УДК 517.9:519.6

А.В. ГЛАДКИЙ, В.В. СКОПЕЦКИЙ

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ И ОПТИМИЗАЦИИ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Ключевые слова: *акустическое поле, уравнение типа Шредингера, краевая задача, экстремальная задача, разностная схема, устойчивость*.

Актуальность развития методов математического моделирования процессов распространения акустических волн в подводных неоднородных волноводах в значительной мере объясняется потребностями дистанционного зондирования и акустического мониторинга регионов Мирового океана [1–4]. Практически во всех видах сигнализации, связи, локации, дистанционного исследования водных масс и дна океана используются звуковые волны. Значительный интерес также представляют вопросы формирования акустических полей с заданными свойствами и исследования особенностей распространения звуковых волн в неоднородных волноводах с учетом поглощения в среде.

С математической точки зрения расчет гармонических звуковых полей сводится к решению краевых задач для эллиптического волнового уравнения Гельмгольца с комплекснозначным несамосопряженным оператором в неограниченных неоднородных областях. В настоящее время разработано большое количество численно-аналитических методов и вычислительных алгоритмов для решения прямых или экстремальных задач для уравнения Гельмгольца в однородных и слоисто-неоднородных средах [1–2, 5–9]. Трудности математического исследования таких задач можно преодолеть, используя методику аппроксимации уравнения Гельмгольца параболическими уравнениями типа Шредингера [3–5, 10–14]. Это позволяет свести решение краевых задач к решению задачи Коши для волновых уравнений параболического типа с несамосопряженным комплекснозначным оператором, что приводит к необходимости разработки эффективных численных методов решения соответствующих аппроксимационных задач.

В настоящей статье исследуются вопросы численного моделирования и оптимизации акустических процессов на основе параболического волнового уравнения в подводном неоднородном волноводе с кусочно-непрерывными акустическими параметрами и учетом поглощения. Предложен численный метод решения прямой и оптимизационной задачи, изучены дифференциальные свойства функционала качества, с помощью операторного подхода исследована устойчивость разностной схемы для прямой и сопряженной краевых задач с комплекснозначным несамосопряженным оператором.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим прямую задачу отыскания звукового поля в подводном слоисто-неоднородном осесимметрическом волноводе $G=\{r_0<r<\infty, 0<z<H, r_0>0\}$, где (r, z) — цилиндрические координаты и ось z направлена вертикально вниз, предполагая, что распространение акустической энергии описывается в параболическом приближении. Для определенности будем считать, что волновод двухслойный с горизонтальной границей раздела сред, на которой выполяются условия непрерывности акустического давления и нормальной компоненты скорости частиц, а кусочно-непрерывные функции — скорость звука $c(r,z)$ и плотность среды $\rho(z)$ терпят разрыв первого рода на линии $z=\xi$. Кроме того, верхняя граница $z=0$ волновода абсолютно мягкая, нижняя жесткая, т.е. описывается граничным условием второго рода. Тогда в рамках параболического приближения акустическое поле в волноводе G может быть описано краевой задачей для урав-

© А.В. Гладкий, В.В. Скопецкий, 2010

нения типа Шредингера с комплексным несамосопряженным оператором:

$$2ik_0 \frac{\partial p}{\partial r} + \rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + k_0^2 (n^2(r,z) - 1 + iv(r,z))p = 0, \tag{1}$$

$$z \in (0,\xi) \bigcup (\xi, H), \ r_0 < r < \infty,$$

$$[p]|_{z=\xi} = p|_{z=\xi+0} - p|_{z=\xi-0} = 0, \ \left.\left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right]\right|_{z=\xi} = 0, \tag{2}$$

$$p|_{z=0} = 0, \ \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=H} = 0, \tag{3}$$

$$p|_{r=r_0} = u(z). \tag{4}$$

Здесь $p(r,z)$ — комплекснозначное решение, $u(z)$ — заданная функция (начальное значение), $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, $k_0 = \omega / c_0$ — волновое число (c_0 — некоторое значение скорости звука $c(r,z)$), ω — частота, $n(r,z) = c_0 / c(r,z)$ — коэффициент преломления, $v(r,z) \geq 0$ — коэффициент поглощения, $[f(r,z)]|_{z=\xi}$ — скачок функции f на линии разрыва $z = \xi$. В дальнейшем будем считать, что входные данные задачи (1), (2) — достаточно гладкие функции.

