиях, когда допустимо нарушение некоторого подмножества ограничений задачи в какой-то допустимой области, делает еще более актуальным развитие подходов к решению такого класса задач.

Обобщим и усложним сформулированную постановку многокритериальной задачи с размытыми ограничениями (1) , где множество Q определяется выражением (5), введением следующего дополнительного ограничения. Пусть подмножество размытых ограничений задачи $\bar{I}$ включает L ограничений. Тогда в качестве дополнительных ограничений задачи, существенно осложняющих методы ее решения, может быть следующее условие: количество ограничений, для которых значение их левой части допустимо в пределах

$$b_i \le f_i(X) \le b_i + d_i,\ b_i \le \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \le b_i + d_i,\ i \in \bar{I},$$

должно быть не больше, чем $L_1 \le L$.

Задачи многокритериального выбора с гибкими (размытыми) ограничениями, как и все задачи многокритериальной оптимизации, могут быть условно разделены на два класса:

— *MADM*-проблемы, задачи, в которых необходимо осуществить выбор наиболее эффективной из конечного числа альтернатив;

— *MODM*-проблемы, задачи векторной оптимизации, в которых количество возможных решений бесконечно или когда количество решений перебрать невозможно и необходимо найти решение некоторой задачи математического программирования.

Как для *MADM*-проблем, так и для *MODM*-проблем функции принадлежности, связанные с условиями выполнения каждого гибкого ограничения задачи, могут рассматриваться как некоторые дополнительные локальные критерии эффективности задачи. С вводом этих критериев эффективности в дальнейшем могут применяться все рассмотренные в векторной оптимизации подходы к решению задач многокритериальной оптимизации [11–13, 17–21]. Эти подходы основаны на применении различных видов сверток критериев, наилучшего приближения (в различных метриках) к оптимальным решениям по каждому из локальных критериев, на лексикографическом упорядочении критериев и применении взаимных уступок, ограничении локальных целей и др.

Наличие гибких ограничений задачи вносит некоторую специфику в методы нормализации локальных критериев различного вида, формирование разных групп одинаковых по значимости локальных критериев, в выбор весовых коэффициентов.

Рассмотрим некоторые подходы решения задач векторной оптимизации с размытыми ограничениями.

3.1. Введение обобщенной функции эффективности на основе свертки нормированных значений локальных целевых функций и функций принадлежности линейного или нелинейного вида.

Рассмотрим функции эффективности

$$E_1(X^*)=\max_{X\in Q}\left\{\sum_{k=1}^{R} w_k\overline{\varphi}_k(X)+\sum_{i\in\bar I} w_i\mu_i[f_i(X)]\right\},\tag{30}$$

$$w_k\ge 0,\ k=1,\dots,R;\ w_i\ge 0,\ i\in\bar I_1;\ \sum_{k=1}^{R} w_k+\sum_{i\in\bar I} w_i=1;\tag{31}$$

$$E_2(X^*)=\max_{X\in Q}\left\{\sum_{k=1}^{R} w_k\overline{\varphi}_k(X)+w_{R+1}\min_{i\in\bar I}(\mu_i[f_i(X)])\right\},\tag{32}$$

при этом на весовые коэффициенты накладываются следующие условия:

$$w_k\ge 0,\ k=1,\dots,R;\ w_{R+1}>0;\ \sum_{k=1}^{R+1} w_k=1.\tag{33}$$

Если методы нормировки локальных целевых функций выбраны таким образом, что максимальные значения этих критериев при решении соответствующих оптимизационных задач по каждому из локальных критериев (т.е. задач $\varphi_k(X^*)=\max_{X\in Q}\varphi_k(X)$, $k=1,\dots,R$) суть значения $\overline{\varphi}_k(X^*)=1$, то могут быть использованы также следующие виды нелинейных обобщенных функций эффективности:

$$E_3(X^*)=\max_{X\in Q}\left\{\sum_{k=1}^{R} w_k[1-\overline{\varphi}_k(X)]^2+\sum_{i\in\bar I} w_i[1-\mu_i[f_i(X)]]^2\right\}\tag{34}$$

(весовые коэффициенты могут выбираться в соответствии с условиями (31)),

$$E_4(X^*)=\max_{X\in Q}\left\{\sum_{k=1}^{R} w_k[1-\overline{\varphi}_k(X)]^2+w_{R+1}[1-\min_{i\in\bar I}(\mu_i[f_i(X)])]^2\right\}\tag{35}$$

(при выборе весовых коэффициентов в соответствии с условиями (33)),

$$E_5(X^*)=\max_{X\in Q}\left\{\max_{k=1,\dots,R}(w_k[1-\overline{\varphi}_k(X)]);\ \min_{i\in\bar I} w_i\mu_i[f_i(X)]\right\},\tag{36}$$

$$E_6(X^*)=\max_{X\in Q}\left\{\max_{k=1,\dots,R}(w_k[1-\overline{\varphi}_k(X)]);\ w_{R+1}\min_{i\in\bar I}(\mu_i[f_i(X)])\right\}\tag{37}$$

(при выборе весовых коэффициентов в соответствии с условиями (31)).

Кроме приведенных выше функций, могут использоваться другие виды нелинейных сверток критериев и функций принадлежности гибких ограничений, а также функции их отклонений от соответствующих оптимальных значений, рассмотренные в работе автора [13]. Кроме того, в настоящее время находят широкое применение некоторые линейные комбинации различного вида сверток критериев

$$E(X)=\sum_{p=1}^{P}\beta_p E_p(X),\ \text{где}\ \beta_p>0,\ \sum_{p=1}^{P}\beta_p=1.$$

Так, в качестве примеров сверток таких видов могут рассматриваться

$$E(X)=\beta_1\left\{\sum_{k=1}^{R} w_k\overline{\varphi}_k(X)+w_{R+1}\min_{i\in\bar I}(\mu_i[f_i(X)])\right\}+\beta_2\left\{\max_{1\le k\le R}(w_k[1-\overline{\varphi}_k(X)])\right\}.$$

3.2. Лексикографическое упорядочение по степени важности локальных целевых функций и степени выполнения отдельных гибких ограничений и методы взаимных уступок. Основное отличие методов этой группы от используемых в алгоритмах векторной оптимизации состоит в том, что в подмножество дополнительных ограничений на каждом уровне иерархии входят не только локальные критерии оптимальности, но и функции принадлежности соответствующих гибких ограничений. В частном случае такое подмножество может включать только один локальный критерий или функцию принадлежности только одного гибкого ограничения.

