УДК 519.854

В.А. МИХАЙЛЮК

ОБ ОЦЕНКАХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНОСТИ ПОСТОПТИМАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Ключевые слова: *постоптимальный анализ, сложность метода ветвей и границ, вполне унимодулярные матрицы.*

ВВЕДЕНИЕ

Проведение постоптимального анализа дискретных оптимизационных задач [1–5] предусматривает решение следующих вопросов:

- как изменится оптимальное решение конкретной задачи, если изменить значения ее коэффициентов;
- как использовать информацию, полученную при решении некоторой задачи тем или иным методом, для решения измененной задачи;
- какую минимальную дополнительную информацию необходимо накопить при решении исходной задачи в целях эффективного решения измененной задачи.

Областью применения постоптимального анализа является анализ деятельности некоторого реального процесса, описываемого моделью дискретной оптимизации, который лежит в основе различного рода нововведений. Кроме того, при небольших изменениях в исходных данных модели дискретного программирования, как правило, неустойчивы и непредсказуемы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ $\mathrm{Compl}\ (I, \{\delta(I)\})$, $\mathrm{Compl}\ (\Pi)$

Введем формализацию понятия эффективного проведения постоптимального анализа для задач дискретной оптимизации.

Пусть Π — некоторая NP-трудная оптимизационная проблема (возможно, и NP-полная), I — экземпляр проблемы (задачи) Π. Каждому экземпляру I задачи Π поставлено в соответствие множество $\{\delta(I)\}$ экземпляров задачи Π. Постоптимальный анализ для пары $(I, \{\delta(I)\})$ дает ответ на вопрос : как, зная оптимальное решение экземпляра I $(\{\mathrm{opt}\ (I)\})$, найти оптимальное решение (решения) I' задач с $\{\delta(I)\}$ $(\{\mathrm{opt}\ (I')\})$. Введем понятие эффективного постоптимального сведения экземпляров задачи $\Pi(\infty_{\mathrm{efp}})$. Будем считать, что функция $f(n)$ полиномиального роста $(f(n) = \mathrm{poly}\ (n))$, если для некоторой константы c при достаточно больших n выполняется $f(n) \le n^c$; $f(n) = O(g(n))(f(n) = \Omega(g(n)))$, если для некоторой константы c при достаточно больших n $f(n) \le cg(n)(f(n) \ge cg(n))$.

Определение 1. Будем считать, что экземпляр $I' \in \Pi$ эффективно постоптимально сводится к экземпляру $I \in \Pi$, если существует такая полиномиально вычислимая на детерминированной машине Тьюринга (ДМТ) функция $f(\cdot)$, что $\mathrm{opt}(I') = f(\mathrm{opt}\ (I))$, обозначение $I' \infty_{\mathrm{efp}} I$ (f — сложность, число тактов ДМТ).

Определение 2. Для фиксированного экземпляра $I \in \Pi$ обозначим

$$C(I) = \{I' : I' \infty_{\mathrm{efp}} I\}.$$

Определение 3. Проведение постоптимального анализа для пары $(I, \{\delta(I)\})$ будет эффективным, если $\{\delta(I)\} \subseteq C(I)$.

Пусть $t(I, I')$ — сложность (число шагов, тактов ДМТ) получения оптимального решения I', исходя из оптимального решения I.

Определение 4. $\mathrm{Compl}\ (I, \{\delta(I)\}) = \max\limits_{I' \in \{\delta(I)\}} \{t(I, I')\}$.

Величину $\mathrm{Compl}\ (I, \{\delta(I)\})$ можно считать числовой характеристикой сложности постоптимального анализа для пары $(I, \{\delta(I)\})$. Согласно определению 3 при проведении эффективного постоптимального анализа величина $\mathrm{Compl}\ (I, \{\delta(I)\})$ — не более чем полином от размерности задачи.

Определение 5. Для NP-трудной (возможно, полной) оптимизационной проблемы Π положим

$$\mathrm{Compl}\ (\Pi) = \max_{I, \{\delta(I)\}} \{\mathrm{Compl}\ (I, \{\delta(I)\})\}.$$

Величину $\mathrm{Compl}\ (\Pi)$ можно считать числовой характеристикой сложности проведения постоптимального анализа проблемы Π.

