

ДИНАМИКА СТАЦИОНАРНЫХ СТРУКТУР В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ОТРАЖЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Ключевые слова: *нелинейная оптика, обратная связь, параболическая задача, центральные многообразия, бифуркационный анализ, стационарные структуры.*

ВВЕДЕНИЕ

Расширение исследований в нелинейной оптике в настоящее время вызвано интенсивным использованием оптических систем в информационных технологиях (см. работы [1–4] и библиографию к ним).

Среди нелинейных оптических систем одной из самых популярных является система, состоящая из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура двумерной обратной связи. Принципиальная особенность таких систем заключается в том, что внешний контур обратной связи может быть использован для непосредственного воздействия на нелинейную динамику системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами.

Параболические функционально-дифференциальные уравнения с преобразованием аргументов искомой функции, используемые для моделирования оптических систем с двумерной обратной связью, представляют собой новый класс уравнений для исследования феномена структурообразования. Математическое обоснование наблюдаемых автоволновых явлений для преобразования поворота на фиксированный угол в круге или кольце проведено в [5–7] на основе теории бифуркации Андронова–Хопфа. Методы построения периодических решений для произвольной области и невырожденного гладкого преобразования развиты в [8, 9]. Метод квазинормальных форм для параболического функционально-дифференциального уравнения с поворотом для случая малой диффузии применен в [10, 11] для описания динамики бегущих волн и медленно меняющихся структур. Оптическая буферность бегущих волн установлена в работах [12–15]. Напомним, следуя [12, 13], что в фазовом пространстве некоторой бесконечномерной динамической системы реализуется феномен буферности, если при подходящем выборе параметров можно гарантировать существование в ней любого фиксированного числа однотипных аттракторов. Метод центральных многообразий использован в работах [16, 17] для исследования бифуркаций вращающихся структур в кольце и круге для случая поворота, а также в круге для преобразования поворота совместно с радиальным сжатием. Исходя из [18], анализ вращающихся структур выполнен в [19, 20] методом построения приближенных периодических решений. Локальная теория бифуркаций применялась в [21, 3] для построения стационарных структур и анализа их устойчивости для параболического уравнения на отрезке с преобразованием отражения.

Нелинейный интерферометр с зеркальным отражением поля в контуре обратной связи является одной из наиболее простых оптических систем, в которых реализуется нелокальный характер взаимодействия световых полей. Экспериментальные исследования показали многообразие типов оптических структур, возникающих в этом случае [22–25]. В данной работе рассматривается параболическая задача с преобразованием отражения и условиями Неймана на отрезке. Следуя [26], строится иерархия ее упрощенных моделей. Их анализ позволяет объяснить возникновение, эволюцию стационарных структур и указать условия их устойчивости.

Статья организована следующим образом. В первом разделе рассматривается вторая краевая задача для скалярного параболического уравнения на отрезке с преобразованием отражения. Исследована задача о выделении пространственно однородного стационарного решения, теряющего устойчивость аperiodически при увеличении отрезка. Во втором разделе доказана теорема существования, асимптотической формы и устойчивости стационарных структур. Третий раздел посвящен построению двухмодовой аппроксимации исходной задачи. В четвертом разделе для частного случая строятся аппроксимации порядка 3–5. Здесь же проводится их бифуркационный анализ. В пятом разделе отражены результаты численного моделирования. В шестом разделе указаны условия, при которых в исходной задаче реализуется явление буферности. В заключении подытожены основные результаты данной работы.

В качестве бифуркационного параметра принята величина отрезка. Увеличение отрезка эквивалентно уменьшению коэффициента диффузии. Этот параметр оказывает существенное влияние на динамику стационарных оптических структур [22–25].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математической моделью для описания и исследования устойчивости пространственно неоднородных оптических структур нелинейного интерферометра с преобразованием отражения в двумерной обратной связи является краевая задача

$$\partial_t u(x, t) + u(x, t) = D \partial_{xx} u(x, t) + K(1 + \gamma \cos u(-x, t)), \quad -l < x < l, \quad (1)$$

$$\partial_x u(-l, t) = \partial_x u(l, t) = 0. \quad (2)$$

Задача (1), (2) моделирует динамику фазовой модуляции $u(x, t)$, $x \in (-l, l)$, $t > 0$, световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием отражения координат в контуре обратной связи в одномерном приближении. Здесь D — коэффициент диффузии нелинейной среды, положительный коэффициент K пропорционален интенсивности входного поля, γ — видность (контрастность) интерференционной картины, $0 < \gamma < 1$.

Обозначим $H = L_2(-l, l)$. Следуя [27, гл. I.1], обозначим H^s , $s \in \mathbb{R}_+$, шкалу пространств, порожденную оператором Δ (Δ — одномерный оператор Лапласа) при граничных условиях (2). Норма в H^s задается формулой $\|u\|_s^2 = \langle (-\Delta)^s u, u \rangle + \langle u, u \rangle$. Здесь $\langle *, * \rangle$ — скалярное произведение в H . Отметим, что оператор $-\Delta$ с областью определения H^2 в пространстве H имеет полную ортогональную систему собственных функций $1, \sin \frac{\pi}{2l} x, \cos \frac{\pi}{l} x, \sin \frac{3\pi}{2l} x, \dots$

В данной работе рассматриваются вопросы существования, формы и устойчивости в метрике H^1 пространственно неоднородных стационарных решений, бифурцирующих из пространственно однородных стационарных решений, т.е. решений $u(t, x) = w$, определяемых из уравнения