Обозначим $\bar{J}_1 \succ \bar{J}_2 \succ \ldots \succ \bar{J}_t \succ \ldots \succ \bar{J}_T$ установленную экспертом некоторую иерархию степени важности локальных критериев и функций принадлежности гибких ограничений. В каждое подмножество $\bar{J}_t$ входят некоторые индексы локальных критериев оптимальности и функций принадлежности определенных гибких ограничений $\bar{J}_t = \{k_t^1, k_t^2, \ldots, k_t^{V_t}, i_t^1, i_t^2, \ldots, i_t^{U_t}\}$. При этом выполняются условия

$$\bigcap_{t=1}^{T} \bar{J}_t = \varnothing, \ \bigcup_{t=1}^{T} \bar{J}_t = \{1, \ldots, R\} \bigcap \bar{I}. \tag{38}$$

Решение задачи разбивается на T этапов. На первом этапе решается следующая задача максимизации обобщенной функции полезности, включающей локальные критерии оптимальности и функции принадлежности гибких ограничений, которые входят в первую приоритетную группу,

$$\Phi_1 \{E_p (X_1^* | \bar{J}_1)\} = \max_{X \in Q} \Phi_1 \{E_p (X | \bar{J}_1)\}. \tag{39}$$

В качестве обобщенной функции полезности может использоваться любая из сверток критериев (30)–(37), включающих нормированные значения локальных целевых функций и функции принадлежности гибких ограничений, которые входят в первую приоритетную группу. В качестве примера рассмотрим линейные свертки для t-й по степени иерархии группы вида

$$E_1 (X | \bar{J}_t) = \sum_{k \in \bar{J}_t} w_k \bar{\varphi}_k (X) + \sum_{i \in (\bar{I} \bigcap \bar{J}_t)} w_i \mu_i [f_i (X)],$$

$$w_k \geq 0, \ k \in \bar{J}_t, \ w_i \geq 0, \ i \in \bar{I}_1 \cap \bar{J}_t, \ \sum_{k \in \bar{J}_t} w_k + \sum_{i \in (\bar{I} \bigcap \bar{J}_t)} w_i = 1$$

или

$$E_2 (X | \bar{J}_t) = \sum_{k \in \bar{J}_t} w_k \bar{\varphi}_k (X) + \omega \min_{i \in (\bar{I} \bigcap \bar{J}_t)} (\mu_i [f_i (X)]),$$

$$w_k \geq 0, \ k \in \bar{J}_t, \ \omega > 0, \ \sum_{k \in \bar{J}_t} w_k + \omega = 1.$$

Пусть в результате решения задачи на первом этапе решения получены вектор оптимального значения переменных X_1^* и соответствующее ему значение обобщенной функции полезности нормированных значений локальных критериев и функций принадлежности гибких ограничений, входящих в первую приоритетную группу $\Phi_1 \{E_p (X_1^* | \bar{J}_1)\}$.

На втором этапе решения формулируется и решается задача оптимизации вида

$$\Phi_2 \{E_p (X_2^* | \bar{J}_2)\} = \max_{X \in Q} \Phi_2 \{E_p (X | \bar{J}_2)\} \tag{40}$$

в условиях дополнительных ограничений на значение обобщенной функции полезности первой приоритетной группы вида

$$\Phi_1 \{E_p (X | \bar{J}_1, \gamma_1)\} \geq \gamma_1 \Phi_1 \{E_p (X_1^* | \bar{J}_1)\}, \tag{41}$$

где $0 < \gamma_1 \leq 1$ — величина «уступки», допускающей ухудшение значения обобщенной функции полезности первой приоритетной группы по сравнению с ее оптимальным значением. При $\gamma_1 = 1$ такое ухудшение не допускается, и метод последовательных уступок вырождается в метод лексикографического упорядочения групп критериев и гибких ограничений.

Пусть выполнены t этапов решения и получены значения в соответствующих оптимальных решениях на каждом этапе $(X_\xi^* \mid \bar{J}_1, \gamma_1; \bar{J}_2, \gamma_2; \ldots; \bar{J}_{\xi-1}, \gamma_{\xi-1})$. Кроме того, определены соответствующие им условные оптимальные значения обобщенных функций полезности нормированных значений локальных критериев и функций принадлежности гибких ограничений, входящих в предыдущие приоритетные группы, $\Phi_\xi [F_p (X_\xi^* \mid \bar{J}_1, \gamma_1; \bar{J}_2, \gamma_2; \ldots; \bar{J}_{\xi-1}, \gamma_{\xi-1})]$, $\xi = 1, \ldots, t-1$. Эти значения зависят от состава более приоритетных групп, обобщенных функций полезности и коэффициентов уступок γ_ξ, выбранных на предыдущих этапах. Тогда на $(t+1)$-м этапе решения рассматривается и решается оптимизационная задача

$$\Phi_{(t+1)} \{E_p (X_{(t+1)}^* \mid \bar{J}_{(t+1)})\} = \max_{X \in Q} \Phi_{(t+1)} \{E_{(t+1)} (X \mid \bar{J}_{(t+1)})\} \qquad (42)$$

в условиях системы следующих дополнительных ограничений:

$$\Phi_\xi [F_p (X \mid \bar{J}_1, \gamma_1; \bar{J}_2, \gamma_2; \ldots; \bar{J}_{\xi-1}, \gamma_{\xi-1})] \geq$$
$$\geq \gamma_\xi \Phi_\xi [F_p (X_\xi^* \mid \bar{J}_1, \gamma_1; \bar{J}_2, \gamma_2; \ldots; \bar{J}_{\xi-1}, \gamma_{\xi-1})], \ \xi = 1, \ldots, (t-1). \qquad (43)$$

Заметим, что на каждом этапе решения могут использоваться различные виды обобщенных функций полезности. Выбор величин уступок γ_ξ, которые могут быть различны для отдельных приоритетных групп, как и значения весовых коэффициентов в обобщенном показателе эффективности каждой приоритетной группы проводится экспертом.

На каждом этапе вычисления множество допустимых решений задачи постоянно сужается и в конечном счете стягивается в точку. Это может произойти на каком-то промежуточном t-м этапе решения. Процесс решения прекращается, когда на некотором t-м этапе решения получим

$$(X_t^* \mid \bar{J}_1, \gamma_1; \bar{J}_2, \gamma_2; \ldots; \bar{J}_{t-1}, \gamma_{t-1}) = (X_{\xi-1}^* \mid \bar{J}_1, \gamma_1; \bar{J}_2, \gamma_2; \ldots; \bar{J}_{t-2}, \gamma_{t-2}). \qquad (44)$$

3.3. Методы достижения установленных целей. Известные методы Coal Programming (см., например, [17]) могут быть модернизированы для решения задач многокритериальной оптимизации в условиях наличия размытых ограничений. Предполагается, что ЛПР имеют четкое представление о желаемых значениях каждого из локальных критериев, и могут быть установлены некоторые значения θ_k, $k = 1, \ldots, R$, называемые пороговыми значениями локальных целевых функций в компромиссном решении. В этих условиях могут быть сформулированы следующие задачи получения компромиссного решения с дополнительными ограничениями:

$$E_7 (X^*) = \max_{X \in \Omega} \min_{i \in \bar{I}} \{\mu_i [f_i (X)]\} \text{ или } E_7 (X^*) = \max_{X \in \Omega} \min_{i \in \bar{I}} \{w_i \mu_i [f_i (X)]\}, \quad (45)$$

$$E_8 (X^*) = \max_{X \in \Omega} \prod_{i \in \bar{I}} \mu_i [f_i (X)] \text{ или } E_8 (X^*) = \max_{X \in \Omega} \prod_{i \in \bar{I}} w_i \mu_i [f_i (X)]. \quad (46)$$

Здесь $w_i \geq 0$, $i \in \bar{I}$, — весовые коэффициенты,

$$\Omega = \{X \in Q \mid \overline{\varphi}_k (X) \geq \theta_k, k = 1, \ldots, R\}. \qquad (47)$$

Значения θ_k могут выбираться ЛПР на основе информации о локальных оптимальных значениях, полученных по каждому критерию оптимальности, из содержательной постановки задачи, а также на основе представления эксперта о некотором идеальном значении вектора целевых функций $Z^* = (z_1^*, \ldots, z_k^*, \ldots, z_R^*)$.