Представляет интерес выделение для экземпляра $I \in \Pi$ таких $\{\delta(I)\}$, что $\mathrm{Compl}\ (I, \{\delta(I)\})$ — не более чем полином от размерности задачи, а также оценка сверху и снизу величины $\mathrm{Compl}\ (\Pi)$ для конкретных проблем Π.

Замечание 1. Постоптимальный анализ той или иной задачи дискретного программирования проводится на основе некоторого определенного подхода (метода), применяемого для решения этой задачи. Известны процедуры постоптимального анализа задач целочисленного программирования, основанные на методе отсечений Гомори, на методе ветвей и границ [3, 4]. Таким образом, можно считать, что функции $\mathrm{Compl}\ (I, \{\delta(I)\})$, $\mathrm{Compl}\ (\Pi)$ зависят и от метода (алгоритма) решения исходной задачи I.

ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ДЛЯ $\mathrm{Compl}(\Pi)$

Пусть Π — некоторая NP-полная оптимизационная проблема.

Теорема 1. $\mathrm{Compl}(\Pi) = O(2^{\mathrm{poly}(n)})$.

Доказательство. Обозначим $\mathrm{DTIME}(T(n))$ (соответственно $\mathrm{NTIME}(T(n))$) класс сложности проблем, для решения которых на детерминированной (недетерминированной) машине Тьюринга требуется время $O(T(n))$. Известно [6], что

$$P = \bigcup_{\mathrm{poly}(n)} \mathrm{DTIME}(\mathrm{poly}(n)),\ NP = \bigcup_{\mathrm{poly}(n)} \mathrm{NTIME}(\mathrm{poly}(n)),\ NP \subseteq \mathrm{EXPTIME}, \tag{1}$$

$$\mathrm{EXPTIME} = \bigcup_{\mathrm{poly}(n)} \mathrm{DTIME}(2^{\mathrm{poly}(n)}). \tag{2}$$

Пусть $\{\Pi\}$ — множество всех экземпляров задачи Π. Рассмотрим экземпляр $I_1 \in \{\Pi\}$ такой, что оптимальное решение I_1 не дает никакой информации для решения произвольной $I' \in \{\Pi\} \setminus I_1$ (для каждой конкретной задачи Π такой экземпляр I_1 всегда найдется). Для такой задачи I_1 положим $\{\delta(I_1)\} = \{\Pi\} \setminus I_1$ и рассмотрим пару $(I_1, \{\delta(I_1)\})$. Согласно определениям 4 и 5 и в силу выбора I_1 и $\{\delta(I_1)\}$ будем иметь

$$\mathrm{Compl}(\Pi) = \max_{I, \{\delta(I)\}} \{\mathrm{Compl}(I, \{\delta(I)\})\} =$$

$$= \max_{I} \{ \max_{\{\delta(I)\}} \{\mathrm{Compl}(I, \{\delta(I)\})\}\} = \max_{I} \{ \max_{\{\delta(I)\}} \{ \max_{I' \{\delta(I)\}} \{t(I, I')\}\}\} \le$$

$$\le \max_{I_1} \{ \max_{I' \in \{\delta(I_1)\}} \{t(I_1, I')\} \le \max_{I' \in \{\Pi\}} \{\mathrm{time}(I')\},$$

где $\mathrm{time}(I')$ — временная сложность ДМТ для решения I'. Согласно (1), (2) $\max\limits_{I' \in \{\Pi\}} \{\mathrm{time}(I')\} = O(2^{\mathrm{poly}(n)})$, что и доказывает теорему 1.

Установим нижнюю оценку $\mathrm{Compl}(\Pi)$ в классе методов ветвей и границ для задачи Π одномерной задачи о ранце.

Процесс решения задачи методом ветвей и границ можно представить в виде дерева ветвления, вершинам которого соответствуют создаваемые подзадачи. Сложность решения задачи методом ветвей и границ принято определять как число вершин V_a в дереве ветвления [7]. В обоих случаях эта величина имеет один и тот же порядок, так как число концевых вершин связано с общим числом вершин в дереве ветвления соотношением $V_a = 2V_t - 1$.