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \quad (3)$$

Фиксируем гладкую ветвь решений

$$w = w(K), \quad 1 + K \gamma \sin w(K) \neq 0, \quad (4)$$

уравнения (3). Затем линеаризуем (1), (2) на $w(K)$. В результате получаем уравнение

$$\dot{u} + Lu = 0,$$

где $L = (1 - D\Delta - \Lambda Q)$, $\Lambda = \Lambda(K) = -K\gamma \sin w(K)$, Q — самосопряженный в H оператор, определенный согласно равенству $(Qu)(x) = u(-x)$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Оператор L с областью определения $D(L)=H^2$ в пространстве H имеет полную ортогональную систему собственных функций

$$1, \sin \frac{\pi}{2l} x, \cos \frac{\pi}{l} x, \sin \frac{3\pi}{2l} x, \cos \frac{2\pi}{l} x, \dots,$$

соответствующих собственным значениям

$$\lambda_0 = 1 - \Lambda, \lambda_1 = 1 + D\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 + \Lambda, \lambda_2 = 1 + D\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - \Lambda, \lambda_3 = 1 + D\left(\frac{3\pi}{2l}\right)^2 + \Lambda, \dots$$

Фиксируем теперь K такое, что выполняется следующее условие.

Условие 1. Имеет место $\Lambda = \Lambda(K) < -1$.

Проблема реализуемости этого условия исследована в [2, 12, 13, 4].

Из леммы 1 и условия 1 следует, что при фиксированном D и малых l $w = w(K)$ — устойчивое решение задачи (1), (2). При увеличении l и его прохождении через значение

$$l_1 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{-D}{1 + \Lambda} \right)^{1/2} \quad (5)$$

w теряет устойчивость. Индекс неустойчивости [27, гл. VI.4] решения w при $l_1 < l < 3l_1$ равен 1. При увеличении l и его прохождении через значения $(2k+1)l_1$, $k=1, 2, \dots$, каждый раз индекс неустойчивости решения w повышается на порядок.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ

В качестве бифуркационного параметра примем l . Замена

$$u = w + v \quad (6)$$

приводит уравнение (1) к виду

$$\dot{v} + Lv = R(Qv), \quad L = L(l), \quad (7)$$

где

$$R(v) = K\gamma[\cos(w+v) - \cos w + v \sin w].$$

Далее используется следующее равенство:

$$R(v) = -\frac{1}{2} \Lambda \operatorname{ctg} w v^2 - \frac{\Lambda}{6} v^3 + O(v^4). \quad (8)$$

Отметим, что отображение $v \rightarrow R(v): H^2 \rightarrow H$ является аналитическим. Задача (1), (2) в пространстве H порождает непрерывную полугруппу [4, гл. 4]. В качестве фазового пространства уравнения (7), т.е. пространства начальных условий, примем пространство H^1 . Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1. Существует $\delta_0 > 0$ такое, что если $0 < l - l_1 < \delta_0$, то задача (1), (2) имеет два решения: $u^\pm(x, l) = w \pm v^\pm(x, l)$. Здесь

$$v^+ = \left(\frac{D\pi(l-l_1)}{-c_1(l_1)l_1^3} \right)^{1/2} \sin \frac{\pi}{2l} x + \frac{D\pi(l-l_1)}{2c_1(l_1)l_1^3} (\Lambda \operatorname{ctg} w)^2 \left((1-\Lambda)^{-1} + (3+5\Lambda)^{-1} \cos \frac{\pi}{l} x \right) + r, \quad (9)$$

где $r = r(x, (l-l_1))$,

$$c_1(l_1) = -\frac{1}{4} (\Lambda \operatorname{ctg} w)^2 \left((1-\Lambda)^{-1} - \frac{1}{2} (3+5\Lambda)^{-1} \right) + \frac{\Lambda}{8}. \quad (10)$$

Функция $r(x, \mu) \in H^2$ является аналитической функцией μ в окрестности нуля, $r(x, \mu) = O(\mu^3)$.

Решения u^\pm в метрике пространства H^1 экспоненциально устойчивы.

Доказательство. Доказательство теоремы основано на методе центральных многообразий [28, 29]. Существование центрального многообразия уравнения (7) в окрестности $(l_1, 0) \in R \times H^1$ доказывается, как и в [16, 17]. Центральное многообразие в рассматриваемом случае представимо в виде [28, гл. 6.2]

$$v = z \sin \theta + \frac{1}{2!} \Omega_2(z, \theta, l) + \frac{1}{3!} \Omega_3(z, \theta, l) + \dots, \quad \theta = \frac{\pi}{2l} x, \quad (11)$$

где $\Omega_2, \Omega_3, \dots$ — формы второй, третьей, ... степени относительно z со значениями в H^1 . На центральном многообразии уравнение (7) принимает вид

$$\dot{z} = -\lambda_1(l)z + c_1(l)z^3 + c_3(l)z^5 + \dots \quad (12)$$

Найдем коэффициенты разложений (11), (12). С этой целью подставим (11), (12) в (7) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z . Полагая $\Omega_2 = q_2 z^2$ и используя (8), получаем $(L - 2\lambda_1)q_2 = -\Lambda \operatorname{ctg} w \sin^2 \theta$.

В силу леммы 1

$$q_2 = -\frac{1}{2} \Lambda \operatorname{ctg} w ((\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} - (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2\theta). \quad (13)$$

Полагая $\Omega_3 = q_3 z^3$, приходим к заключению, что q_3 удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{3!} (L - 3\lambda_1)q_3 + c_1 \sin \theta = \frac{1}{2} \Lambda \operatorname{ctg} w \sin \theta q_2 + \frac{1}{3!} \Lambda \sin^3 \theta. \quad (14)$$

Условие разрешимости этого уравнения в классе аналитических по l в окрестности l_1 функций, принимающих значения в H^1 , приводит к однозначному определению

$$c_1(l) = -\frac{1}{4} (\Lambda \operatorname{ctg} w)^2 ((\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + \frac{1}{2} (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1}) + \frac{1}{8} \Lambda. \quad (15)$$

Уравнение (14) при указанном выборе $c_1(l)$ имеет решение того же вида, что и его неоднородность. Представление q_3 приводить здесь не будем. Отметим, что коэффициент q_4 формы Ω_4 однозначно определяется из соответствующего уравнения. Условие разрешимости уравнения относительно коэффициента q_5 формы Ω_5 приводит к однозначному определению $c_5(l)$. Указанный процесс неограниченно продолжим. Полученный при этом ряд является, как известно [28, гл. 6.2], асимптотически сходящимся в окрестности $l = l_1, z = 0$.

