УДК 519.3 + 517.98

И.В. ОРЛОВ

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ КОМПАКТЫ В ℓ_p

Ключевые слова: *компактный эллипсоид, компактный экстремум, компактная производная, компактное вложение, индуктивный предел*.

Известны классические критерии компактности в ℓ_p и c_0 (см., например, [1 IV.13.3, IV.13.9]). Однако ряд экстремальных задач требует более удобного и геометрического описания компактных множеств в ℓ_p. Один из подходящих способов решения этих задач — описание достаточно простой системы у*ниверсальных компактов*, поглощающих все остальные компакты в описываемом пространстве.

В работах [2–6] компактные эллипсоиды как универсальные компакты в ℓ_2 использовались для получения условий компактного экстремума и для исследования компактно-аналитических свойств вариационных функционалов в пространстве Соболева W_2^1. Кроме того, потребность в подобной технике в ℓ_p, $1 \le p < \infty$, возникла в связи с теоремами типа Радона–Никодима для интеграла Бохнера [7].

В разд. 1 настоящей работы введено понятие эллипсоида в ℓ_p и обобщен со случая ℓ_2 на общий случай ℓ_p, $1 \le p < \infty$, хорошо известный критерий компактности эллипсоида (теорема 1).

Разделы 2–4 содержат основные результаты. В разд. 2 показано, что компактные эллипсоиды в ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ и c_0 — универсальные компакты, т.е. поглощают все остальные компакты (теоремы 2–4). В разд. 3, в случае произвольного банахова пространства, показано, что подпространства, порожденные всеми абсолютно выпуклыми компактами, образуют индуктивную шкалу банаховых пространств, индуктивный предел которой совпадает с исходным пространством (теорема 5).

На этой основе в разд. 4 показано, что в случае пространств ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ и c_0 тот же эффект возникает, если использовать только подпространства, порожденные компактными эллипсоидами. В связи с этим существенно улучшаются свойства соответствующих индуктивных шкал, включая переход к компактным вложениям (теоремы 7, 8).

В разд. 5 дан обзор приложений к компактной дифференцируемости и компактным экстремумам вариационных функционалов (теоремы 9, 10).

1. КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ ЭЛЛИПСОИДОВ В ℓ_p $(1 \le p < \infty)$

Определение 1. Для заданной последовательности положительных чисел $\varepsilon = (\varepsilon_k)_1^\infty$ назовем эллипсоидом C_ε (с полуосями ε_k) множество вида

(i) $C_\varepsilon = \left\{ x = (x_k)_1^\infty \in \ell_p \;\middle|\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} (|x_k|^p / \varepsilon_k^p) \le 1 \right\}$, если $1 \le p < \infty$;

(ii) $C_\varepsilon = \left\{ x = (x_k)_1^\infty \in \ell_\infty \;\middle|\; \sup\limits_{k \ge 1} (|x_k| / \varepsilon_k) \le 1 \right\}$, если $p = \infty$.

Обобщим на случай $1 \le p \le \infty$ известный для случая $p = 2$ критерий компактности [8].

Теорема 1. Эллипсоид $C_\varepsilon \subset \ell_p$ ($1 \le p \le \infty$) компактен тогда и только тогда, когда $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Доказательство. 1. Допустим, что $\varepsilon_k \not\to 0$. Тогда $\varepsilon_{k_n} \ge \varepsilon_0 > 0\,(n \in N)$ для некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательности $\{\varepsilon_{k_n}\}_1^\infty$. Обозначим

$$E_{(k_n)} = \{x = (0, \dots, 0, x_{k_1}, 0, \dots, 0, x_{k_2}, 0, \dots) \mid x \in \ell_p\}.$$

Тогда $E_{(k_n)}$ — замкнутое подпространство ℓ_p и пересечение $C_\varepsilon \cap E_{(k_n)}$ содержит некомпактный шар радиуса ε_0, откуда вытекает некомпактность C_ε. Таким образом, необходимость условия теоремы 1 доказана.

2. Проверим теперь достаточность этого условия. Следует проверить ограниченность множества $C_\varepsilon \subset \ell_p$ в случае $\varepsilon_k \to 0$.

• Пусть $1 \le p < \infty$. Фиксируем $\delta > 0$ и выбираем такое число N, чтобы

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x|^p = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|x|^p}{\varepsilon_k^p} \cdot \varepsilon_k^p \le \max_{k>N} \varepsilon_k^p \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|x|^p}{\varepsilon_k^p} \le \max_{k>N} \varepsilon_k^p \le \left(\frac{\delta}{2}\right)^p \tag{1}$$

для всех $x = (x_k)_1^\infty \in C_\varepsilon$. Обозначим

$$\ell_p^N = \{x^N = (x_1, \ldots, x_N; 0, 0, \ldots) \,|\, x \in \ell_p\}, \; C_\varepsilon^N = C_\varepsilon \cap \ell_p^N.$$

Так как C_ε^N — компакт, то в C_ε^N можно подобрать конечную $\frac{\delta}{2}$-сеть $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Для произвольного $x \in C_\varepsilon$ выберем такое y_i, чтобы $\|x^N - y_i\|_{\ell_p} < (\delta/2)$. Отсюда с учетом (1) следует

$$\|x - y_i\|_{\ell_p} \le \|x - x^N\|_{\ell_p} + \|x^N - y_i\|_{\ell_p} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Таким образом, $\{y_1, \ldots, y_m\}$ — конечная δ-сеть в C_ε, следовательно, C_ε вполне ограничено в ℓ_p.