Дифференциальное уравнение (1) является базовым для определения дальнего комплекснозначного акустического давления $P(r,z)$, создаваемого гармоническим источником с координатами $(0, z_0)$ в двухслойном неоднородном осесимметричном волноводе с поглощающей границей. Это давление вне источника удовлетворяет уравнению Гельмгольца [5, 6, 12]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right) + \rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right) + k_0^2 (n^2(r,z) + iv(r,z))P = 0, \tag{5}$$

$$z \in (0,\xi) \bigcup (\xi, H), \ 0 < r < \infty,$$

условиям непрерывности на линии раздела акустического давления и нормальной компоненты скорости частиц

$$[P]|_{z=\xi} = 0, \ \left.\left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right]\right|_{z=\xi} = 0, \tag{6}$$

граничным условиям

$$P|_{z=0} = 0, \ \left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=H} = 0 \tag{7}$$

и при $k_0 r >> 1$ представляется в виде произведения функции Ханкеля первого рода нулевого порядка $H_0^{(1)}(\cdot)$ и плавной амплитуды, $P(r,z) = H_0^{(1)}(k_0 r)p(r,z)$. Подставляя выражение для $P(r,z)$ в (5) и учитывая, что функция Ханкеля $y = H_0^{(1)}(k_0 r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + \frac{1}{r}y' + k_0^2 y = 0$, асимптотическое поведение при $k_0 r >> 1$, $H_0^{(1)}(k_0 r) \approx e^{ik_0 r} / \sqrt{k_0 r}$, в результате для комплекснозначной амплитуды $p(r,z)$ получаем эллиптическое волновое уравнение

$$2ik_0 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + k_0^2 (n^2(r,z) - 1 + iv(r,z))p = 0.$$

Пренебрегая в этом уравнении членом $\partial^2 p / \partial r^2$, приходим к узкоугольному параболическому уравнению типа Шредингера (1), которое описывает распространение акустических волн в направлениях, близких к горизонтальному.

Из (6), (7), учитывая, что $P(r,z) = H_0^{(1)}(k_0 r)p(r,z)$, вытекают соответствующие условия сопряжения и краевые условия для параболического волнового уравнения (1).

Отметим, что область эффективного использования уравнения (1) ограничена углами распространения до горизонтали в пределах до $10^\circ - 15^\circ$, а наличие в уравнении мнимого коэффициента $v(r,z)$ позволяет проводить моделирование акустических полей с учетом поглощения.

Математическую постановку оптимизационной задачи сформулируем как решение вариационной задачи минимизации некоторого функционала для обеспечения минимального отклонения характеристик акустического поля от заданных в некоторой области волновода. При этом в качестве управления принимается начальное распределение решения краевой задачи. Тогда одну из экстремальных задач можно сформулировать следующим образом.

Требуется минимизировать функционал

$$J_\varepsilon(u)=\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\beta(z)\,|p(R,z)-p_0(z)|^2\,dz+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}|u(z)|^2\,dz \tag{8}$$