Заслуживают внимания другие постановки задач

$$E_9(X^*) = \max_{X \in \Omega_l} \overline{\varphi}_l(X), \tag{48}$$

где множество допустимых решений Ω_l может выбираться одним из следующих способов:

$$\Omega_l = \left\{ X \in Q \,|\, \overline{\varphi}_k(X) \ge \theta_k,\ k = 1, \ldots, R,\ k \ne l;\ \min_{i \in \bar{I}} \mu_i[f_i(X)] \ge \eta \right\}, \tag{49}$$

$$\Omega_l = \left\{ X \in Q \,|\, \overline{\varphi}_k(X) \ge \theta_k,\ k = 1, \ldots, R,\ k \ne l;\ \prod_{i \in \bar{I}} \mu_i[f_i(X)] \ge \rho \right\}, \tag{50}$$

$$\Omega_l = \{ X \in Q \,|\, \overline{\varphi}_k(X) \ge \theta_k,\ k = 1, \ldots, R,\ k \ne l;\ \mu_i[f_i(X)] \ge \eta_i,\ i \in \bar{I} \}, \tag{51}$$

а также

$$E_{10}(X^*) = \max_{X \in \Psi_j} \mu_j[f_j(X)], \tag{52}$$

где

$$\Psi_j = \{ X \in Q \,|\, \overline{\varphi}_k(X) \ge \theta_k,\ k = 1, \ldots, R,\ \mu_i[f_i(X)] \ge \eta_i,\ i \in (\bar{I} / j) \}. \tag{53}$$

При неправильном выборе пороговых значений θ_k $(k = 1, \ldots, R)$, η, ρ или η_i $(i \in \bar{I}_1)$ задачи (45), (47) или (46), (47) и соответственно (48) при выборе множеств Ω_l согласно выражениям (49), (50) или (51), как и задачи (52), (53), могут оказаться несовместными, и эксперт должен корректировать числа этих пороговых значений в сторону уменьшения.

4. ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАЗМЫТЫХ (ГИБКИХ) ОГРАНИЧЕНИЙ

Рассмотрим функции принадлежности, определяющие уровень выполнения размытых ограничений.

— Линейная функция (рис. 1)

$$\mu_i(f_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_i \le b_i, \\ 1 - \dfrac{f_i - b_i}{d_i}, & \text{если } b_i < f_i \le (b_i + d_i), \\ 0, & \text{если } f_i > (b_i + d_i). \end{cases} \tag{54}$$

— Функция экспоненциального вида (рис. 2)

$$\mu_i(f_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_i \le b_i, \\ \alpha\left[1 - \exp\left\{\dfrac{\beta(f_i - b_i - d_i)}{d_i}\right\}\right], & \text{если } b_i < f_i \le (b_i + d_i), \\ 0, & \text{если } f_i > (b_i + d_i), \end{cases} \tag{55}$$

где $\alpha > 1$, $\beta > 0$.

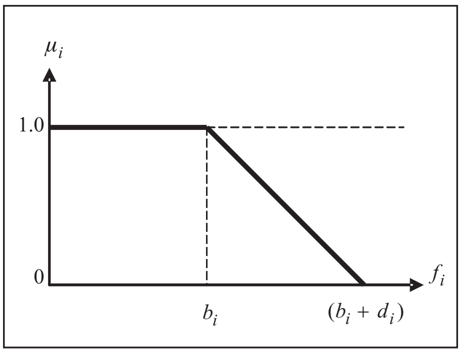

Рис. 1. Функция принадлежности линейного вида

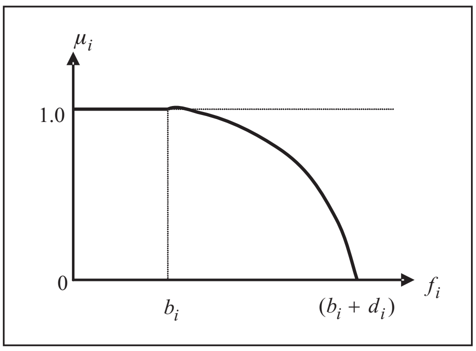

Рис. 2. Функция принадлежности экспоненциального вида

— Сплайн-функция (рис. 3)

$$\mu_i(f_i)=\begin{cases}1, & \text{если } f_i\le b_i,\\ \mu_k(g_k)+\dfrac{[f_i-g_k][\mu_{k+1}(g_{k+1})-\mu_k(g_k)]}{g_{k+1}-g_k}, & \text{если } b_i<f_i\le(b_i+d_i),\\ & g_k<f_i\le g_{k+1},\ k=1,\dots,K-1,\\ 0, & \text{если } f_i>(b_i+d_i),\end{cases}\qquad(56)$$

где K — количество сплайнов.

Введем в рассмотрение функции принадлежности для подмножества ограничений $i\in\bar{I}$, вид которых может быть представлен, например, на рис. 1–4, а значения вычисляться по формулам (54)–(56). Могут также использоваться функции принадлежности вида

$$\mu_i(f_i)=\begin{cases}1, & \text{если } f_i\le b_i,\\ \mu_i^k, & \text{если } b_i^{k-1}<f_i\le b_i^k,\ k=1,\dots,K,\\ 0, & \text{если } f_i>(b_i+d_i).\end{cases}\qquad(57)$$

Здесь и далее $b_i^0=b_i$, $b_i^K=(b_i+d_i)$, K — количество участков, в диапазоне которых значения функций принадлежности имеют определенное постоянное значение. Вид кусочно-постоянной функции принадлежности, вычисляемой по формулам (57), представлен на рис. 5.