• В случае $p = \infty$ достаточно вместо (1) применить неравенство

$$\sup_{k>N} |x_k| = \sup_{k>N} \left(\frac{|x_k|}{\varepsilon_k} \cdot \varepsilon_k\right) \le \max_{k>N} \varepsilon_k \cdot \sup_{k>N} \frac{|x_k|}{\varepsilon_k} \le \max_{k>N} \varepsilon_k \le \frac{\delta}{2}$$

и затем повторить окончание предыдущего доказательства.

Замечание 1. 1. Ясно, что результат теоремы 1 переносится на подпространства пространств ℓ_p, а также на пространства $\ell_p(\rho)$ с весом $\rho = (\rho_k)_1^\infty$ при

$$\|x\|_{\ell_p(\rho)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k|/\rho_k)\right)^{1/p} \text{ и } C_\varepsilon = \left\{x \in \ell_p(\rho) \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{\varepsilon_k} \cdot \varepsilon_k\right)^p \le 1\right\} \quad (1 \le p < \infty),$$

$$\|x\|_{\ell_\infty(\rho)} = \sup_{k \ge 1} (|x_k|/\rho_k) \text{ и } C_\varepsilon = \left\{x \in \ell_\infty(\rho) \,\middle|\, \sup_{k \ge 1} \left(\frac{|x|}{\varepsilon_k} \cdot \rho_k\right) \le 1\right\} \quad (p = \infty)$$

соответственно.

2. Любой компактный эллипсоид C_ε из ℓ_∞ содержится в c_0 ввиду $\varepsilon_k \to 0$.

2. КОМПАКТНЫЕ ЭЛЛИПСОИДЫ КАК УНИВЕРСАЛЬНЫЕ КОМПАКТЫ В ℓ_p И c_0

Термином «*универсальные компакты*» в настоящей статье будем называть систему абсолютно выпуклых компактных множеств, поглощающих все остальные компакты в заданном банаховом пространстве. Обобщим на случаи пространств ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ и $c_0 \subset \ell_\infty$ теорему об универсальных компактных эллипсоидах [2, теорема 1.2]. Сначала рассмотрим случай $1 < p < \infty$.

Теорема 2. Замкнутое множество $C \subset \ell_p \, (1 \le p < \infty)$ компактно тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором компактном эллипсоиде C_ε из ℓ_p.

Доказательство теоремы 2 основано на двух леммах. Первая из них является обобщением известного свойства положительных рядов (см., например, [9]), с дополнением оценки суммы ряда.

Лемма 1. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ — строго положительный сходящийся ряд, $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ $(n \in N)$, $S = r_1$, $1 < p < \infty$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n / (r_n)^{1/p})$ также сходится. При этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n}{(r_n)^{1/p}} \le \frac{a_1}{S^{1/p}} + \frac{p}{p-1} \cdot S^{(p-1)/p}. \tag{2}$$

Доказательство. Не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что $a_n \downarrow 0$. Пусть

$$f(x) \equiv a_n \quad (n \le x \le n+1,\ n \in N), F(x) = \int_1^{\infty} f(t)\,dt \quad (1 \le x < \infty),$$

$$\varphi(x) = f(x) / (S - F(x))^{1/p} \quad (1 \le x < \infty).$$

При этом

$$S = F(\infty) = \int_1^{\infty} f(t)\,dt.$$

Тогда при каждом $n \in N$

$$\varphi(n) = \frac{f(n)}{(S - F(n))^{1/p}} = \frac{a_n}{\left(\int_n^{\infty} f(t)\,dt\right)^{1/p}} = \frac{a_n}{\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)^{1/p}} = \frac{a_n}{(r_n)^{1/p}}. \tag{3}$$

Следовательно, применяя к ряду (2) интегральный признак сходимости и равенство (3), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(r_n)^{1/p}} \le \frac{a_1}{S^{1/p}} + \int_1^{\infty} \varphi(t)\,dt = \frac{a_1}{S^{1/p}} + \int_1^{\infty} \frac{f(t)dt}{(S - F(t))^{1/p}} = \frac{a_1}{S^{1/p}} - \int_1^{\infty} \frac{d(S - f(t))}{(S - F(t))^{1/p}} =$$

$$= \frac{a_1}{S^{1/p}} - \frac{p}{p-1} (S - F(t))^{p/(p-1)} \Bigg|_1^{\infty} = \frac{a_1}{S^{1/p}} + \frac{p}{p-1} S^{(p-1)/p}.$$

Замечание 2. В случае $p = 1$ ряд из (2) может расходиться. Если $a_n = 1/n^2$ $(n \in N)$, то

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}, \text{ откуда } \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_n}{r_n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Следующая лемма — известный критерий компактности в ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ ([1, VI.13.9]; см. также [10]).