при условии, что $p(r,z,u)$ является решением краевой задачи:

$$2ik_0\frac{\partial p}{\partial r}+\rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)+k_0^2\,(n^2(r,z)-1+iv(r,z))p=0, \tag{9}$$

$$z\in(0,\xi)\cup(\xi,H),\ r_0<r<\infty,$$

$$[p]|_{z=\xi}=0,\ \left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=\xi}=0, \tag{10}$$

$$p|_{z=0}=0,\ \frac{\partial p}{\partial z}\Bigg|_{z=H}=0, \tag{11}$$

$$p|_{r=r_0}=u(z). \tag{12}$$

Здесь $p(R,z)=p(R,z,u)$ — решение задачи (1)–(4) при $r=R$, $r_0<R<\infty$, соотвествующее управлению $u(z)$; $\beta(z)>0$ — заданная непрерывная вещественная весовая функция; $p_0(z)$ — заданная комплекснозначная функция; $u(z)$ — комплекснозначное управление из некоторого выпуклого замкнутого множества $U=\{u(z)\in L_2(\Omega,1/\rho)\}$, где $L_2(\Omega,1/\rho)$ — пространство комплекснозначных функций, интегрируемых с квадратом и с весом $1/\rho$ в области $\Omega=(0,H)$. Скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega,1/\rho)$ определяются по формулам

$$(u,v)=(u,v)_{L_2(\Omega,1/\rho)}=\int_\Omega \frac{1}{\rho(z)}u(z)\overline{v}(z)dz,$$

$$||u||=(u,v)^{1/2}=\left(\int_\Omega \frac{1}{\rho(z)}|u(z)|^2\,dz\right)^{1/2},$$

в которых черта означает комплексное сопряжение.

Отметим, что для выделения ограниченного решения в функционал качества (8) добавлен стабилизирующий функционал $\frac{1}{\varepsilon^2}||u||^2$ при некотором заданном ε.

Таким образом, оптимизационная задача (задача оптимального управления) состоит в определении комплекснозначного управления $u\in U$, при котором функционал (8) достигает своей нижней грани:

$$J_\varepsilon(w)=\inf_{u\in L_2(\Omega,1/\rho)} J_\varepsilon(u). \tag{13}$$

2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Для численного решения начально-краевой задачи (1)–(4) с комплекснозначным несамосопряженным оператором наиболее удобным является метод сеток. Известно, что использование этого метода требует исследования устойчивости по начальным данным, по правой части, а также сходимости и оценки скорости сходимости решения разностной схемы [15, 16]. Следует отметить, что при исследовании разностных схем наиболее важным является вопрос устойчивости по начальным данным, что гарантирует отсутствие накопления ошибок, допущенных на некотором шаге вычислений.

Рассмотрим подробнее некоторые из этих вопросов.

В области G для численного исследования дифференциальной задачи (1)–(4) введем равномерную сетку, предполагая соизмеримость отрезков $(0,\xi)$ и (ξ,H):

$$\overline{\omega}_{\tau h}=\overline{\omega}_{\tau}\times\overline{\omega}_{h}=\{(r,z),r\in\overline{\omega}_{\tau},\ z\in\overline{\omega}_{h}\},$$

$$\overline{\omega}_{\tau}=\{r=r_m=r_0+m\tau,m=0,1,2,\ldots,\},\ \omega_{\tau}=\{r=r_m\in\overline{\omega}_{\tau},\overline{m}\geq 1\},$$

$$\overline{\omega}_{h}=\{z=z_k=kh,k=\overline{0,N},h=H/N=\xi/N_1\},$$

$$\omega_{h}=\{z=z_k\in\overline{\omega}_{h},k=\overline{1,N-1}\},\ \omega_{h}^{+}=\{z=z_k\in\overline{\omega}_{h},k=\overline{1,N}\}.$$

Используя интегро-интерполяционный метод [16], уравнение (1) с учетом условий сопряжения (2) аппроксимируем на сетке $\overline{\omega}_{\tau h}$ двухслойным разностным уравнением

$$4ik_0 b(z)y_r+(a\hat{y}_{\bar{z}})_z+(ay_{\bar{z}})_z+d(r,z)(\hat{y}+y)=0,\ (r,z)\in\overline{\omega}_{\tau}\times\omega_h, \tag{14}$$