Рассмотрим уравнение (12). Используя равенства (5), (15), убеждаемся в справедливости (10). По условию 1 $c_1(l_1) < 0$. Так как $\lambda'_1(l_1) = -D\pi l_1^{-3}$, имеет место суперкритическая бифуркация типа «вилка» (см. [29, гл. 6.3]) и из тривиальной особой точки уравнения (12) ответвляются две экспоненциально устойчивые точки

$$z^\pm = \left(\frac{\lambda'_1(l_1)}{c_1(l_1)} (l - l_1) \right)^{1/2} + O((l - l_1)^{3/2}). \quad (16)$$

Следовательно, в семействе уравнений (7) имеет место суперкритическая бифуркация рождения экспоненциально устойчивых стационарных решений. В силу (5), (6), (11), (13), (16) имеет место (9).

Теорема доказана.

3. АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ (7)

Область применения уравнения (12) для описания динамики уравнения (7) при увеличении l является узкой. В этой связи построим двухмодовую аппроксимацию уравнения (7). Воспользуемся формализмом построения центральных многообразий в сочетании с методом Галеркина. Построим приближенные решения уравнения (7) в виде

$$v = z_1 \sin \theta + z_3 \sin 3\theta + \frac{1}{2!} \Omega_2(z, \theta, l) + \frac{1}{3!} \Omega_3(z, \theta, l), \quad (17)$$

где $\Omega_2, \Omega_3, \dots$, — формы второй, третьей степени соответственно относительно z со значениями в H^1 , $z = (z_1, z_3)$ — решение системы

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\lambda_1(l)z_1 + g_1(z, l), \\ \dot{z}_3 = -\lambda_3(l)z_3 + g_3(z, l). \end{cases} \quad (18)$$

Здесь $g_k(z, l)$, $k=1, 3$, — формы третьей степени z . Подставим (17), (18) в (7) и приравняем формы второй и третьей степени. В результате относительно Ω_2 получим уравнение

$$L\Omega_2 - \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} \lambda_1 z_1 - \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_3} \lambda_3 z_3 = -(\text{Actg } w)(z_1 \sin \theta + z_3 \sin 3\theta)^2.$$

Согласно лемме 1

$$\begin{aligned} \Omega_2 = & -\frac{1}{2}(\text{Actg } w)((\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} - (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2\theta)z_1^2 + \\ & + ((\lambda_0 - 2\lambda_3)^{-1} - (\lambda_6 - 2\lambda_3)^{-1} \cos 6\theta)z_3^2 + \\ & + 2((\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)^{-1} \cos 2\theta - (\lambda_4 - \lambda_1 - \lambda_3)^{-1} \cos 4\theta)z_1 z_3. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3!}(L\Omega_3 - \frac{\partial \Omega_3}{\partial z_1} \lambda_1 z_1 - \frac{\partial \Omega_3}{\partial z_3} \lambda_3 z_3) + g_1 \sin \theta + g_3 \sin 3\theta = \\ & = -\frac{1}{2} \text{Actg } w P_3(-z_1 \sin \theta - z_3 \sin 3\theta + \frac{1}{2} \Omega_2)^2 + \frac{\Lambda}{3!} (z_1 \sin \theta + z_3 \sin 3\theta)^3. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь P_3 — проектор в пространстве многочленов относительно z_1, z_3 на пространство их форм третьего порядка. Приравняв в (19) коэффициенты при $\sin \theta$, $\sin 3\theta$, однозначно находим g_1, g_3 . Полученное в результате неоднородное уравнение (19) имеет решение того же вида, что и его неоднородность. Подставив g_1, g_3 в (18), получим систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1(-\lambda_1(l) + C_{20}^1 z_1^2 + C_{11}^1 z_1 z_3 + C_{02}^1 z_3^2), \\ \dot{z}_3 = z_3(-\lambda_3(l) + C_{20}^3 z_1^2 + C_{02}^3 z_3^2) + C_{30}^3 z_1^3, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} C_{11}^1(l) &= \frac{1}{8}(\text{Actg } w)^2((\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} + 2(\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)^{-1}) - \frac{1}{8} \Lambda, \\ C_{02}^1(l) &= -\frac{1}{4}(\text{Actg } w)^2((\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + (\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)^{-1} + (\lambda_4 - \lambda_1 - \lambda_3)^{-1}) + \frac{\Lambda}{4}, \end{aligned}$$

$$C_{20}^3(l) = -\frac{1}{4}(\Lambda \operatorname{ctg} w)^2 ((\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)^{-1} + (\lambda_4 - \lambda_1 - \lambda_3)^{-1}) + \frac{\Lambda}{4}, \quad (21)$$

$$C_{02}^3(l) = -\frac{1}{4}(\Lambda \operatorname{ctg} w)^2 ((\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_6 - 2\lambda_3)^{-1}) + \frac{\Lambda}{8},$$

$$C_{30}^3(l) = \frac{1}{8}(\Lambda \operatorname{ctg} w)^2 (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} - \frac{\Lambda}{24},$$

$$C_{20}^1 = C_{20}^1(l) = c_1(l).$$

Здесь $c_1(l)$ удовлетворяет равенству (15). Отметим, что коэффициенты в (20) являются аналитическими функциями l .