Лемма 2. Замкнутое множество $C \subset \ell_p$ $(1 \le p < \infty)$ компактно тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x = (x_k)_1^{\infty} \in C} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p \right) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{4}$$

Замечание 3. В случае $p = \infty$ аналог условия (4), очевидно, неверен, поскольку, вообще говоря, $\sup_{k \ge n} |x_k| \not\to 0$ при $n \to \infty$ даже для $C = \{x\}$.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Достаточность утверждения теоремы очевидна. Предположим обратное, пусть C — компакт в ℓ_p $(1 < p < \infty)$. Положим

$$(\varepsilon_k)^p = \left(\sup_{x \in C} \sum_{n=k}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \quad (k \in N);\ M_C = \sup_{x \in C} \|x\|_{\ell_p}.$$

Согласно лемме 2 $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Положим $\varepsilon = (\varepsilon_k)_1^\infty$. Тогда с учетом леммы 1 получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^p}{\varepsilon_k^p} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^p}{\left(\sum_{n=k}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}} \le \frac{|x_1|^p}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}} + \frac{p}{p-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{(p-1)/p} =$$

$$= \frac{|x_1|^p}{\|x\|_{\ell_p}} + \frac{p}{p-1} \|x\|_{\ell_p}^{p-1} = \frac{|x_1|^p}{\|x\|_{\ell_p}^p} \cdot \|x\|_{\ell_p}^{p-1} + \frac{p}{p-1} \|x\|_{\ell_p}^{p-1} \le$$

$$\le \left(1 + \frac{p}{p-1}\right) \|x\|_{\ell_p}^{p-1} \le \left(1 + \frac{p}{p-1}\right) M_C^{p-1}$$

для каждого $x = (x_k)_1^\infty \in N$. Отсюда следует включение

$$C \subset \left(1 + \frac{p}{p-1}\right) M_C^{p-1} \cdot C_\varepsilon = C_{(1 + (p/(p-1))) M_C^{p-1} \cdot C_\varepsilon}.$$

Рассмотрим теперь случай $p = 1$.

Теорема 3. Замкнутое множество $C \subset \ell_p$ компактно тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором эллипсоиде C_ε из ℓ_1.

Доказательство. Достаточность утверждения теоремы очевидна. Предположим обратное, пусть C компактно в ℓ_1. Фиксируя произвольное $p > 1$ и полагая

$$C^{1/p} = \{x' = (x'_k)_1^\infty \in \ell_p \,|\, \exists x = (x_k)_1^\infty \in C : |x'_k| \le |x_k|^{1/p} \ (k \in N)\}, \tag{5}$$

из (5) и леммы 2 получаем

$$\sup_{x' \in C^{1/p}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |x'_k|^p\right) \le \sup_{x \in C} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|\right) \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Следовательно, в силу той же леммы множество $C^{1/p}$ предкомпактно в ℓ_p. Отсюда по теореме 2 $C^{1/p}$ содержится в некотором компактном эллипсоиде C_ε из ℓ_p, т.е.

$$C^{1/p} \subset C_\varepsilon = \left\{ x' = (x'_k)_1^\infty \in \ell_p \,\middle|\, \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|x'_k|^p}{\varepsilon_k^p} \le 1 \right\}. \tag{6}$$

В частности, полагая $x'_k = |x_k|^{1/p}$ $(k \in N)$ для произвольного $x = (x_k)_1^\infty \in C$, где $x' = (x'_k)_1^\infty \in C^{1/p}$, из (5) и (6) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{\varepsilon_k^p} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|x'_k|^p}{\varepsilon_k^p} \le 1.$$

Отсюда, обозначая $\varepsilon^p = (\varepsilon_k^p)_{k=1}^\infty$, имеем $C \subset C_{\varepsilon^p}$.

Рассмотрим, наконец, случай пространства $c_0 = \left\{ x = (x_k)_1^\infty \,|\, \lim_{k \to \infty} x_k = 0 \right\}$. Нам потребуется известный критерий компактности в c_0 [1, IV.13.9].

Лемма 3. Замкнутое множество $C \subset c_0$ компактно тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x = (x_k)_1^\infty \in C} \left(\sup_{k \ge n} |x_k| \right) \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Теорема 4. Замкнутое множество $C \subset c_0$ компактно тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором компактном эллипсоиде C_ε из c_0.