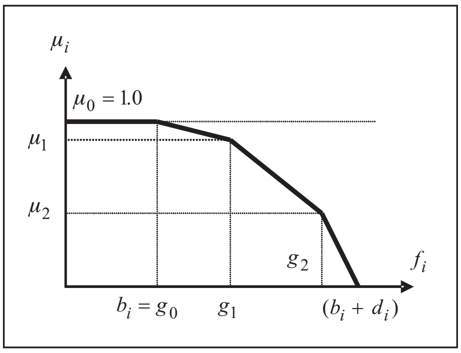

Рис. 3. Функция принадлежности для случая двух сплайнов

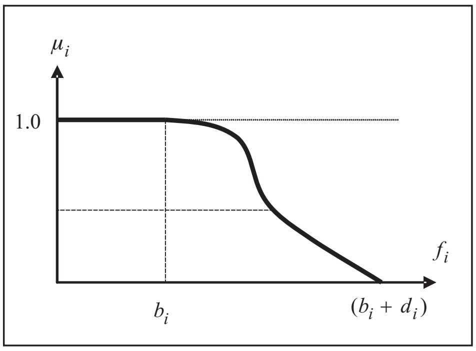

Рис. 4. Функция принадлежности S-образного вида

Кусочно-линейная сплайн-функция принадлежности характерна тем, что при переходе к каждому следующему линейному участку изменения происходит разрыв значения, т.е. значение ее падает на некоторую определенную величину. Функция представлена следующим выражением (рис. 6):

$$\mu_i(f_i)=\begin{cases}1, & \text{если } f_i\le b_i,\\ \mu_i^{k+1}+\dfrac{(b_i^{k+1}-b_i^k)(b_i^{k+1}-f_i)}{(\mu_i^k-\mu_i^{k+1})}, & \text{если } b_i<f_i\le(b_i+d_i),\ g_k<f_i\le g_{k+1},\\ & k=1,\dots,K,\\ 0, & \text{если } f_i>(b_i+d_i).\end{cases}\qquad(58)$$

На рис. 7, 8 представлена разрывная функция принадлежности общего вида, состоящая из отельных линейных и различного вида нелинейных сплайнов, а также участков, в пределах которых значения функции принадлежности являются постоянным. Функция характерна тем, что при переходе к следующему участку ее значение принадлежности может иметь разрыв и скачкообразно падать:

$$\mu_i(f_i)=\begin{cases}1, & \text{если } f_i\le b_i,\\ \mu_i^{k+1}\le\psi(f_i)\le\mu_i^k \text{ или } \mu_i^k, & \text{если } b_i^k<f_i\le b_i^{k+1},\\ & b_i<f_i\le(b_i+d_i),\ k=1,\dots,K,\\ 0, & \text{если } f_i>(b_i+d_i).\end{cases}\qquad(59)$$

Как следует из рис. 6–8 и формул (57)–(59), значения функций принадлежности в точках разрыва многозначны.

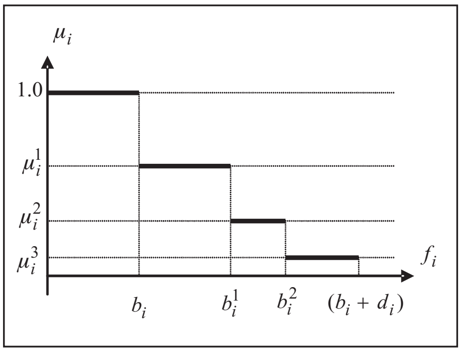

Рис. 5. Кусочно-постоянная функция принадлежности ограничений задачи (57)

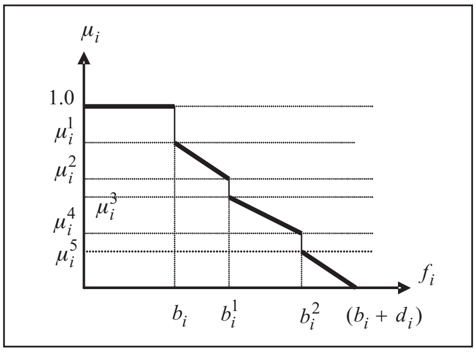

Рис. 6. Разрывная линейная сплайн-функция принадлежности ограничений задачи (58)

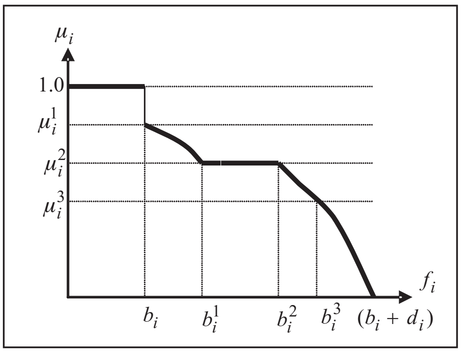

Рис. 7. Разрывная сплайн-функция принадлежности ограничений задачи общего вида (57)

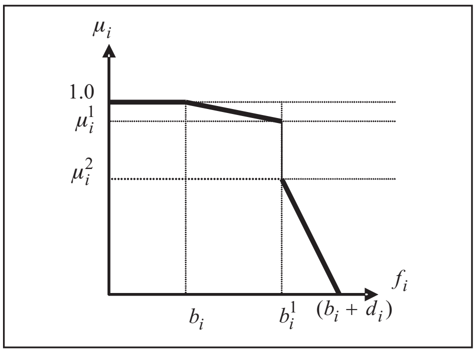

Рис. 8. Разрывная сплайн-функция принадлежности ограничений задачи общего вида (59)

Введение функций принадлежности разрывного вида целесообразно в том случае, если изменение значений правых частей ограничений в определенном диапазоне либо не имеет для ЛПР какого-то значения, либо влияет на эффективность принимаемого решения несколько меньше, чем при нарушении границ этого диапазона.

На основании функций принадлежности, изображенных на рис. 1–4, а также на рис. 5–8, результат выполнения любого из ограничений подмножества $i \in \bar{I}$ определяется в диапазоне значений $0 \le \mu_i[f_i(X \mid A_l)] \le 1.0$, причем если $f_i(X \mid A_l) \le b_i$, то $\mu_i[f_i(X \mid A_l)] = 1.0$. Чем ближе значение $f_i(X \mid A_l)$ к значению $(b_i + d_i)$, тем ближе значение $\mu_i[f_i(X \mid A_l)]$ к нулю.

В ряде случаев эффективность принимаемого решения зависит также от того, насколько строго (т.е. близко к граничным значениям) выполняются некоторые ресурсные ограничения. При выборе эффективного решения следует не полностью использовать ресурсы определенного вида, а иметь некоторый резерв для применения их в других целях. Подмножество таких ограничений $i \in \bar{I}_2$ может относиться как к подмножеству размытых ограничений $\bar{I}_2 \subset \bar{I}_1$, так и к подмножеству жестких ограничений $\bar{I}_2 \subset I / \bar{I}_1$. Если $\bar{I}_2 \subset \bar{I}_1$, то эффективность выполнения этих ограничений оценивается с помощью функций вида

$$\bar{\mu}_i(X) = \begin{cases} 0 \le \mu_i^1(X) \le \delta, & \text{если } f_i(X) < b_i, \\ 0, & \text{если } f_i(X) = b_i, \\ -1.0 \le \mu_i^1(X) \le 0, & \text{если } b_i < f_i(X) \le d_i, \\ -\infty, & \text{если } f_i(X) = d_i, \end{cases}$$

при $\bar{I}_2 \subset I / \bar{I}_1$ — с помощью функций вида

$$\bar{\mu}_i(X) = \begin{cases} 0 \le \mu_i^1(X) \le \delta, & \text{если } f_i(X) \le b_i, \\ -\infty, & \text{если } f_i(X) > b_i. \end{cases}$$

Здесь $0 < \delta \le 1.0$ — некоторое значение, а в качестве функций $\mu_i^1(X)$ и функций $\{-\mu_i^2(X)\}$ может быть использована любая из функций принадлежности (54)–(59), рассмотренных выше. В этом случае компромиссный критерий эффективности принимаемого решения может быть представлен, например, в виде линейной свертки локальных критериев и функций принадлежности выполнения локальных ограничений (30). Могут быть использованы также другие нелинейные свертки.