Пусть $(x_1(l), x_3(l))$ — непрерывная ветвь стационарных решений системы (20), ответвляющаяся из нулевого решения и такая, что $x_1(l) > 0$ при малых $l - l_1 > 0$. Тогда, в силу (17), (20), приближенными стационарными решениями уравнения (7) являются следующие функции:

$$\begin{aligned} v^\pm = & \pm(x_1(l)\sin\theta + x_3(l)\sin 3\theta) - \frac{1}{4}(\Lambda \operatorname{ctg} w)((\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} - \\ & - (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2\theta)x_1^2(l) + \\ & + ((\lambda_0 - 2\lambda_3)^{-1} - (\lambda_6 - 2\lambda_3)^{-1} \cos 6\theta)x_3^2(l) + \\ & + 2((\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)^{-1} \cos 2\theta - (\lambda_4 - \lambda_1 - \lambda_3)^{-1} \cos 4\theta)x_1(l)x_3(l). \end{aligned}$$

4. СЛУЧАЙ $|\cos w| \ll 1$

Пусть $|\cos w| \ll 1$. Этот случай представляет интерес, поскольку возмущение в стационарном процессе w , вызванное отражением светового потока, проявляется наиболее сильно; упрощается как анализ системы (20), так и анализ уравнения (7). Для простоты рассмотрим случай $\cos w = 0$.

В системе (20) выполним преобразование

$$z_1 \rightarrow \left(-\frac{\Lambda}{24}\right)^{-1/2} z_1, \quad z_3 \rightarrow \left(\frac{\Lambda}{24}\right)^{-1/2} z_3.$$

В силу (21) система (20) примет вид

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1(-\lambda_1 - 3z_1^2 - 6z_3^2) + 3z_1z_3, \\ \dot{z}_3 = z_3(-\lambda_3 - 6z_1^2 - 3z_3^2) + z_1^3. \end{cases} \quad (22)$$

Система (22) является градиентной:

$$\dot{z}_k = -\frac{\partial G_2(z, l)}{\partial z_k}, \quad k = 1, 3, \quad (23)$$

где

$$G_2 = -\left(\frac{1}{2}\lambda_1 z_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 z_3^2\right) + \frac{3}{4}(z_1^4 + 4z_1^2 z_3^2 + z_3^4) - z_1^3 z_3.$$

Потенциальная функция G_2 — функция Ляпунова системы (23). Так как эта функция ограничена снизу, решения системы (23) ограничены на положительной полуоси. Аттракторами (22) могут быть только стационарные решения. Такими аттракторами являются стационарные решения $\pm(x_1(l), x_3(l))$, ответвляющиеся из нуля при $l = l_1$.

Перейдем к построению трехмодовой аппроксимации уравнения (7), в котором выполним предварительно преобразования $v \rightarrow \left(-\frac{\Lambda}{24}\right)^{-1/2} v$. Полагая

$$v = z_1 \sin \theta + z_3 \sin 3\theta + z_5 \sin 5\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{2l} x,$$

методом Галеркина получим

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1(-\lambda_1 - 3z_1^2 + 3z_1 z_3 - 6z_3^2 + 6z_3 z_5 - 6z_5^2) - 3z_3^2 z_5, \\ \dot{z}_3 = z_3(-\lambda_3 - 6z_1^2 - 6z_1 z_5 - 3z_3^2 - 6z_5^2) + z_1^3 + 3z_1^2 z_5, \\ \dot{z}_5 = z_5(-\lambda_5 - 6z_1^2 - 6z_3^2 - 3z_5^2) + 3z_1^2 z_3 - 3z_3^2 z_1. \end{cases} \quad (24)$$

Здесь исключены члены порядка $\|z\|^5$. Система (24) является градиентной:

$$\dot{z}_k = -\frac{\partial G_3}{\partial z_k}, \quad k=1, 3, 5, \quad (25)$$

где

$$G_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1 z_1^2 + \lambda_3 z_3^2 + \lambda_5 z_5^2) + \frac{3}{4}\left(z_1^4 + z_3^4 + z_5^4 + 4z_1^2\left(-\frac{1}{3}z_1 z_3 + z_3^2 - z_3 z_5 + z_5^2\right) + 4z_3^2(z_1 z_5 + z_5^2)\right).$$

Функция G_3 — функция Ляпунова системы (25). Так как эта функция ограничена снизу, решения системы (25) ограничены на положительной полуоси. Аттракторами системы (24) могут быть только стационарные решения. Как и выше, из нуля при $l=l_1$ ответвляются две ветви устойчивых стационарных решений $\pm(x_1(l), x_3(l), x_5(l))$.

При $l=l_3$ из нулевого неустойчивого решения (24) ответвляются две ветви неустойчивых стационарных решений $\left(0, \pm\left(\frac{-\lambda_3}{3}\right)^{1/2}, 0\right)$. Они становятся устойчивыми, если и только если

$$(2\lambda_3 - \lambda_1)(2\lambda_3 - \lambda_5) > \lambda_3^2. \quad (26)$$

Неравенство (26) имеет решение $l > 5(-1 - \Lambda)^{-1/2}$.

Таким образом, уравнение (7) при $\cos w = 0$ имеет две ветви стационарных решений, возникающих при $l=l_1$. Для них справедливо приближенное равенство

$$v^\pm = \pm(x_1(l)\sin \theta + x_3(l)\sin 3\theta + x_5(l)\sin 5\theta), \quad (27)$$

где $x(l)((x_1(l), x_3(l), x_5(l)))$ — указанная выше непрерывная ветвь стационарных решений системы (24) такая, что $x_1(l) > 0$ при малых $l-l_1 > 0$.

Остановимся теперь на построении методом Галеркина иерархии упрощенных моделей уравнения (7). Построим пятимодовую аппроксимацию уравнения (7).