Доказательство. Пусть

$$r_n = \sup_{x \in C} \left(\sup_{k \geq n} |x_k| \right).$$

В силу леммы 3 $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем такую последовательность $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$, чтобы $(r_n / \varepsilon_n) \leq 1$ $(n \in N)$. Тогда для произвольного $x^0 = (x_n^0)_1^\infty \in C$ справедливо неравенство

$$\frac{|x_n^0|}{\varepsilon_n} \leq \frac{1}{\varepsilon_n} \cdot \sup_{k \geq n} |x_k^0| \leq \frac{1}{\varepsilon_n} \cdot \sup_{x \in C} \left(\sup_{k \geq n} |x_k| \right) = \frac{r_n}{\varepsilon_n} \leq 1.$$

Таким образом, полагая $\varepsilon = (\varepsilon_n)_1^\infty$, получаем $C \subset C_\varepsilon$, где C_ε — компактный эллипсоид в c_0.

3. СИСТЕМА ПОДПРОСТРАНСТВ, ПОРОЖДЕННЫХ КОМПАКТАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть E — произвольное банахово пространство, $K(E)$ — система всех абсолютно выпуклых компактов в E. Начнем с обобщения результата [2, теорема 3.3], справедливого в гильбертовом случае, на все банаховы пространства.

Определение 2. Для произвольного $C \in K(E)$ обозначим E_C подпространство $\operatorname{span} C \subset E$, снабженное банаховой нормой $\|\cdot\|_C$ [11], порожденной множеством C.

Теорема 5. Система $\{E_C\}_{C \in K(E)}$ образует индуктивную шкалу банаховых пространств относительно непрерывных тождественных вложений. При этом индуктивный предел данной шкалы совпадает с исходным пространством

$$E = \varinjlim_{C \in K(E)} E_C. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим B_1 единичный шар в E. Тогда для любого $C \in K(E)$ ограниченность C влечет включение $C \subset \lambda \cdot B_1$ при некотором $\lambda > 0$, откуда вытекает неравенство $\|\cdot\|_E \leq \lambda \cdot \|\cdot\|_C$ в E_C и непрерывность вложения $E_C \subset_\to E$. Отсюда вытекает непрерывность вложения

$$\varinjlim_{C \in \Lambda(E)} E_C \subset_\to E. \tag{8}$$

Далее, для произвольных $C_1, C_2 \in K(E)$ множество $C_3 = \overline{\mathrm{co}}\,(C_1 \bigcup C_2) \in K(E)$ [11], откуда следует непрерывность вложений $E_{C_1} \subset_\to E_{C_3}$, $E_{C_2} \subset_\to E_{C_3}$. Итак, система $\{E_C\}_{C \in K(E)}$ — индуктивная шкала банаховых пространств.

Докажем теперь непрерывность обратного к (8) вложения

$$E \subset_\to \varinjlim_{C \in \Lambda(E)} E_C =: E_K. \tag{9}$$

Допустим противное: найдется такая окрестность нуля $U \subset E_K$, которая не является окрестностью нуля в E. Тогда для всякого $n \in N$ найдется элемент $x_n \in (1/4^n)(B_1 \setminus U)$. Обозначим C абсолютно выпуклую оболочку множества $\{2^n \cdot x_n\}_{n \in N}$ в E. Так как $\|2^n x_n\|_E \leq (1/2^n) \to 0$, то $C \in K(E)$.

Таким образом, C поглощается множеством U. В то же время

$$(2^n x_n \in C \setminus 2^n U) \Rightarrow (C \setminus 2^n U \neq \varnothing)$$

для всех $n \in N$. Таким образом, получено противоречие. Наконец, из (8) и (9) вытекает (7).

Заметим, что и в значительно более общем случае произвольного полного локально выпуклого пространства (ЛВП) E индуктивность шкалы $\{E_C\}_{C\in\Lambda(E)}$ и непрерывность вложения (8) также справедливы.

Из известной теоремы об индуктивном пределе [11, II.6.1] и равенства (7) немедленно вытекает следствие.

Следствие 1. Пусть E и F — произвольные вещественные банаховы пространства. Тогда $A\in L(E;F)$ в том и только в том случае, если все сужения $A|_{E_C}$, $C\in K(E)$, непрерывны.

Замечание 4. Тем не менее существуют разрывные нелинейные функционалы, все сужения которых на E_C, $\{E_C\}_{C\in K(E)}$, непрерывны. Такая ситуация, например, типична для вариационного функционала (см. [3, 4])

$$\Phi(y)=\int_a^b f(x, y, y')\,dx \quad (y(\cdot)\in W_2^1[a;b]). \tag{10}$$

Опишем теперь более точно непрерывность вложений в шкале $\{E_C\}_{C\in K(E)}$. Очевидно, из включения $C_1\subset\lambda\cdot C_2$ при некотором $\lambda>0$ вытекает неравенство $\|\cdot\|_{C_2}\le\lambda\cdot\|\cdot\|_{C_1}$ в E_{C_1} и, следовательно, непрерывность вложения $E_{C_1}\subset_{\to} E_{C_2}$ $(C_1, C_2\in K(E))$. Однако векторное вложение $E_{C_1}\subset_{\to} E_{C_2}$ не влечет, вообще говоря, включение $C_1\subset\lambda\cdot C_2$ при некотором $\lambda>0$, т.е. не влечет непрерывность вложения $E_{C_1}\subset_{\to} E_{C_2}$.