Рассмотрим известную задачу Финкельштейна [8]:

$$\max \{ f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} 2x_i \}, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} 2x_j \le 2\left[\frac{n}{2}\right] + 1, \tag{4}$$

$$x_i \in \{0,1\},\quad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Все множество оптимальных решений этой задачи состоит из всех векторов, содержащих $\left[\frac{n}{2}\right]$ единичных и $\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ нулевых компонент.

Теорема 2 [8]. $V_a = 2C_{n+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} - 1$, где V_a — число вершин в дереве ветвлений.

Если сложность решения задачи методом ветвей и границ — число концевых вершин в дереве ветвления, то можно показать, что при любом способе выбора очередной подзадачи и переменной для ветвления сложность решения (3)–(5) равна $V_t = C_{n+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$.

В [9] показано, что если для ветвления выбирается переменная с наибольшим весом, то сложность решения задачи о ранце с n переменными не превосходит V_t, т.е. задача (3)–(5) имеет максимальную сложность решения.

Теорема 3. При использовании метода ветвей и границ для решения П

$$\mathrm{Compl}\,(\Pi) = \Omega\left(\frac{2^n}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Доказательство. Согласно определениям 4 и 5 нужно показать, что существуют такие экземпляры $I_1, I' \in \{\delta(I_1)\}$, что $t(I_1, I') \ge c\dfrac{2^n}{\sqrt{n+1}}$, $c = \mathrm{const}$. В качестве I_1 возьмем задачу о ранце:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\right\}, \tag{3$'$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} 2x_j \le 2\left[\frac{n}{2}\right], \tag{4$'$}$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5$'$}$$

а в качестве I' — задачу (3)–(5) (задачи I_1 и I' отличаются правыми частями (4) и $(4')$. Оптимальное решение задачи I_1 (с $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ единицами) — допустимое решение I'. Согласно теореме 2 сложность решения задачи I' (задачи Финкельштейна) равна $V_t = C_{n+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ — числу концевых вершин в дереве ветвления. Таким образом, необходимо перебрать все концевые вершины V_t дерева ветвления для доказательства оптимальности полученного решения (при этом оценки вообще не способствуют уменьшению перебора), поэтому

$$t(I_1, I') \ge V_t = C_{n+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \sim C_{n+1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \sim \frac{2^{n+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi(n+1)}} = c\frac{2^n}{\sqrt{n+1}},$$

где $c = \dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}$.

Замечание 2. В [10] показано, что существуют задачи, сложность решения которых методом ветвей и границ превосходит асимптотически в $\dfrac{3}{2} - \varepsilon$ раз сложность решения задачи Финкельштейна (3)–(5) с тем же числом переменных. Это дает основание предположить, что оценка из теоремы 3 вряд ли улучшаема (по крайней мере, в классе методов ветвей и границ для одномерной задачи о ранце).

ВЫДЕЛЕНИЕ КЛАССОВ ЗАДАЧ О ПОКРЫТИИ, ДЛЯ КОТОРЫХ $\mathrm{Compl}\,(I, \{\delta(I)\}) = O(\mathrm{poly}\,(n))$

NP-полную задачу о покрытии рассмотрим в постановке

$$\min\left\{f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \,|\, x \in Q(A)\right\},$$

$$Q(A) = \left\{x \in B^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \ge 1, \ i = 1, \ldots, m\right\}, \tag{6}$$

$B^n = \{0,1\}^n$, $A = \{a_{i,j}\}$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$; A — (m,n)-булева матрица $(m \le n)$; $c_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Определение 6 [11, 12]**.** Матрица $A = \{a_{ij}\}$ $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$ называется вполне унимодулярной, если любой ее минор равен 0, +1 или −1.

В частности, любой элемент такой матрицы равен 0, +1 или −1.

Рассмотрим характеризацию Хоффмана–Краскала (Hoffman–Kraskal) вполне унимодулярных матриц, связывающую теорию вполне унимодулярных матриц с линейным целочисленным программированием.