5. ЗАДАЧИ *MADM* С ГИБКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрим методы решения задачи (1)–(4) в условиях, когда выбор необходимо осуществить из конечного числа A_l, $l = 1, \ldots, L$, альтернатив. Для каждой альтернативы определены значения всех функций $f_i(X \mid A_l)$ как для $i \in \bar{I}$, так и для $i \in \hat{I} = I / \bar{I}$, где $\hat{I} \cup \bar{I} = I$, $\hat{I} \cap \bar{I} = \varnothing$, а также значения всех локальных критериев эффективности $\varphi_k(X \mid A_l)$, $k = 1, \ldots R$, $l = 1, \ldots, L$. Под ограничениями функции $f_i(X \mid A_l) \le v_i$, где $v_i = b_i$ или $v_i \le b_i + d_i$, для простоты изложения в данном случае подразумеваются как линейные, так и нелинейные функции ограничений задачи. Если общее число гибких ограничений задачи, составляющих подмножество $\bar{I}$, равно P, то в качестве дополнительного ограничения может рассматриваться условие, когда суммарное количество гибких ограничений, левая часть которых может превышать значение b_i, не должно превышать числа $P_1 \le P$.

5.1. Введение комплексного критерия эффективности.

1. Среди всего множества рассматриваемых альтернатив $l = 1, \ldots, L$ представим только такие $l = 1, \ldots, L_1 \le L$, которые удовлетворяют всем обязательным ограничениям задачи

$$f_i(X \mid A_l) \le b_i,\ i \in \hat{I},\ f_i(X \mid A_l) \le b_i + d_i,\ i \in \bar{I},\ f_i(X \mid A_l) > b_i, \\ i = 1, \ldots, \delta \le P_1. \tag{60}$$

Обозначим $\overline{\Lambda}$ подмножество допустимых и рассматриваемых в дальнейшем альтернатив.

2. Среди подмножества допустимых альтернатив определим

$$\varphi_k^+(X \mid A) = \max_{1 \le l \le L_1,\, l \in \overline{\Lambda}} \varphi_k(X \mid A_l), \\ \varphi_k^-(X \mid A) = \min_{1 \le l \le L_1,\, l \in \overline{\Lambda}} \varphi_k(X \mid A_l),\ k = 1, \ldots, R. \tag{61}$$

3. Выполним нормировку локальных критериев оптимальности каждой допустимой альтернативы, например, в соответствии с выражениями

$$\overline{\varphi}_k(X \mid A_l) = \frac{\varphi_k(X \mid A_l) - \varphi_k^-(X \mid A)}{\varphi_k^+(X \mid A) - \varphi_k^-(X \mid A)},\ l \in \overline{\Lambda},\ k = 1, \ldots, R. \tag{62}$$

При таком виде нормировки значения $\overline{\varphi}_k(X \mid A_l)$ для всех альтернатив находятся в пределах $0 \le \overline{\varphi}_k(X \mid A_l) \le 1.0$.

4. Выберем вид и параметры функций принадлежности для каждого гибкого ограничения задачи. В соответствии со значением левых частей ограничений по формулам (54)–(59) вычислим значения соответствующих функций принадлежности $\mu_i[f_i(X)]$, $i \in \bar{I}$.

5. Нормированные значения локальных критериев оптимальности и функций принадлежности гибких ограничений для всех допустимых альтернатив (подмножества допустимых альтернатив $\overline{\Lambda}$) можно свести в таблицу.

6. Проведем предварительный отсев неперспективных альтернатив на основе следующего правила предпочтения.

Правило доминирования 1. Если для двух альтернатив A_l и A_q справедливы условия

$$\overline{\varphi}_k(X \mid A_l) \ge \overline{\varphi}_k(X \mid A_q),\ k=1,\dots,R;\ \mu_i[f_i(X \mid A_l)] \ge \mu_i[f_i(X \mid A_q)],\ i \in \bar{I}, \quad (63)$$

и хотя бы для одного индекса k_1 локальных критериев или одного из индексов гибких ограничений i_1 выражение (63) выполняется как строгое неравенство

$$\overline{\varphi}_{k_1}(X \mid A_l) > \overline{\varphi}_{k_1}(X \mid A_q) \text{ или } \mu_{i_1}[f_i(X \mid A_l)] \ge \mu_{i_1}[f_i(X \mid A_q)], \quad (64)$$

то $A_l \succ A_q$, т.е. альтернатива A_l доминирует над альтернативой A_q и поэтому A_q может быть отброшена как неперспективная.

Оставшееся после исключения из рассмотрения подмножество альтернатив $\widetilde{\Lambda} \subseteq \overline{\Lambda}$ составляет множество Парето. Среди этого подмножества альтернатив проводится в дальнейшем поиск наиболее эффективной альтернативы.

Правило доминирования 2. Если найдется некоторая альтернатива A_λ, для которой выполняются условия

$$\overline{\varphi}_k(X \mid A_\lambda) \ge \overline{\varphi}_k(X \mid A_l),\ l \in \overline{\Lambda},\ \lambda \in \overline{\Lambda},\ k=1,\dots,R; \quad (65)$$

$$\mu_{i_1}[f_i(X \mid A_\lambda)] \ge \mu_{i_1}[f_i(X \mid A_l)],\ l \in \overline{\Lambda},\ \lambda \in \overline{\Lambda},\ i \in \bar{I}, \quad (66)$$

и для каждой пары индексов l и λ хотя бы для одного индекса $k=1,\dots,R$ или хотя бы для одного индекса $i \in \bar{I}$ одно из неравенств (65) или (66) выполняется как строгое неравенство, то альтернатива A_λ является наиболее эффективной.

7. Эксперт на основе анализа условий и предпочтений конкретной прикладной задачи осуществляет выбор комплексного критерия эффективности $E_1(X \mid A_l)$–$E_6(X \mid A_l)$ (выражения (30), (32), (34)–(37)) и соответствующих значений весовых коэффициентов, удовлетворяющих условиям нормировки (31) или (33).

8. Для каждой альтернативы вычисляется значение выбранного компромиссного критерия эффективности. В качестве наиболее эффективной альтернативы выбирается такая, для которой значение компромиссного критерия эффективности достигает максимальной величины

$$E_p(X \mid A_\lambda) = \max_{l \in \widetilde{\Lambda}} E_p(X \mid A_l). \quad (67)$$

5.2. Лексикографическое упорядочение частных показателей эффективности компромиссного решения и введение последовательных уступок. Экспертом устанавливается некоторая иерархия степени важности локальных критериев и функций принадлежности гибких ограничений. Каждая такая группа одного уровня иерархии $\bar{J}_t$ может иметь индексы только отдельных гибких ограничений либо индексы только локальных целевых функций, либо индексы как локальных критериев, так и гибких ограничений. В частном случае такая группа может иметь только один индекс какой-либо из этих групп. В качестве примеров могут быть рассмотрены следующие ситуации.

1. Представим две группы иерархии $\bar{J}_1 \succ \bar{J}_2$.