Пример 1. Пусть $\dim E=\infty$, $x_n\in E$ $(n\in N)$ линейно независимы и $\|x_n\|\downarrow 0$ при $n\to\infty$ в E. Положим $y_n=x_n/\sqrt{\|x_n\|}$ $(n\in N)$, тогда $y_n\to 0$ в E. Обозначим

$$C_1=\overline{\text{abs.co}}\,\{x_n\}_1^\infty,\ C_2=\overline{\text{abs.co}}\,\{y_n\}_1^\infty .$$

Тогда $C_1, C_2\in\Lambda(E)$. Поскольку при любом фиксированном $n\in N$

$$\text{abs.co}\,\{x_1,\dots,x_n\}\subset\frac{1}{\sqrt{\|x_n\|}}\cdot\text{abs.co}\,\{y_1,\dots,y_n\},$$

то $C_1\subset\operatorname{span}C_2=E_{C_2}$. В то же время, поскольку $x_n\in\partial C_1$, $y_n\in\partial C_2$, то $C_1\not\subset\lambda\cdot C_2$ при $0<\lambda</\sqrt{\|x_n\|}$ для всякого фиксированного $n\in N$. Следовательно, C_1 не поглощается C_2, т.е. вложение $E_{C_1}\subset_{\to} E_{C_2}$ разрывно.

В заключение отметим, что, вводя отношение эквивалентности

$$(C_1\sim C_2)\Leftrightarrow(\lambda\cdot C_2\subset C_1\subset\Lambda\cdot C_2,\ 0<\lambda\le\Lambda<\infty) \tag{11}$$

и выбирая систему различных представителей классов эквивалентности $\widetilde{K}(E)\subset K(E)$, мы сохраним структуру шкалы $\{E_C\}_{C\in K(E)}$ с точностью до эквивалентных норм.

4. СИСТЕМА ПОДПРОСТРАНСТВ, ПОРОЖДЕННЫХ КОМПАКТНЫМИ ЭЛЛИПСОИДАМИ В ℓ_p $(1\le p\le\infty)$ И c_0

Покажем, что при наличии в пространстве системы универсальных компактных эллипсоидов описанную выше индуктивную шкалу $\{E_C\}_{C\in K(E)}$ можно заменить конфинальной ей подшкалой $\{E_{C_\varepsilon}\}$, обладающей значительно лучшими свойствами. Далее обозначим Ω_0 множество всех сходящихся к нулю положительных последовательностей $\varepsilon=(\varepsilon_k)_1^\infty$.

Теорема 6. Пусть $E=l_p$ $(1\le p\le\infty)$ либо $E=c_0$. Тогда система банаховых подпространств $\{E_{C_\varepsilon}\}_{\varepsilon\in\Omega_0}$, порожденных компактными эллипсоидами C_ε, образует индуктивную шкалу относительно непрерывных вложений, конфинальную шкале $\{E_C\}_{C\in K(E)}$. В частности,

$$\varinjlim_{\varepsilon\in\Omega_0} E_{C_\varepsilon}=\varinjlim_{C\in K(E)} E_C=E. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть C_{ε^1} и C_{ε^2} — компактные эллипсоиды в E, $\varepsilon^i = (\varepsilon_k^i)_{k=1}^{\infty}$, $i=1,2$. Полагая $\varepsilon_3 = \max(\varepsilon_k^1, \varepsilon_k^2)_{k=1}^{\infty}$, получим $C_{\varepsilon^i} \subset C_{\varepsilon^3}$ в силу определения 1, откуда вытекает непрерывность вложения $E_{C_{\varepsilon^i}} \overset{c}{\subset\to} E_{C_{\varepsilon^3}}$ $(i=1,2)$. Таким образом, система $\{E_{C_\varepsilon}\}_{\varepsilon\in\Omega_0}$ образует индуктивную шкалу банаховых пространств.

Далее, согласно теоремам 2–4 для произвольного $C \in K(E)$ найдется такой компактный эллипсоид C_ε $(\varepsilon \in \Omega_0)$, что $C \subset C_\varepsilon$. Отсюда следует непрерывность вложения $E_C \overset{c}{\subset\to} E_{C_\varepsilon}$, т.е. шкала $\{E_{C_\varepsilon}\}_{\varepsilon\in\Omega_0}$ — конфинальная подшкала шкалы $\{E_C\}_{C\in K(E)}$ и, следовательно, их индуктивные пределы совпадают.