где введены следующие обозначения:

$$y=y(r_m,z_k)=y_k^m=y^m=y_k,\ \hat{y}=y_k^{m+1},\ y_r=(\hat{y}-y)/h,$$

$$y_z=(y_{k+1}-y_k)/h,\ y_{\bar{z}}=(y_k-y_{k-1})/h,$$

$$(ay_{\bar{z}})_{z,k}=\frac{1}{h^2}(a_{k+1}y_{k+1}^m-(a_{k+1}+a_k)y_k^m+a_k y_k^m),\ a_k=a(z_k).$$

Коэффициенты уравнения (14) определяются формулами:

$$a(z)=\frac{1}{\rho(z-0{,}5h)},\ z\in\omega_h^{+},\ b(z)=\begin{cases}1/\rho(z),\ z\in\omega_h^{+},\ z\neq\xi,\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\rho(\xi-0)}+\dfrac{1}{\rho(\xi+0)}\right),\quad z=\xi,\end{cases}$$

$$d(r,z)=\begin{cases}\dfrac{k_0^2\tilde{\varepsilon}(r,z)}{\rho(z)},\ \tilde{\varepsilon}(r,z)=\varepsilon(r+\tau/2,z),\ \varepsilon(r,z)=n^2(r,z)-1+i\upsilon(r,z),\ z\neq\xi,\\ \dfrac{k_0^2}{2}\left[\dfrac{\tilde{\varepsilon}(r,\xi-0)}{\rho(\xi-0)}+\dfrac{\tilde{\varepsilon}(r,\xi+0)}{\rho(\xi+0)}\right],\ z=\xi.\end{cases}$$

Пользуясь разложением в ряд Тейлора, легко показать, что уравнение (14) аппроксимирует дифференциальное уравнение (1) в узлах, не принадлежащих линии раздела с погрешностью $O(\tau^2+h^2)$, и не ниже первого в противном случае.

Импедансное граничное условие (3) в узлах $(r,z)=(r,z_N)$ аппроксимируем уравнением

$$2ik_0 hb_N y_r-a_N(\hat{y}_{\bar{z}}+y_{\bar{z}})+\frac{1}{h}d_N(\hat{y}+y)=0.$$

Таким образом, исходной задаче (1)–(3) сопоставим разностную задачу

$$4ik_0 b(z)y_r+(a\hat{y}_{\bar{z}})_z+(ay_{\bar{z}})_z+d(r,z)(\hat{y}+y)=0,\ \ (r,z)\in\overline{\omega}_{\tau}\times\omega_h, \tag{15}$$

$$2ik_0 hb_N y_r-a_N(\hat{y}_{\bar{z}}+y_{\bar{z}})+\frac{h}{2}d_N(\hat{y}+y)=0,\ (r,z)=(r,z_N),\ r\in\overline{\omega}_{\tau}, \tag{16}$$

$$y(r,0)=0,\ r\in\overline{\omega}_{\tau}. \tag{17}$$

Для исследования свойств разностной схемы (15)–(17) введем гильбертово пространство $\mathcal{H}=L_2(\omega_h^{+})$ комплекснозначных функций, заданных на сетке ω_h^{+}. Скалярное произведение и норму в $\mathcal{H}$ определим по формулам

$$[y,v]=(y,v)_{\omega_h}+0{,}5hy_N\bar{v}_N, \quad |[y]|=[y,y]^{1/2},$$

$$(y,v)_{\omega_h}=\sum_{z\in\omega_h} hy\bar{v}, \ \|y\|_{L_2(\omega_h)}=(y,v)_{\omega_h}^{1/2},$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Учитывая соотношения (15)–(17), задаче (1)–(4) можно поставить в соответствие двухслойную неявную разностную схему, которую представим в операторной форме

$$4ik_0By_r+A(\hat{y}+y)=0, r\in\overline{\omega}_\tau, \tag{18}$$

$$y^0 \text{ — задано.} \tag{19}$$

Здесь y^0, $y\in\mathcal{H}$, $y^0=\{u(z), z\in\omega_h^+\}$, $y=y(r)=\{y(r,z), z\in\omega_h^+\}$, $B=b(z)E$, где E — тождественный оператор, а линейный комплекснозначный оператор A действует в пространстве $\mathcal{H}$ и определяется соотношениями

$$Av=\begin{cases}\dfrac{1}{h}a_2v_z-\dfrac{1}{h^2}a_1v+d(r,z)v, & z=h,\\ (a\hat{v}_{\bar{z}})_z+d(r,z)v, & z=z_k,\ k=\overline{2,N-1},\\ -\dfrac{2}{h}a_Nv_{\bar{z},N}+d_Nv_N, & z=H.\end{cases}$$