С этой целью выполним в уравнении (7) преобразование $v \rightarrow \left(-\frac{\Lambda}{24}\right)^{-1/2} v$ и по-

жим

$$v = \sum_1^5 z_{2k-1} \sin(2k-1)\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{2l} x.$$

В результате получим систему

$$\dot{z}_{2k-1} = -\frac{\partial G_5}{\partial z_{2k-1}}, \quad k=1, \dots, 5, \quad (28)$$

где

$$G_5 = 0,5 \sum_1^5 \lambda_{2k-1} z_{2k-1}^2 + 0,75 \sum_1^5 z_{2k-1}^4 + z_1^3 z_3 + z_3^3 z_9 + 3 \sum_{k=1}^5 z_{2k-1}^2 \sum_{s=k+1}^5 z_{2s-1}^2 -$$

$$-3z_1^2 (z_3 z_5 + z_5 z_7 + z_7 z_9) + 3z_1 (z_3^2 z_5 - z_3^2 z_9 + z_3 z_5 z_7 - z_3 z_5 z_9 + z_3 z_7 z_9) +$$

$$+3z_3 (z_5^2 z_7 + 2z_5 z_7 z_9).$$

Потенциальная функция G_5 ограничена снизу. Следовательно, решения системы (28) ограничены на положительной полуоси. Аттракторами системы (28) являются ее стационарные решения.

5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Рассмотрим приближенные стационарные решения (7), ответвляющиеся из тривиального при $l=l_1$. Пусть, как и выше, $\cos w = 0$. Для одной из указанных ветвей стационарных решений имеет место представление в виде

$$v_N^+(l, x) = \sum_1^N x_{2k-1}(l) \sin(2k-1)\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{2l}x.$$

Здесь $\{x_{2k-1}(l) = x_{2k-1}(l, N), k=1, \dots, N\}$, $x_1(l) > 0$, — непрерывная ветвь особых точек градиентной системы размерности N . Согласно численному анализу справедливости следующие особенности динамики $\{x_{2k-1}(l), k=1, \dots, N\}$ при увеличении l :

- 1) $x_{2k-1}(l) > 0$, $k=1, \dots, N$;
- 2) $x_{2k-1}(l) \ll x_1(l)$, $k=3, \dots, N$, при малых $l-l_1 > 0$;
- 3) $x_{2k-1}(l) \approx x_1(l)/(2k-1)$, $k=2, \dots, N$, если $l-l_1 \gg 1$;
- 4) $x_{2k-1}(l)$, $k=1, \dots, N$, — монотонно возрастающие функции на (l_1, l_1^+) , где

$$l_1^+ = l_1^+(N).$$

Увеличение l от значения l_1^+ не приводит к заметным изменениям $x_{2k-1}(l)$, $k=1, \dots, N$.

Перейдем к вопросу об устойчивости $v_N^+(l, x)$. Рассмотрим вначале случай $N=3$. Линеаризуем уравнение (7) на $v_3^+(l, x)$. В результате получим следующее уравнение:

$$\dot{v} + Lv = 12(v_3^+(l, x))^2 Qv. \quad (29)$$

Для анализа на устойчивость уравнения (29) применим метод Галеркина. Полагая

$$v = \sum_0^2 \xi_{2k} \cos 2k\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{2l}x,$$

получаем линейную систему дифференциальных уравнений, которая определяется матрицей $B(l) = \{b_{ij}(l), i, j=1, 2, 3\}$, где

$$b_{11} = -1 + \Lambda - (1/l)^2 + 6x_1^2 + 6x_3^2 + 6x_5^2,$$

$$b_{12} = -3x_1^2 + 6x_1x_3 + 6x_3x_5,$$

$$b_{13} = -6x_1x_3 + 6x_1x_5, \quad b_{21} = -6x_1^2 + 12x_1x_3 + 12x_3x_5,$$

$$b_{22} = -1 + \Lambda - (3/l)^2 + 6x_1^2 - 6x_1x_3 + 6x_1x_5 + 6x_3^2 + 6x_5^2,$$

$$b_{23} = 3x_1^2 + 6x_1x_3 - 6x_1x_5 - 3x_3^2 + 6x_3x_5,$$

$$\begin{aligned}
b_{31} &= -12x_1x_3 + 12x_1x_5, \\
b_{32} &= -3x_1^2 + 6x_1x_3 - 6x_1x_5 - 3x_3^2 + 6x_3x_5, \\
b_{33} &= -1 + \Lambda - (5/l)^2 + 6x_1^2 + 6x_3x_5 + 6x_3^2 + 6x_5^2.
\end{aligned}$$

Устойчивость матрицы $B(l)$ зависит от параметра Λ . А именно, существует $\Lambda^* \approx -2$ такое, что если $\Lambda > \Lambda^*$, то $B(l)$ — устойчивая матрица для всех $l > l_1$. Если $\Lambda < \Lambda^*$, то найдется $l^*(\Lambda)$ такое, что $B(l)$, $l \in (l_1, l^*(\Lambda))$, — устойчивая матрица. Если $l > l^*(l)$, то $B(l)$ — неустойчивая матрица.

Приведем примеры. Если $\Lambda = -1,5$, $l = 30$, то $x(0,4427, 0,1335, 0,0655)$, $\sigma(B) = \{-1,915, -1,018, -0,908\}$. Здесь $\sigma(B)$ — спектр матрицы B . При $\Lambda = -2$ и $l = 13$: $x(0,6251, 0,1851, 0,0887)$, $\sigma(B) = \{-1,9170, -0,0470, 0,0884\}$, следовательно, $l^* \approx 13$.