1°. В группу $\bar{J}_1$ входят функции принадлежности гибких ограничений задачи, комплексный критерий эффективности для локальных показателей этой группы выражается в виде

$$E_1(X \mid A, \bar{J}_1) = \sum_{i \in \bar{I}} w_i \mu_i[f_i(X \mid A, \bar{J}_1)], \quad (68)$$

где $w_i \ge 0$, $i \in \bar{I}$, — весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям нормировки $\sum_{i \in \bar{I}} w_i = 1$, либо в виде

$$E_2(X \mid A, \bar{J}_1) = \min_{i \in \bar{I}} \mu_i[f_i(X \mid A, \bar{J}_1)], \quad (69)$$

либо выражаться некоторой средневзвешенной комбинацией этих комплексных показателей

$$E_3(X \mid A, \bar{J}_1) = \alpha_1 E_1(X \mid A, \bar{J}_1) + \alpha_2 E_2(X \mid A, \bar{J}_1). \qquad (70)$$

2°. В группу $\bar{J}_2$ входят нормированные значения локальных целевых функций, и комплексный критерий эффективности для локальных показателей этой группы выражается в виде

$$E_1(X \mid A, \bar{J}_2) = \sum_{k=1}^{R} w_k \bar{\varphi}_k (X \mid A, \bar{J}_2), \qquad (71)$$

$$E_2(X \mid A, \bar{J}_2) = \sum_{k=1}^{R} w_k [1 - \bar{\varphi}_k (X \mid A, \bar{J}_2)]^2, \qquad (72)$$

$$E_3(X \mid A, \bar{J}_2) = \min_{1 \le k \le R} \{ w_k \bar{\varphi}_k (X \mid A, \bar{J}_2) \}, \qquad (73)$$

где весовые коэффициенты удовлетворяют условиям нормировки, аналогичным условиям для показателя эффективности (68).

Представляют практический интерес также случаи, когда локальные целевые функции относятся к первой по степени важности группе показателей, а индексы гибких ограничений — ко второй.

Первые шесть шагов решения задачи в этом случае полностью совпадают с алгоритмом, описанном в разд. 5.1. В дальнейшем решение будет проводиться двумя этапами.

На первом этапе решения задачи среди подмножества перспективных альтернатив $\tilde{\Lambda} \subseteq \bar{\Lambda}$ выбирается такая, которая обеспечивает максимальное значение комплексному показателю эффективности критериев наиболее высокой иерархической группы. Пусть это будет альтернатива A_λ^1, и значение комплексного показателя эффективности для нее равно $E_{1p}(X \mid A_\lambda^1, \bar{J}_1)$. Здесь индекс p определяет вид выбранного критерия эффективности.

Зададим некоторую величину уступки по комплексному критерию эффективности показателей первой группы $0 < \gamma_1 \le 1$. Среди подмножества альтернатив $\tilde{\Lambda}$ в качестве перспективного подмножества $l \in \tilde{\Lambda}_1$, где $\tilde{\Lambda}_1 \subseteq \tilde{\Lambda}$, оставляем только те альтернативы, для которых

$$E_{1p}(X \mid A_l, \bar{J}_1) \ge \gamma_1 E_{1p}(X \mid A_\lambda^1, \bar{J}_1). \qquad (74)$$

Среди подмножества альтернатив $l \in \tilde{\Lambda}_1$ на основе правил доминирования 1 и 2, которые в этом случае используют только одну из групп показателей (так как показатели, входящие в первую приоритетную группу на этом этапе не рассматриваются), можно исключить неперспективные для дальнейшего рассмотрения альтернативы. Оставшееся для дальнейшего анализа подмножество альтернатив обозначим $l \in \tilde{\Lambda}_1^1 \subseteq \tilde{\Lambda}_1$.

Среди подмножества альтернатив $l \in \tilde{\Lambda}_1^1$ находим такую, которая обеспечивает максимальное значение комплексному показателю эффективности критериев следующей по уровню иерархии группы A_λ^2, т.е.

$$E_{2p}(X \mid A_\lambda^2, \bar{J}_2) = \max_{l \in \tilde{\Lambda}_1^1} \{ E_{2p}(X \mid A_l, \bar{J}_2) \mid E_{1p}(X \mid A_l, \bar{J}_1) \ge \gamma_1 E_{1p}(X \mid A_\lambda^1, \bar{J}_1) \}. \qquad (75)$$

Следует отметить, что вычислительная схема алгоритма практически не изменяется при наличии не одной, а нескольких различных иерархических групп. Процесс решения в этом случае прекращается, если на каком-то шаге решения перспективное подмножество альтернатив $\tilde{\Lambda}_t$ или $\tilde{\Lambda}_1^1$ включает только одну единственную альтернативу, которая и выбирается в качестве наиболее эффективной.

Проиллюстрируем работу алгоритмов использования комплексного критерия эффективности и лексикографического упорядочения групп показателей эффективности и введения последовательных уступок на рассмотренном выше числовом примере 1.

5.3. Иллюстративный пример 1.

Пусть

$$\varphi_1(X) = \max_{X \in Q}(x_1 x_2^2), \ \varphi_2(X) = \max_{X \in Q}(2x_1^2 x_2),$$

$$G = \{x_1, x_2 \mid 3x_1 + x_2 \le 18; x_1 x_2 - 2x_1 \le 20; x_1 + x_2 \le 15; -5 \le x_1 \le 10, -10 \le x_2 \le 20\},$$

$$Q = \{x_1, x_2 \mid 3x_1 + x_2 \le 24; x_1 x_2 - 2x_1 \le 25; x_1 + x_2 \le 21; -5 \le x_1 \le 10, -10 \le x_2 \le 20\}.$$

Осуществим оптимальный выбор из 11 допустимых альтернатив с использованием значения вектора переменных, целевых функций и правых частей ограничений (табл. 1).

Таблица 1

Номер альтернативы	**Значения переменных**		**Значения целевых функций**		**Значения правых частей ограничений**		
	x_1	x_2	$\varphi_1(X)$	$\varphi_2(X)$	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$
1	– 2	5	– 50	40	1	– 20	3
2	5	3	45	150	18	9	8
3	4	8	256	128	20	24	12
4	3	6	108	108	15	6	9
5	– 5	2	– 20	100	– 13	– 14	– 3
6	6	6	216	432	24	24	12
7	2	14	392	112	20	24	16
8	8	– 2	32	– 256	22	– 32	6
9	3	– 10	300	– 180	– 1	– 36	– 7
10	1	20	400	40	23	18	21
11	8	– 4	128	– 512	20	– 48	4

Здесь $f_1(X) = 3x_1 + x_2$; $f_2(X) = x_1 x_2 - 2x_1$; $f_3(X) = x_1 + x_2$. Все ограничения этих альтернатив соответствуют условиям ограничений задачи. Выбор будем осуществлять только из альтернатив, принадлежащих множеству Парето. Альтернативы № 1, 5, 8, 11 не принадлежит множеству Парето, так как ограничения в альтернативах A_2, A_4 и A_9 принадлежат множеству G и справедливы соотношения: $\varphi_1(A_1) < \varphi_1(A_2)$, $\varphi_2(A_1) < \varphi_2(A_2)$; $\varphi_1(A_8) < \varphi_1(A_2)$, $\varphi_2(A_8) < \varphi_2(A_2)$; $\varphi_1(A_5) < \varphi_1(A_4)$, $\varphi_2(A_5) < \varphi_2(A_4)$; $\varphi_1(A_{11}) < \varphi_1(A_9)$, $\varphi_2(A_{11}) < \varphi_2(A_9)$. Следовательно, эти альтернативы могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения.