Устойчивость по начальным данным будем исследовать в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_D$, определяемым скалярным произведением $(y,v)_D=[Dy,v]$ и нормой $|[y]|_D=[Dy,y]^{1/2}$, где D — некоторый (возможно, зависящий от r) самосопряженный положительно-определенный оператор.

Применительно к двухслойной схеме (18), (19) равномерная устойчивость по начальным данным в $\mathcal{H}_D$ означает выполнение энергетического неравенства [15]

$$[Dy^{m+1},y^{m+1}]^{1/2}\le[Dy^m,y^m]^{1/2}, \quad m=0,1,2,\dots,$$

где D — некоторый (возможно, зависящий от r) самосопряженный положительно-определенный оператор.

Введем в рассмотрение вспомогательный оператор второй разностной производной $\Lambda v=(av_{\bar{z}})_z$, действующий в пространстве сеточных функций, определенных на сетке $\overline{\omega}_h$ и принимающих нулевое значение при $z=0$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $y\in\mathcal{H}$. Тогда справедливы такие соотношения:

$$\mathrm{Im}(iby_r,\hat{y}+y)_{\omega_h}=\mathrm{Im}\left\{\sum_{k=1}^{N-1} ihb_k\,y_{r,k}\overline{(\hat{y}_k+y_k)}\right\}=\frac{1}{\tau}((b\hat{y},\hat{y})_{\omega_h}-(by,y)_{\omega_h}), \tag{20}$$

$$\mathrm{Im}(\Lambda(\hat{y}+y),\hat{y}+y))_{\omega_h}=$$
$$=\frac{2hk_0}{\tau}\frac{1}{\rho_N}b_N(|\hat{y}_N|^2-|y_N|^2)+\frac{h}{2}\mathrm{Im}(d_N)|\hat{y}_N+y_N|^2. \tag{21}$$

Доказательство. Для доказательства (20) учтем, что по определению мнимой части

$$\mathrm{Im}(ib(z)y_r\overline{(\hat{y}+y)})=\frac{1}{2}[b(z)(y_r\overline{(\hat{y}+y)}+\overline{y_r}(\hat{y}+y))] .$$

Используя выражение для оператора разностной производной, после несложных преобразований находим

$$\mathrm{Im}(ib(z)y_r\overline{(\hat{y}+y)})=\frac{1}{\tau}b(z)(|\hat{y}|^2-|y|^2).$$

Следовательно, для мнимой части скалярного произведения $(iby_r,(\hat{y}+y))_{\omega_h}$ получаем

$$\mathrm{Im}(iby_r,\hat{y}+y)_{\omega_h}=\frac{1}{\tau}((b\hat{y},\hat{y})_{\omega_h}-(by,y)_{\omega_h}).$$

Для доказательства второго тождества (21) заметим, что

$$\mathrm{Im}(\Lambda(\hat{y}+y), \hat{y}+y)_{\omega_h} = \frac{1}{2i}\{(\Lambda(\hat{y}+y), \hat{y}+y)_{\omega_h} - (\hat{y}+y, \Lambda(\hat{y}+y)_{\omega_h}\}.$$

Отсюда, воспользовавшись разностной формулой Грина для комплекснозначных функций [15]

$$(y, (av_{\bar{z}})_z)_{\omega_h} - ((ay_{\bar{z}})_z, v)_{\omega_h} =$$
$$= ((a-\bar{a})y_{\bar{z}}, v_{\bar{z}}] + [y\bar{a}\bar{v}_{\bar{z}} - \bar{v}a y_{\bar{z}}]_N - [y\bar{a}_1\bar{v}_z - \bar{v}a_1 y_z]_0$$