Используя представление

$$v = \sum_1^3 \xi_{2k-1}(l) \sin(2k-1)\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{2l}x,$$

из (29), как и ранее, получим систему линейных дифференциальных уравнений с матрицей коэффициентов $-\frac{\partial^2 G_3(x(l))}{\partial z^2}$. Эта симметричная матрица устойчива для всех $l > l_1$. Анализ устойчивости приближенного решения $v_5^+(l, x)$ приводит к такому же выводу. Следовательно, есть веские основания полагать, что две ветви стационарных решений уравнения (7), ответвляющиеся из тривиального решения при $l = l_1$, определены для всех $l > l_1$. При этом, если $\Lambda > \hat{\Lambda}$, $\hat{\Lambda} \approx \Lambda^*$, то указанные ветви стационарных решений устойчивы на (l_1, ∞) .

Отметим, что профиль $v_N^+(l, x)$ при увеличении l приобретает форму волнистой «ступеньки». Ее неровность объясняется явлением Гиббса. При суммировании многочленов Фурье $v_N^+(l, x)$ методом Фейера были получены структуры типа «ступеньки». Такие структуры наблюдались при численных экспериментах [22–25]. Приведем пример. Если $l = 10$, $N = 5$, $\Lambda = -2$, то имеем

$$\begin{aligned}
v_5^+ &= 0,629564 \sin \theta + 0,192889 \sin 3\theta + \\
&+ 0,098318 \sin 5\theta + 0,055386 \sin 7\theta + 0,0031657 \sin 9\theta.
\end{aligned}$$

Эта функция отражена на промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$ на рис. 1; здесь представлен и график функции, полученный суммированием v_5^+ методом Фейера.

Перейдем к вопросу о форме структуры $v^{+3}(\theta, l)$ ($(v^{+3})'(\theta, l) > 0$) уравнения (7), бифурцирующей из тривиального решения при $l = 3l_1$. Легко видеть, что справедливо следующее равенство (принцип подобия [13]):

$$v^{+3}(\theta, l) = v^+(3\theta, l/3).$$

Это равенство распространяется и на соответствующие приближенные структуры. Используя принцип подобия, получаем приближенные представления решения $v^{+3}(\theta, l)$ уравнения (7). Приведем пример. Если $l = 30$, $N = 4$, то

$$v_4^{+3} = 0,62779 \sin 3\theta + 0,18905 \sin 9\theta + 0,09325 \sin 15\theta + 0,04990 \sin 21\theta.$$

Профиль v_4^{+3} приведен на рис. 2; здесь представлен и график функции, полученный суммированием v_4^{+3} методом Фейера.

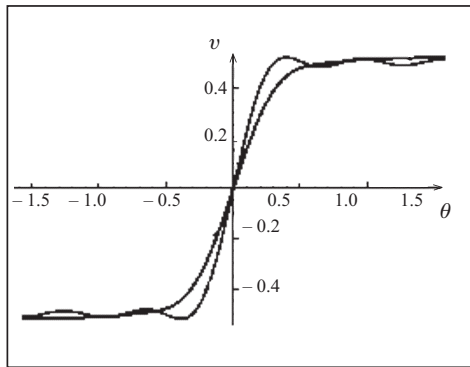


Рис. 1

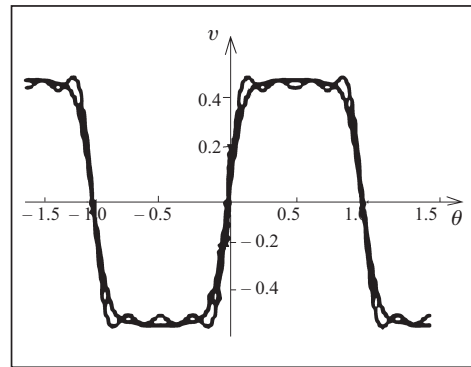


Рис. 2

Такого типа структуры с помощью численных расчетов получены в [22–25].

Как уже отмечалось, стационарные решения $v^{+3}(\theta, l), -v^{+3}(\theta, l)$ рождаются неустойчивыми с индексом неустойчивости, равным единице. На основе анализа устойчивости стационарных решений $\left(0, \pm \left(\frac{-\lambda_3}{3}\right)^{1/2}, 0\right)$ системы (24) можно пред-

положить, что рассматриваемые решения уравнения (7) при увеличении l обретают устойчивость. Дополнительным основанием справедливости этого предположения являются следующие рассуждения. Рассмотрим приближенное равенство

$$v_3^{+3}(l, x) = x_1(l/3)\sin 3\theta + x_3(l/3)\sin 9\theta + x_5(l/3)\sin 15\theta.$$

Используем здесь принцип подобия. Линеаризуем (7) на $v_3^{+3}(l, x)$. В результате получим уравнение (29), в котором $v_3^{+3}(l, x)$ заменено на $v_3^{+3}(l, x)$. Полагая

$$v = \xi_1 \sin \theta + \xi_5 \sin 5\theta + \xi_7 \sin 7\theta$$

и применяя метод Галеркина, получаем линейную систему дифференциальных уравнений с симметричной матрицей $A(l) = \{a_{ij}(l), i, j = 1, 2, 3\}$, где

$$a_{11} = -1 - \Lambda - (1/l)^2 - 6x_1^2 - 6x_3^2 - 6x_5^2,$$

$$a_{12} = -3x_1^2 + 6x_1x_3 + 6x_3x_5,$$

$$a_{13} = 3x_1^2 - 6x_1x_3 - 6x_3x_5,$$

$$a_{22} = -1 - \Lambda - (3/l)^2 - 6x_1^2 - 6x_3^2 - 6x_5^2,$$

$$a_{23} = -6x_1x_3 + 6x_1x_5,$$

$$b_{33} = -1 - \Lambda - (7/l)^2 - 6x_1^2 - 6x_3^2 - 6x_5^2.$$

Здесь $x_k = x_k(l/3)$, $k = 1, 3, 5$. Если $\Lambda = -2$, то матрица A обретает устойчивость при $l \approx 4, 5$. Согласно численным расчетам: $x(0,43799, 0,02056, 0,0010)$, $\sigma(A) = \{-25,1742, -1,59657, -0,002267\}$, если $l = 4, 5$. Неравенство (26) приводит в этом случае к $l = 5$. Причина этого явления очевидна. Включение мод $\sin 5\theta, \sin 7\theta$ усиливает способность $v^{+3}(l, x)$ перехода в класс устойчивых структур.