Теорема 4 [11, 12] (Хоффман, Краскал). Целочисленная матрица A вполне унимодулярна тогда и только тогда, когда для любого целочисленного вектора b полиэдр $\{x \mid x \ge 0,\ Ax \le b\}$ целочисленный.

Следствие 1 [11, 12]. Целочисленная матрица A вполне унимодулярна тогда и только тогда, когда для любых целочисленных векторов a, b, c, d все вершины полиэдра $\{x \mid c \le x \le d;\ a \le Ax \le b\}$ целочисленны.

Следствие 2 [11, 12]. Целочисленная матрица A вполне унимодулярна тогда и только тогда, когда все вершины полиэдров

$$\{x \mid x \le c,\ Ax \le b\}, \{x \mid x \le c,\ b \le Ax\}, \qquad \{x \mid c \le x,\ Ax \le b\}, \{x \mid c \le x, b \le Ax\}$$

целочисленны для любого целочисленного вектора b и некоторого целочисленного вектора c.

Следствие 3. Полиэдр задачи о покрытии (6) $\{x \mid x \ge 0,\ 1 \le Ax\}$ является целочисленным, если (0,1)-матрица A вполне унимодулярна.

Следствие 3 получаем из следствий 1 и 2.

Используем полиномиальные алгоритмы в линейном программировании [11, 12] (метод эллипсоидов Хачияна, метод Кармаркара). Согласно этим результатам, если матрица A вполне унимодулярна, то задачу о покрытии (6) можно решить с полиномиальной сложностью (следствие 3).

Примером вполне унимодулярных матриц являются матрицы сетей (матрицы путей, матрицы хорд). Пусть $D = (V, A)$ — ориентированный граф и $T = (V, A_0)$ — произвольное ориентированное дерево с тем же множеством вершин V. Рассмотрим $(|A_0| \times |A|)$-матрицу M, определяемую следующим образом. Для всех $a' \in A_0$ и $a = (v, w) \in A$ положим:

- $M_{a',a} = +1$, если единственный ориентированный $(v-w)$-путь в T проходит через a' в прямом направлении;
- $M_{a',a} = -1$, если единственный ориентированный $(v-w)$-путь в T проходит через a' в обратном направлении;
- $M_{a',a} = 0$, если единственный ориентированный $(v-w)$-путь в T не проходит через a'.

Матрицы, получающиеся таким образом, называются сетевыми. Произвольную $(0,1)$-матрицу сети можно получить с ориентированного дерева T, выбрав в нем некоторые ориентированные пути, а в качестве столбцов взять матрицы векторов инциденций этих путей (что рассматривается как векторы в $R^{|A_0|}$, где A_0 — множество дуг в T). В частности, матрица инциденций двудольного неориентированного графа — сетевая $(0,1)$-матрица.

Однако существуют вполне унимодулярные (0,1)-матрицы, которые не являются матрицами сетей, например матрица B^{10} [11]:

$$B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будем рассматривать преобразования и операции над матрицами, сохраняющие полную унимодулярность.

Класс матриц сетей (и вполне унимодулярных матриц) замкнут относительно ведущих преобразований (симплекс-преобразований с ведущим элементом ε), т.е. операций вида

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & c \\ b & D \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\varepsilon & \varepsilon c \\ \varepsilon b & D - \varepsilon bc \end{bmatrix},$$

где $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, b — вектор-столбец, c — вектор-строка, D — некоторая матрица.

Пример. Для ведущего элемента (1,1) получим

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, рассмотрим следующие преобразования и операции, сохраняющие полную унимодулярность матриц [11]:

а) перестановка строк и столбцов;

б) транспонирование;

в) ведущее преобразование (операция замещения)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & c \\ b & D \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\varepsilon & \varepsilon c \\ \varepsilon b & D - \varepsilon bc \end{bmatrix}; \tag{7}$$

г) приписывание нулевой строки или нулевого столбца, строки либо столбца с одной единицей;

д) повторение строки или столбца;

(1 — сумма) $A \oplus_1 B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$;

(2 — сумма) $[Aa] \oplus_2 \begin{bmatrix} b \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & ab \\ 0 & B \end{bmatrix}$;

$$\text{(3 — сумма)} \begin{bmatrix} A & a & a \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ d & d & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & ab \\ dc & B \end{bmatrix} \tag{8}$$

(A, B — матрицы; a), г) — вектор-столбцы; б), в) — вектор-строки соответствующих размеров).