и учитывая, что $a-\bar{a}=0,\ v_0 = y_0 = 0,$ получаем

$$\mathrm{Im}(\Lambda w, w)_{\omega_h} = \frac{i}{2} a_N [w_{\bar{z}} - \bar{w}w_{\bar{z}}]_N\,,\quad w = \hat{y}+y. \tag{22}$$

Подставляя в (22) выражение для разностной производной $w_{\bar{z}}$ из краевого условия (16), далее имеем

$$\mathrm{Im}(\Lambda w, w)_{\omega_h} = \frac{i}{2}\left\{ w_N \left[-2ik_0 hb_N\, \bar{y}_{r,N} + \frac{h}{2}\overline{d_N w_N} \right] - \right.$$
$$\left. - \bar{w}_N \left[2ik_0 hb_N\, y_{r,N} + \frac{h}{2} d_N w_N \right] \right\} =$$
$$= \frac{i}{2}\left\{ -2ik_0 hb_N [w\bar{y}_r + w\bar{y}_r]_N + \frac{h}{2}|w_N|^2 (\overline{d_N} - d_N) \right\}.$$

Поскольку $[\bar{w}y_r + \bar{w}y_r]|_N = \frac{2}{\tau}(|\hat{y}_N|^2 - |y_N|^2)$, то из предыдущего тождества окончательно следует

$$\mathrm{Im}(\Lambda w, w)_{\omega_h} = \frac{2hk_0}{\tau} b_N (|\hat{y}_N|^2 - |y_N|^2) + \frac{h}{2}\mathrm{Im}(d_N)|w_N|^2\,.$$

Перейдем к анализу устойчивости разностной схемы (18), (19) по начальным данным. Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема 1. Для решения разностной схемы (18), (19) справедливо энергетическое тождество

$$[b\hat{y}, \hat{y}] + \frac{\tau}{4k_0}[\,\mathrm{Im}(d)(\hat{y}+y), \hat{y}+y] = [by, y]. \tag{23}$$

Для доказательства умножим в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ уравнение (18) на величину $w = \hat{y}+y$. Тогда, отделяя мнимую часть полученного тождества, имеем

$$\mathrm{Im}\{4k_0(iby_r, w) + (Aw, w) + (dw, w)\} = 0. \tag{24}$$

Воспользовавшись далее результатами леммы 1 и подставляя (20), (21), а также выражение

$$\mathrm{Im}(dw, w) = \mathrm{Im}\left\{ \sum_{k=1}^{N-1} hd_k^n w_k^{n+1} \overline{w_k^{n+1}} \right\} = ||(\mathrm{Im}\, d)^{1/2}(\hat{y}+y)||^2$$

в (24), получим тождество

$$(b\hat{y}, \hat{y})_{\omega_h} + \frac{h}{2} b_N |\hat{y}_N|^2 + \frac{\tau}{4k_0}\left[(\mathrm{Im}(d)w, w) + \frac{h}{2}\mathrm{Im}(d_N)|w_N|^2 \right] =$$
$$= (by, y)_{\omega_h} + \frac{h}{2} b_N |y_N|^2\,.$$

Отсюда следует справедливость теоремы.

На основании тождества (23) можно установить единственность и равномерную устойчивость разностной схемы (18), (19) по начальным данным в норме энергетического пространства $\mathcal{H}_B$.

Теорема 2. Разностная схема (18), (19) имеет единственное решение.