6. БУФЕРНОСТЬ, КВАЗИНОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ($\cos w = 0$)

Уравнение (7), в котором выполнено, как и ранее, изменение масштаба, запишем в развернутой форме:

$$\begin{aligned} \partial_t v(x, t) + v(x, t) &= D \partial_{xx} v(x, t) + \Lambda v(-x, t) + 4v^3(-x, t), \quad -l < x < l, \\ \partial_x v(-l, t) &= \partial_x v(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь исключены нелинейности порядка v^5 . Полученные выше результаты о стационарных решениях задачи (27) при соответствующих изменениях имеют место и тогда, когда бифуркационным является параметр D . Отметим, что согласно [22–25] число стационарных решений при $D \rightarrow 0$ растет. Проведенный анализ также приводит к такому выводу. В этой связи представляет интерес предельный случай $D=0$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \partial_t v(x, t) + v(x, t) &= \Lambda v(-x, t) + 4v^3(-x, t), \quad -l < x < l, \\ \partial_x v(-l, t) &= \partial_x v(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Для определенности положим $l = \pi/2$. Задачу будем рассматривать в фазовом пространстве $H = L_2(-\pi/2, \pi/2)$. Данная задача представляет и самостоятельный интерес [22–25].

Теорема 2. Пусть $\Lambda < -1$. Тогда решениями задачи (31) являются функции

$$v^\pm(2k-1, x, \Lambda) = v^\pm(1, (2k-1)x, \Lambda), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$v^\pm(1, x, \Lambda) = \pm 0,5(-1-\Lambda)^{1/2} \operatorname{sign} \sin x.$$

Если $-2 < \Lambda < -1$, то решения $v^\pm(2k-1, x, \Lambda)$ экспоненциально устойчивы.

Если $\Lambda < -2$, то решения $v^\pm(2k-1, x, \Lambda)$ неустойчивы.

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $v^+(2k-1, x, \Lambda)$ — решение задачи (31) для любого $k = 1, 2, \dots$. Линеаризация задачи (31) на $v^+(2k-1, x, \Lambda)$ приводит к задаче

$$\begin{aligned} \partial_t v(x, t) + v(x, t) &= \Lambda v(-x, t) + 3(-1-\Lambda)v(-x, t), \quad -l < x < l, \\ \partial_x v(-l, t) &= \partial_x v(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Очевидно, что $\exp \lambda t \sin(2s-1)x$, $\lambda = 2(1+\Lambda) < 0$, $s = 1, 2, \dots$, — решения задачи (32). Решениями (32) также являются $\exp \mu t \cos 2sx$, $\mu = -2(2+\Lambda)$, $s = 0, 1, \dots$. Учтем теперь, что система функций $1, \sin x, \cos 2x, \sin 3x, \dots$ полная в пространстве H . Последнее завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \partial_t v &= D \partial_{xx} v + av - 4v^3, \quad -l < x < l, \\ v(-x, t) &= -v(x, t), \quad \partial_x v(l, t) = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

где $a = -1-L > 0$, $l = \pi/2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что галеркинские аппроксимации задач (30), (33) по системам функций $\sin x, \sin 3x, \sin 5x, \dots$ совпадают. Следовательно, задача (33) — ограничение задачи (30) на ее инвариантное многообразие, порожденное замыканием в H^1 пространства $\operatorname{Span}\{\sin x, \sin 3x, \sin 5x, \dots\}$.

Основываясь на [29, гл. 5.3], приходим к заключению, что задача (33) в пространстве H^1 порождает динамическую систему. Ее устойчивыми решениями являются лишь стационарные решения. Число стационарных решений задачи (33) при $D \rightarrow 0$ возрастает. А именно, если $a/(2k+1)^2 < D < a/(2k-1)^2$, $k = 1, 2, \dots$, то существует ровно $2k-1$ стационарных точек $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_{2s-1}^\pm(x, D)$, $s = 1, \dots, k$. Здесь $\varphi_1^+(x, D) > 0$ на интервале $0 < x < \pi/2$, $\varphi_1^-(x, D) = -\varphi_1^+(x, D)$, $\varphi_{2s-1}^\pm(x, D) = \pm \varphi_1^\pm((2s-1)x, D)$, $s = 2, \dots, k$. Согласно [30] $\varphi_{2s-1}^\pm(x, D) \rightarrow v^\pm(2s-1, x, \Lambda)$ при $D \rightarrow 0$. Кроме того, существует \hat{D}_{2s-1} такое, что при $0 < D < \hat{D}_{2s-1}$ стационарные решения $\varphi_{2s-1}^\pm(x, D)$ экспоненциально устойчивы в метрике H^1 . Таким образом, в задаче (33) реализуют-

ся явление буферности. Следовательно, и в задаче (30) при $-2 < \Lambda < -1$ реализуется феномен буферности. Если $-2 < \Lambda < -1$, то задача (33) является квазинормальной формой [13] задачи (30). Если $\Lambda < -2$, то в задаче (30) имеет место явление высоко-модовой буферности, т.е. устойчивыми при достаточно малых D могут быть только быстро осциллирующие по пространственной переменной стационарные решения. Подчеркнем, что задача (33) таким качеством не обладает. Очевидно, что эти результаты справедливы и при $|\cos w| \ll 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказанная в работе теорема о существовании, устойчивости и асимптотической форме двух стационарных пространственно неоднородных решений дополняет результаты работ [21, 4].