Опишем теперь дополнительные свойства, которыми обладает шкала $\{E_{C_\varepsilon}\}_{\varepsilon\in\Omega_0}$. Прежде всего, в отличие от случая, рассмотренного в примере 1, любое векторное вложение $E_{C_{\varepsilon^1}} \subset\to E_{C_{\varepsilon^2}}$ непрерывно.

Теорема 7. Пусть $E = \ell_p\,(1 \le p \le \infty)$ или $E = c_0$; $\varepsilon^1, \varepsilon^2 \in \Omega_0$. Тогда

$$(E_{C_{\varepsilon^1}} \subset\to E_{C_{\varepsilon^2}}) \Leftrightarrow (E_{C_{\varepsilon^1}} \overset{c}{\subset\to} E_{C_{\varepsilon^2}}) \Leftrightarrow (C_{\varepsilon^1} \subset \lambda \cdot C_{\varepsilon^2} \text{ при некотором } \lambda > 0). \quad (13)$$

Доказательство. Проведем доказательство в случае $E = \ell_p\,(1 \le p \le \infty)$. Допустим, что $E_{C_{\varepsilon^1}} \subset\to E_{C_{\varepsilon^2}}$ (векторно), но $C_{\varepsilon^1} \not\subset \lambda \cdot C_{\varepsilon^2}$ при любом $\lambda > 0$. В силу определения 1 это означает, что

$$\sup_{k\ge1} (\varepsilon_k^1 / \varepsilon_k^2) = \infty.$$

Следовательно, для некоторой подпоследовательности $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ справедливы неравенства

$$(\varepsilon_{k_m}^1 / \varepsilon_{k_m}^2) > m^{(p-1)/p} \quad (m \in N). \quad (14)$$

Положим

$$x_k = \begin{cases} 0 \text{ при } k \ne k_m, \\ \dfrac{1}{\zeta(p)} \cdot (\varepsilon_k^1 / m) \text{ при } k = k_m, \end{cases} \quad (k, m \in N); \; x = (x_k)_1^{\infty}.$$

Тогда $x \in C_{\varepsilon^1}$, но

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^p}{(\varepsilon_k^2)^p} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|x_{k_m}|^p}{(\varepsilon_{k_m}^1)^p} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{k_m}^1}{\varepsilon_{k_m}^2}\right) > \frac{1}{(\zeta(p))^p} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^p} \cdot m^{p-1} = \frac{1}{(\zeta(p))^p} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = \infty,$$

откуда вытекает, что $x \notin E_{C_{\varepsilon^2}}$. Полученное противоречие доказывает импликацию «слева направо» в (13). Обратная импликация очевидна.

Аналогичным образом можно рассмотреть случаи ℓ_1 и c_0.

Далее, основное свойство шкалы $\{E_{C_\varepsilon}\}_{\varepsilon\in\Omega_0}$ состоит в том, что ее можно рассматривать как систему подпространств E, изоморфных исходному пространству, которые плотно и компактно вложены в E.

Теорема 8. Пусть $E = \ell_p$ $(1 \le p \le \infty)$ либо $E = c_0$. Тогда:

(i) пространства E_{C_ε}, $\varepsilon \in \Omega_0$, плотно вложены в E. Точнее,

$$\|x\|_{C_\varepsilon} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^p}{\varepsilon_k^p}\right)^{1/p} \text{ для } E = \ell_p\,(1 \le p < \infty); \; \|x\|_{C_\varepsilon} = \sup_{k\ge1} \frac{|x_k|}{\varepsilon_k} \text{ для } E = c_0,$$

т.е. E является либо взвешенным ℓ_p, либо взвешенным c_0 с весом $1/\varepsilon = (1/\varepsilon_k)_1^\infty$, при этом непрерывные вложения $E_{C_{\varepsilon^1}} \subset\to E_{C_{\varepsilon^2}}$ плотны;

(ii) шкалу $\{E_{C_\varepsilon}\}_{\varepsilon\in\Omega_0}$ можно рассматривать как шкалу с компактными вложениями. Точнее, вложения $E_{C_{\varepsilon^1}} \subset\to E_{C_{\varepsilon^2}}$ компакты тогда и только тогда, когда $\varepsilon_k^1 = o(\varepsilon_k^2)$ при $k\to\infty$. Более того, все вложения $E_{C_\varepsilon} \subset\to E$ компактны.

Доказательство. Утверждение (i) теоремы 8 непосредственно вытекает из определения 1. Проверим утверждение (ii).