Решение примера 1 введением комплексного показателя эффективности. Выполним нормирование значения целевых функций во всех оставшихся для рассмотрения альтернативах A_p, $p = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10$, согласно выражениям

$$\overline{\varphi}_k(A_p) = \frac{\varphi_k(A_p) - \min\limits_p \varphi_k(A_p)}{\max\limits_p \varphi_k(A_p) - \min\limits_{2 \le p \le 11} \varphi_k(A_p)}, \ p = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10.$$

Вычислим значения функций принадлежности для всех ограничений каждой альтернативы по формулам

$$\mu_1(f_1[A_p]) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_1[A_p] \le 18, \\ 1 - \dfrac{f_1[A_p]-18}{24}, & \text{если } 18 < f_1[A_p] \le 24, \quad p = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, \\ 0, & \text{если } f_1[A_p] > 24, \end{cases}$$

$$\mu_2(f_2[A_p]) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_2[A_p] \le 20, \\ 1 - \dfrac{f_2[A_p]-20}{25}, & \text{если } 20 < f_2[A_p] \le 25, \quad p = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, \\ 0, & \text{если } f_2[A_p] > 25, \end{cases}$$

$$\mu_3(f_3[A_p]) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_3[A_p] \le 15, \\ 1 - \dfrac{f_3[A_p]-15}{21}, & \text{если } 15 < f_3[A_p] \le 21, \quad p = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10. \\ 0, & \text{если } f_3[A_p] > 21. \end{cases}$$

Вычисленные нормированные значения целевых функций и функций принадлежностей ограничений для альтернатив A_p, $p = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10$, сведены в табл. 2. Пусть экспертом определены следующие значения весовых коэффициентов локальных критериев в компромиссном критерии оптимальности вида:

$$F[X(A_p)] = w_1 \overline{\varphi}_1[X(A_p)] + w_2 \overline{\varphi}_2[X(A_p)] +$$

$$+ w_3 \mu_1[f_1(A_p)] + w_4 \mu_2[f_2(A_p)] + w_5 \mu_3[f_3(A_p)],$$

$$w_1 = 0.3, \; w_2 = 0.25, \; w_3 = 0.2, \; w_4 = 0.15, \; w_5 = 0.1.$$

Средневзвешенные нормированные значения локальных целевых функций и функций принадлежности ограничений задачи, а также значения компромиссных критериев для всех перспективных альтернатив приведены в табл. 3.

Т а б л и ц а 2

Номер альтернативы	**Нормированные значения целевых функций**		**Значения функций принадлежности правых частей ограничений**		
	$\overline{\varphi}_1(X)$	$\overline{\varphi}_2(X)$	$\mu_1[f_1(X)]$	$\mu_2[f_2(X)]$	$\mu_3[f_3(X)]$
2	0	0.539	1.0	1.0	1.0
3	0.594	0.503	0.667	0.2	1.0
4	0.177	0.471	1.0	1.0	1.0
6	0.482	1.0	0	0.2	1.0
7	0.977	0.477	0.667	0.2	0.2
9	0.718	0	1.0	1.0	1.0
10	1.0	0.359	0.167	1.0	1.0

Наибольшее значение компромиссного критерия эффективности достигается для альтернативы A_9, которая принимается в качестве оптимальной.

Т а б л и ц а 3

Номер альтернативы	Средневзвешенные нормированные значения целевых функций		Взвешенные значения функций принадлежности правых частей ограничений			Значения компромиссного критерия
	$w_1\bar{\varphi}_1(X)$	$w_2\bar{\varphi}_2(X)$	$w_3\mu_1[f_1(X)]$	$w_4\mu_2[f_2(X)]$	$w_5\mu_3[f_3(X)]$	
2	0	0.135	0.2	0.15	0.1	0.585
3	0.1782	0.126	0.1334	0.03	0.1	0.5676
4	0.0532	0.118	0.2	0.15	0.1	0.6212
6	0.1446	0.25	0	0.03	0.1	0.5246
7	0.2931	0.119	0.1334	0.03	0.05	0.6255
9	**0.2154**	**0**	**0.2**	**0.15**	**0.1**	**0.6654**
10	0.3	0.09	0.033	0.15	0	0.573

В качестве другого комплексного критерия эффективности выберем критерий вида

$$E_2(X\,|A)=w_1\bar{\varphi}_1(X\,|A)+w_2\bar{\varphi}_2(X\,|A)+w_3\min_{i\in\bar{I}}\mu_i[f_i(X\,|A)]$$

со значениями весовых коэффициентов, равными $w_1=0.3$, $w_2=0.25$, $w_3=0.45$. При выборе этого вида критерия с заданными значениями весовых коэффициентов большее предпочтение по сравнению с критерием $E_1(X\,|A)$ должно отдаваться альтернативам, в которых левые части всех гибких ограничений принимают значения, наиболее близкие к величинам b_i.

Значения компромиссных критериев эффективности $E_2(X\,|A)$ всех перспективных альтернатив сведены в табл. 4. Наибольшее значение компромиссного критерия эффективности $E_2(X\,|A)$ достигается, как и по результатам решения по комплексному критерию эффективности $E_1(X\,|A)$, для альтернативы A_9, которая принимается в качестве оптимальной.

Т а б л и ц а 4

Номер альтернативы	Взвешенные нормированные значения целевых функций		Гибкие ограничения задачи		Значения компромиссного критерия
	$w_1\bar{\varphi}_1(X)$	$w_2\bar{\varphi}_2(X)$	$\min_{i\in\bar{I}}\{\mu_i[f_i(X)]\}$	$w_3\min_{i\in\bar{I}}\{\mu_i[f_i(X)]\}$	
2	0	0.135	1.0	0.45	0.585
3	0.1782	0.126	0.2	0.09	0.3942
4	0.0531	0.1178	1.0	0.09	0.6209
6	0.1446	0.25	0	0	0.3946
7	0.2931	0.119	0.2	0.09	0.5021
9	**0.2154**	**0**	**1.0**	**0.45**	**0.6654**
10	0.3	0.09	0.167	0.075	0.465

Решение примера 1 методом последовательных уступок. Будем выполнять решение примера 1 в условиях тех же функций принадлежности гибких ограничений, когда в группу показателей эффективности $\bar{J}_1$ входят функции принадлежности ограничений, а в группу $\bar{J}_2$ — локальные целевые функции. Пусть критерии эффективности показателей этих двух групп соответственно имеют вид

$$E_1(X \mid A, \bar{J}_1) = 0.333 * \mu_1[f_1(X \mid A)] + 0.333 * \mu_2[f_2(X \mid A)] + 0.334 * \mu_3[f_3(X \mid A)],$$

$$E_2(X \mid A_l, \bar{J}_1) = 0.5 * \bar{\varphi}_1(X \mid A) + 0.5 * \bar{\varphi}_2(X \mid A).$$

Величину уступки по показателям эффективности первой приоритетной группы выберем равной $\gamma_1 = 0.8$.