При увеличении отрезка из стационарного пространственно однородного решения исходной задачи последовательно ответвляются пары стационарных пространственно неоднородных решений. В рассмотренном случае $|\cos w| \ll 1$ установлено, что, родившись устойчивой, пара стационарных структур сохраняет устойчивость при неограниченном увеличении отрезка в случае $\Lambda > -2$. Если $\Lambda < -2$, то указанная пара при увеличении l устойчивость теряет. Остальные стационарные структуры рождаются неустойчивыми. Однако, подрастая по амплитуде и эволюционируя по форме, обретают при увеличении l устойчивость. Если $\Lambda > -2$, то приобретенная структурой устойчивость сохраняется при дальнейшем увеличении l . Если $\Lambda < -2$, то каждая стационарная структура сохраняет устойчивость на некотором интервале изменения l . При выходе из указанного интервала при увеличении l индекс неустойчивости рассматриваемой структуры неограниченно увеличивается. Подчеркнем, что число устойчивых стационарных структур при увеличении длины отрезка увеличивается.

Аналогичная динамика стационарных решений исходной задачи имеет место при уменьшении коэффициента диффузии и фиксированных прочих параметров.

Как известно [13], явление буферности представляет собой одну из характерных особенностей процессов самоорганизации в сложных системах. Множественность режимов самоорганизации в оптических системах с двумерной обратной связью установлена в [10–15]. Однако в настоящей работе это явление, обнаруженное при численных расчетах в [22–25], установлено в случае стационарных контрастных структур, амплитуды которых не являются малыми.

Выражаю глубокую признательность профессору В.А. Разгулину, обратившему внимание автора на рассмотренную в данной работе задачу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новые физические принципы оптической обработки информации: Сб. статей / Под ред. С.А. Ахманова, М.А. Воронцова. — М.: Наука, 1990. — 398 с.
2. Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В.Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые физические принципы оптической обработки информации. — М.: Наука, 1990. — С. 263–325.
3. Разгулин А.В. Задача управления преобразованием аргументов в функционально-дифференциальных уравнениях математической физики. — М.: Изд. отд. фак-та ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2006. — 152 с.
4. Разгулин А.В. Нелинейные модели оптической синергетики. — М.: Изд. отд. фак-та ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. — 203 с.
5. Разгулин А.В. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1993. — 33, № 1. — С. 69–80.
6. Разгулин А.В. Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Там же. — 1993. — 33, № 10. — С. 1499–1510.

7. Разгулин А.В. Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // *Мат. моделирование*. — 1993. — **5**, № 4. — С. 105–117.
8. Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // *Nonlinear analysis: Theory, Meth.&Appl.* — 1998. — **32**, N 2. — P. 261–278.
9. Скубачевский А.Л. О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // *Дифференц. уравнения*. — 1998. — **34**, № 10. — С. 1394–1401.
10. Кашенко С.А. Асимптотика пространственно неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. — 1994. — **31**, № 3. — С. 467–473.
11. Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A., Pelster A. Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // *Physika D*. — 1999. — **125**. — P. 123–141.
12. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // *Теорет. и мат. физика*. — 2004. — **140**, № 1. — С. 14–28.
13. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.
14. Белан Е.П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // *Журн. мат. физики, анализа, геометрии*. — 2005. — **1**, № 1. — С. 3–34.
15. Белан Е.П. Оптическая буферность стационарных структур // *Кибернетика и системный анализ*. — 2008. — **44**, № 5. — С. 61–75.
16. Белан Е.П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // *Дифференц. уравнения*. — 2004. — **40**, № 5. — С. 645–654.
17. Белан Е.П., Лыкова О.Б. Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // *Там же*. — 2004. — **40**, № 10. — С. 1348–1357.
18. Васильева А.Б., Кашенко С.А., Колесов Ю.С., Розов Н.Х. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // *Мат. сб.* — 1986. — **130**, вып. 4. — С. 488–499.
19. Белан Е.П., Лыкова О.Б. Бифуркации вращающихся структур в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // *Нелінійні коливання*. — 2006. — **9**, № 2. — С. 155–169.
20. Белан Е.П., Лыкова О.Б. Бифуркации вращающихся структур в параболическом уравнении с преобразованием поворота пространственной переменной // *Динам. системы*. — 2008. — Вып. 25. — С. 3–16.
21. Чушкин В.А., Разгулин А.В. Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отраженным аргументом // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, вычисл. математика и кибернетика*. — 2003. — № 2. — С. 13–20.
22. Vorontsov M. A., Zheleznykh N. I., Ivanov V. Yu. Transverse interactions in 2-D feedback non-linear optical systems // *Opt. and Quant. Electron.* — 1988. — **22**. — P. 501–515.
23. Воронцов М.А., Железных Н.И. Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с двумерной обратной связью // *Мат. моделирование*. — 1990. — **2**, № 2. — С. 31–38.
24. Железных Н.И. Исследование нелинейных управляемых оптических систем с обратной связью: дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М., 1991. — 115 с.
25. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics generations of spatiotemporal structures / S.A. Akhmanov, M.A. Vorontsov, V.Yu. Ivanov, et al. // *J. Optical Soc. Amer. Ser. B*. — 1992. — **9**, N 1. — P. 78–90.
26. Ахромеева Т.С., Кюрдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Структуры и хаос в нелинейных средах. — М.: Физматлит, 2005. — 486 с.
27. Бабин А.Б., Вишик М.И. Атракторы эволюционных уравнений. — М.: Наука, 1989. — 294 с.
28. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 368 с.
29. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
30. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.

Поступила 18.03.2010