• Пусть $x = (x_k)_1^\infty \in C_{\varepsilon^1} \subset \ell_p$ $(1 \le p < \infty)$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| / \varepsilon_k^1)^p \le 1$. Тогда для ℓ_p с весом $\ell_p(1/\varepsilon^2) := \ell_p((1/\varepsilon_k^2)_1^\infty)_1^\infty$ имеем

$$\| (x^k / (\varepsilon_k^1 / \varepsilon_k^2))_1^\infty \|_{\ell_p(1/\varepsilon^2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^p}{(\varepsilon_k^1/\varepsilon_k^2)^p} \cdot \frac{1}{(\varepsilon_k^2)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^p}{(\varepsilon_k^1)^p} \le 1.$$

т.е. $C_{\varepsilon^1} \subset \ell_p$ принимает в $\ell_p(1/\varepsilon^2)$ форму эллипсоида $\widetilde{C}_{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$ с полуосями $(\varepsilon_k^1/\varepsilon_k^2)_1^\infty$. Согласно теореме 1 эллипсоид $\widetilde{C}_{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$ компактен (т.е. вложение $E_{C_{\varepsilon^1}} \subset\to E_{C_{\varepsilon^2}}$ компактно) тогда и только тогда, когда $(\varepsilon_k^1/\varepsilon_k^2) \to 0$.

• Аналогично если $x = (x_k)_1^\infty \in C_{\varepsilon^1} \subset c_0$, т.е. $\sup_{k\ge1} (|x_k| / \varepsilon_k^1) \le 1$, то для c_0 с весом $c_0(1/\varepsilon^2) := c_0((1/\varepsilon_k^2)_1^\infty)_1^\infty$ имеем

$$\| (x^k / (\varepsilon_k^1 / \varepsilon_k^2))_1^\infty \|_{c_0(1/\varepsilon^2)} = \sup_{k\ge1} \frac{|x_k|}{\varepsilon_k^1/\varepsilon_k^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_k^2} = \sup_{k\ge1} \frac{|x_k|}{\varepsilon_k^1} \le 1,$$

т.е. $C_{\varepsilon^1} \subset c_0$ принимает в $c_0(1/\varepsilon^2)$ форму эллипсоида $\widetilde{C}_{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$ с полуосями $(\varepsilon_k^1/\varepsilon_k^2)_1^\infty$. Остается, следуя плану данного доказательства, применить теорему 1.

Замечание 5. 1. Как известно [12, 13], любая счетная индуктивная шкала банаховых пространств с компактными вложениями (шкала E'Silva) образует так называемый *регулярный* индуктивный предел. Напомним, что в этом случае множество $B \subset E$ ограничено тогда и только тогда, когда B содержится и ограничено в каком-либо из пространств, образующих предел. В то же время в случае пространств $E = \ell_p$ $(1 \le p \le \infty)$ либо $E = c_0$ шары из E не содержатся ни в каком E_{C_ε}, $\varepsilon \in \Omega_0$. Таким образом, в данном случае представление (12) служит примером *нерегулярного* индуктивного предела, образованного *несчетной* индуктивной шкалой банаховых пространств с компактными вложениями.

2. Введем отношение эквивалентности в шкале $\{E_{C_\varepsilon}\}_{\varepsilon\in\Omega_0}$:

$$(C_{\varepsilon^1} \sim C_{\varepsilon^2}) \Leftrightarrow \left(0 < \lambda \le \frac{\varepsilon_k^1}{\varepsilon_k^2} \le \Lambda < \infty \right) \Leftrightarrow (E_{C_{\varepsilon^1}} \cong E_{C_{\varepsilon^2}}),$$

в соответствии с (11) и выберем систему различных представителей классов эквивалентности $\{C_{\widetilde{\varepsilon}}\}_{\widetilde{\varepsilon}\in\widetilde{\Omega}_0}$, в результате получим фундаментальную систему компактных эллипсоидов. При этом структура шкалы $\{E_C\}_{C\in\Lambda(E)}$ сохраняется с точностью до эквивалентности норм.

5. ПРИЛОЖЕНИЯ К K-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ И K-ЭКСТРЕМУМАМ

Приведем введенное в [5, 6] понятие K-дифференцируемости. Всюду далее E и F — вещественные полные ЛВП, $K(E)$ — система всех абсолютно выпуклых компактных множеств в E.

Определение 3. Скажем, что отображение $f: E \to F$, определенное в некоторой окрестности точки $x \in E$, K-дифференцируемо (компактно дифференцируемо) в точке $x \in E$, если все сужения $f|_{x+E_C}$, $C \in K(E)$, дифференцируемы по Фреше в этой точке. Линейный оператор $f'_K(x): E \to F$, определенный равенствами $f'_K(x)h = f'_{E_C}(x)h$, $h \in E_C$, $C \in K(E)$, назовем K-производной f в точке x. K-производные высших порядков определяются аналогично.

Замечание 6. 1. В случае, когда E — банахово пространство, $f'_K(x) \in L(E; F)$ по следствию 1.

2. Определение K-дифференцируемости можно переписать в виде

$$(f(x+th) - f(x) - f'_K(x)(th)/t) \rightrightarrows 0 \text{ при } t \to +0, \; h \in C \; (\forall C \in \Lambda(E)). \qquad (15)$$

Идея этого определения принадлежит Ж. Адамару. В случае псевдотопологических векторных пространств определение (15) исследовано в [14]. Более общее понятие дифференцируемости относительно некоторой системы ограниченных множеств в E исследовано, например, в [15].