В табл. 5 сведены результаты решения задачи, рассматриваемые на первом этапе. Получены значения $\mu_i[f_i(X)]$ гибких ограничений и компромиссного критерия эффективности $E_1(X \mid A, \bar{J}_1)$ всех перспективных альтернатив.

Таблица 5

Номер альтернативы	Взвешенные значения функций принадлежности правых частей ограничений			Критерии эффективности показателей первой группы
	$w_1\mu_1[f_1(X)]$	$w_2\mu_2[f_2(X)]$	$w_3\mu_3[f_3(X)]$	
2	0.333	0.333	0.334	1.0
3	0.222	0.0666	0.334	0.6226
4	0.333	0.333	0.334	1.0
6	0	0.0666	0.334	0.4006
7	0.222	0.0666	0.0666	0.3552
9	0.333	0.333	0.334	1.0
10	0.0556	0.333	0.334	0.7226

Подмножество перспективных альтернатив $\tilde{\Lambda}_2$, рассматриваемых на втором этапе решения, выбирается (см. табл. 2) из условий $\tilde{\Lambda}_2 = \{l \in \tilde{\Lambda} \mid E_1(X \mid A_l) \ge 0.8\}$ и включает три следующие альтернативы $\tilde{\Lambda}_2 = \{A_2, A_4, A_9\}$:

$$A_{11} \succ A_1, \text{ так как } \bar{\varphi}_1(X \mid A_{11}) > \bar{\varphi}_1(X \mid A_1),\ \bar{\varphi}_2(X \mid A_{11}) > \bar{\varphi}_2(X \mid A_1),$$

$$A_{11} \succ A_4, \text{ так как } \bar{\varphi}_1(X \mid A_{11}) > \bar{\varphi}_1(X \mid A_4),\ \bar{\varphi}_2(X \mid A_{11}) > \bar{\varphi}_2(X \mid A_4),$$

$$A_{11} \succ A_7, \text{ так как } \bar{\varphi}_1(X \mid A_{11}) > \bar{\varphi}_1(X \mid A_7),\ \bar{\varphi}_2(X \mid A_{11}) > \bar{\varphi}_2(X \mid A_7).$$

Вычислим значения комплексного критерия эффективности второго уровня иерархии для каждой из этих альтернатив

$$E_2(X \mid A_2, \bar{J}_2) = 0.5 * 0 + 0.5 * 0.539 = 0.2695,$$

$$E_2(X \mid A_4, \bar{J}_2) = 0.5 * 0.177 + 0.5 * 0.471 = 0.324,$$

$$E_2(X \mid A_9, \bar{J}_2) = 0.5 * 0.718 + 0.5 * 0 = 0.359$$

и выберем из них оптимальную:

$$A_9 \succ A_4 \succ A_2, \text{ так как } E_2(X \mid A_9, \bar{J}_2) > E_2(X \mid A_4, \bar{J}_2) > E_2(X \mid A_2, \bar{J}_2).$$

Следовательно, альтернатива A_9 выбирается как наиболее эффективная.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sommer G. Lineare Ersatzprogramme für unscharfe Entscheidungsprobleme zur Optimierung bei unscharfen Problembeschreibung // Zeitschrift für Operation Research. — 1978. — **22.** — S. B1–B24.
2. Rommelfanger H.J. Entscheiden bei Unschärfe. Fuzzy Decision Support-Systeme. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, Second edition, 1994.

3. R o m m e l f a n g e r H . J . Fuzzy-Optimierungsmodelle in praktischen Anwendungen // W. Habenicht, B. Scheubrein, R. Scheubrein (Hrsg.) «Multi-Criteria und Fuzzy-Systeme in Theorie und Praxis». — Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag, 2003. — 325 s.
4. O r l o v s k i S . A . Multiobjective programming with fuzzy parameters // Control and Cybernetics. — 1984. — **13**. — P. 173–183.
5. O r l o v s k i S . A. Mathematical programming problems with fuzzy parameters, 1985. — P. 136–145.
6. Z a d e h L . A . Fuzzy sets // Information and Control. — 1965. — **8**, N 3. — P. 338–353.
7. Z i m m e r m a n n H . - J . Unscharfe Entscheidungen und Multi-Criteria Analyse // Proc. Oper. Res. — 1979. — **6.** — S. 99–109.
8. R o m m e l f a n g e r H . - J . Entscheidungstheorie: Klassische Konzepte und Fuzzy-Erweiterungen. — Berlin: Springer-Verlag, 2001. — 268 s.
9. R o m m e l f a n g e r H . J . Interactive fuzzy-project planning with flexibe extended addition // Ruan D. a.o. (Eds), Intelligent Techniques and Soft Computing in Nuclear Science and Engineering. — Singapore: World Scientific Publishing Co., 2000. — P. 62–71.
10. R o m m e l f a n g e r H . J . FULPAL 2.0 — An Interactive algorithm for solving multicriteria fuzzy linear programs controlled by aspiration levels // Schegert D. (Ed), Methods of multickriteria decision theory. — Pfalzakademie Lamprecht, 1995. — P. 21–34.
11. П о д и н о в с к и й В . В . , Н о г и н В . Д . Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 255 с.
12. П о д и н о в с к и й В . В . , П о т а п о в М . А . Методы анализа и системы поддержки принятия решений / Учебное пособие (МФТИ). — М.: Спутник +, 2003. — С. 6–23.
13. З а к Ю . А . Модели и методы построения компромиссных планов в задачах математического программирования с несколькими целевыми функциями // Кибернетика. — 1972. — № 4. — С. 102–107.
14. W e b e r M . Entscheidungen bei Mehrfachzielen: Verfahren zur Unterstützung von Individual und Gruppenentscheidungen. — Gabler-Verlag, Wiesbaden (Band 26 der Bochumer Beiträge zur Unternehmensführung und Unternehmensforschung), 1983. — 225 s.
15. М и х а л е в и ч В . С . , В о л к о в и ч В . Л . Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. — М.: Наука, 1982. — 286 с.
16. З а к Ю . А . Вычислительные схемы последовательных алгоритмов оптимизации // Автоматика и вычислительная техника. — 1980. — № 2. — С. 46–55.
17. Z i m m e r m a n n H . - J . , G u t s c h e L . Multi-criteria analyse. — Berlin: Springer-Verlag, 1991. — 290 s.
18. З а к Ю . А . Модификации метода последовательных уступок в задаче оптимизации векторного критерия // Автоматика и вычислительная техника. — 1975. — № 3. — С. 45–51.
19. В о л к о в и ч В . Л . , Д а р г е й к о Л . Ф . Об одном алгоритме выбора компромиссного решения для линейных критериев // Кибернетика. — 1972. — № 5. — С. 133–136.
20. Z e l e n y M . Linear multiobjektive programming. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1974. — 220 p.
21. M i e t t i n e n K . M . Nonlinearer multiobjective optimization. — Boston; London; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. — 298 p.

Поступила 28.05.2009.
После доработки 14.10.2009