Теорема 5 [11, 12] (теорема Сеймура [Seymour] о разложении вполне унимодулярных матриц). Матрица A вполне унимодулярна тогда и только тогда, когда A может быть получена из матриц сетей и матрицы B^{10} с помощью операций (7) и (8). При этом операции (8) применяются в том и только том случае, если для каждой матрицы A и B сумма числа строк и числа столбцов не меньше четырех.

Пусть I_n — экземпляр задачи о покрытии (6), удовлетворяющий условиям:

- вектор $c = (c_1, \dots, c_n)$ произвольный;
- матрица $A = \{a_{ij}\}$ — либо сетевая матрица, либо матрица B^{10}.

Множество экземпляров $\{\delta_n(I_n)\}$ строится таким образом:

$I' \in \{\delta_n(I_n)\}$, если выполняются условия:

- вектор $c' = (c'_1, \dots, c'_n)$ задачи I' произвольный;
- матрица $A' = \{a'_{ij}\}$ получается из матрицы A с помощью конечного числа преобразований и операций (7) и (8).

Теорема 6. $\mathrm{Compl}\,(I_n, \{\delta_n(I_n)\}) = O(\mathrm{poly}\,(n))$.

Доказательство. Пусть $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ — оптимальное решение экземпляра I_n задачи (6) (которое с помощью метода эллипсоидов Хачияна или методом Кармаркара можно найти с полиномиальной сложностью). Рассмотрим произвольный экземпляр $I' \in \{\delta_n(I_n)\}$. Согласно теореме 5 матрица A' экземпляра I' вполне унимодулярна. Пусть x^* — допустимое решение I'. Тогда, исходя из x^*, с полиномиальной сложностью (методом Хачияна или Кармаркара, следствие 3), можно найти оптимальное решение I'. Если x^* не является допустимым решением I', то исходя из начального покрытия $x^0 = (1, \ldots, 1)$ задачи (6) с полиномиальной сложностью можно найти оптимальное решение I'.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. Вопросы устойчивости, параметрический и постоптимальный анализ задач дискретной оптимизации // Кибернетика. — 1983. — № 4. — С. 71– 80.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. — Киев: Наук. думка, 2003. — 261 с.
3. Geoffrion A.M., Nauss R. Parametric and postoptimality analysis in integer linear programming // Management Sci. — 1977. — **23**, N 5. — P. 453–466.
4. Roodman G.M. Post optimality analysis in zero one programming by implicit enumeration // Naval Res. Logist. Quart. — 1972. — **19**, N 3. — P. 435–447.
5. Greenberg H.J. An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer programming and combinatorial optimization / D.L. Woodruff (ed.) // Advances in Comput. and Stochast. optimization, Logic Program., and Heuristic search. — Berlin: Kluwer Academ. Publ., 1998. — P. 97–148.
6. Eitan M. Gurari. An Introduction to the Theory of Computation. — Ohio State University: Comput. Sci. Press, 1989.
7. Гришухин В.П. Эффективность метода ветвей и границ в задачах с булевыми переменными // Исследования по дискретной оптимизации. — М.: Наука, 1976. — С. 203–230.
8. Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. — М.: Наука, 1976. — 264 с.
9. Колпаков Р.М., Посыпкин М.А., Сигал И.Х. О сложности решения задачи о булевом ранце // Тр. VII Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М.: МАКСПресс, 2006. — С. 166–171.
10. Колпаков Р.М., Посыпкин М.А. Асимптотическая оценка сложности метода ветвей и границ с ветвлением по дробной переменной для задачи о ранце // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008 — **15**, № 1. — С. 58–81.
11. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1. — М.: Мир, 1991. — 360 с.
12. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 2. — М.: Мир, 1991. — 342 с.

Поступила 10.12.2009