3. Даже в случае гильбертовых пространств существуют K-дифференцируемые функционалы, не дифференцируемые по Фреше. Например, И.В. Скрыпник [16] показал, что вариационный функционал (10) не является дважды дифференцируемым по Фреше, за исключением случая «чистой квадратичности» интегранта по y'. Тем не менее при достаточно общем условии «псевдоквадратичности» [3, 4] функционал (10) дважды K-дифференцируем. Например, функционалы

$$\Phi_1(y) = \int_a^b y' \cos xy' \, dx \text{ и } \Phi_2(y) = \int_a^b \frac{y' dy}{1+y'^2} \quad (y(\cdot) \in W_2^1([a; b]))$$

нигде не являются дважды сильно дифференцируемыми, но всюду дважды K-дифференцируемы.

Для пространств с системой универсальных компактных эллипсоидов из теоремы 6 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 9. Пусть $E = \ell_p$ $(1 \le p \le \infty)$ либо $E = c_0$, $f: E \to F$. Тогда f K-дифференцируемо в точке $x \in E$ в том и только в том случае, если все сужения $f|_{x+E_{C_\varepsilon}}$, $\varepsilon \in \Omega_0$, сильно дифференцируемы в этой точке. Другими словами, f K-дифференцируемо в x, если

$$f(x+h) - f(x) - f'_K(x)h = o(\| h \|_{E(1/\varepsilon)})$$

для произвольного веса $\frac{1}{\varepsilon} := \left(\frac{1}{\varepsilon_k}\right)_1^\infty$ при $\varepsilon_k \to 0$.

Аналогично K-производным вводится понятие K-экстремума.

Определение 4. Скажем, что функционал $f: E \to R$, имеет K-экстремум (компактный экстремум) в точке $x \in E$, если все сужения $f|_{x+E_C}$, $C \in K(E)$, имеют локальный экстремум в этой точке.

Приведем достаточное условие K-минимума вариационного функционала в W_2^1, полученное в [5] с помощью техники компактных эллипсоидов в ℓ_2. Такие экстремумы, как правило, нелокальны.

Теорема 10. Допустим, что вариационный функционал (10) при $y(\cdot) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 [a; b]$, $f \in C^2$, удовлетворяет следующим условиям на некоторой экстремали $y(\cdot) \in W_2^2 [a; b]$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, y') > 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(x, y, y') > 0, \ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \right)^2 \right) (x, y, y') > 0$$

для всех $x \in [a; b]$. Тогда Ф имеет сильный К-минимум в $y(\cdot)$.

В заключение заметим, что техника компактных эллипсоидов в области значений отображений использовалась нами совместно с Ф.С. Стонякиным в [7] в связи с теоремами типа Радона–Никодима для интеграла Бохнера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Часть 1: Общая теория. — М.: Изд-во иностр. лит, 1962. — 896 с.
2. Орлов И.В. Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — **29**. — С. 165–175.
3. Orlov I.V. Compact extrema: general theory and its applications to variational functionals // Operator Theory: Advances and Applications. — Basel; Boston; New York: Birkhäuser. — 2009. — **190**. — P. 397–417.
4. Божонок Е.В. Компактные экстремумы и компактно-аналитические свойства основного вариационного функционала в W_2^1: Дисс. … канд. физ.-мат. наук. — Симферополь: ТНУ, 2008. — 160 с.
5. Орлов И.В. Нормальная дифференцируемость и функциональные экстремумы в локально выпуклых пространствах // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 4. — С. 24–35.
6. Orlov I.V. Extreme problems and scales of the operator spaces // North-Holland Math. Stud. — Amsterdam; Boston: Elsevier, 2004. — **197**. — P. 209–228.
7. Orlov I.V., Stonyakin F.S. Strong compact properties of the mappings and K-property of Radon–Nikodym // Methods of Functional Analysys and Topology . — 2010. — **16**, № 2. — P. 183–196.
8. Богданський Ю.В., Подколзін Г.Б., Чаповський Ю.А. Функціональний аналіз. Збірник вправ. — К.: Політехніка, 2005. — 234 с.
9. Rudin W. Real and complex analysis. — New York: McGraw-Hill, 1974. — 320 p.
10. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. — М.: MCNMO, 2004. — 213 с.
11. Шеффер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360 с.
12. Gindikin S.G., Volevich L.R. Distributions and convolution equations. — New York: Gordon and Breach Sc. Publ., 1992. — 465 p.

13 Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Физматгиз, 1959. — 684 с.

14. Сова М. Общая теория дифференцируемости в линейных топологических пространствах // Chzehosl. Math. J. — 1966. — **16**. — P. 339–362.
15. Лобанов С.Г. Цепное правило и его обращение для отображений в локально выпуклые пространства // Мат. заметки. — 1989. — **45**, № 1. — С. 339–362.
16. Скрыпник И.В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. — Киев: Наук. думка, 1973. — 219 с.

Поступила 19.03.2010