Теорема 3. Разностная схема (18), (19) равномерно устойчива по начальным данным в норме $\|[y]\|_B$ и для ее решения имеет место априорная оценка

$$\|[y^{m+1}]\|_B \le \|[y^m]\|_B, \ y^m \in \mathcal{H}, \ m = 0, 1, 2, \dots . \tag{25}$$

Прямым следствием неравенства (25) является оценка $\|[y^m]\|_B \le \|[y^0]\|_B$, $y^m \in \mathcal{H}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, выражающая устойчивость разностной схемы (18), (19) по начальным данным.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальные свойства экстремальной задачи (9)–(13). Сначала покажем, что при каждом фиксированном элементе $u \in U$ соответствующее решение $p(r, z) = p(r, z, u)$ краевой задачи (9)–(12) определяется однозначно.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Для комплекснозначного решения краевой задачи (9)–(12) справедлива оценка

$$\| p(R, z) \| \le \| u(z) \|. \tag{26}$$

Для доказательства неравенства (26) уравнение

$$Lp = 2ik_0 \frac{\partial p}{\partial r} + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + k_0^2 (n^2 (r, z) - 1 + i\upsilon(r, z)) p = 0$$

умножим на комплексно-сопряженную функцию $\overline{p}(r, z, u)$ и проинтегрируем с весом $1/\rho(z)$ по области $z \in (0, H)$, учитывая разрывность функции $\rho(z)$. Тогда получим

$$(Lp, p) = \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} Lp\overline{p}\, dz = \int_0^{\xi} \frac{1}{\rho(z)} Lp\overline{p}\, dz + \int_{\xi}^H \frac{1}{\rho(z)} Lp\overline{p}\, dz = 0$$

или

$$2ik_0 \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial r} \overline{p} dz + \int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \overline{p} dz +$$

$$+ \int_0^H \frac{k_0^2}{\rho(z)} (n^2 (r, z) - 1 + i\upsilon(r, z)) | p |^2 \, dz = 0. \tag{27}$$

Отделив в тождестве (27) мнимую часть, получим

$$k_0 \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \overline{p} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} p \right) dz + \frac{1}{2i} \left(\int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \overline{p}\, dz - \int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \right) p dz \right) +$$

$$+ k_0^2 \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \upsilon(r, z) | p |^2 \, dz = 0. \tag{28}$$

Учитывая условия сопряжения (10) и граничные условия (11), находим

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \overline{p}\, dz - \int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \right) p dz = \int_0^{\xi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \overline{p}\, dz +$$

$$+ \int_{\xi}^H \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \overline{p} dz - \int_0^{\xi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \right) p dz - \int_{\xi}^H \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \right) p\, dz = 0.$$

В результате соотношение (28) принимает вид

$$\int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \overline{p} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} p \right) dz + k_0 \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \upsilon(r, z) | p |^2 \, dz = 0. \tag{29}$$

Проинтегрируем теперь (29) по $r \in (r_0, R)$, тогда после преобразований и учета начального условия (11) имеем

$$\int_0^H \frac{1}{\rho(z)} |p|^2 \bigg|_{r=R} dz + k_0 \int_{r_0}^R dr \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \upsilon(r,z) |p|^2 dz = \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} |u|^2 dz. \qquad (30)$$

Поскольку $\upsilon(r, z) \geq 0$, то из (30) окончательно следует неравенство (26). Оценка (26) означает единственность решения задачи (9)–(12) и его непрерывную зависимость от начальных данных.

В целях использования градиентных методов оптимизации исследуем дифференциальные свойства критерия качества (8). Покажем, что функционал (8) дифференцируемый в произвольной точке $u(z) \in U$ в комплексном пространстве со скалярным произведением

$$\langle u, \upsilon \rangle = \mathrm{Re}(u, \upsilon). \qquad (31)$$

Для этого достаточно оценить главную линейную часть приращения функционала $\Delta J_\varepsilon(u) = J_\varepsilon(u + \delta u) - J_\varepsilon(u)$ в зависимости от приращения управления δu.

Учитывая комплекснозначность управления $u \in U$, рассмотрим более конкретно случай амплитудно-фазового управления. Легко видеть, что в этом случае приращение решения $\delta p = \delta p(r, z) = p(r, z, u + \delta u) - p(r, z, u)$ удовлетворяет краевой задаче

$$2ik_0 \frac{\partial \delta p}{\partial r} + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \delta p}{\partial z} \right) + k_0^2 (n^2(r, z) - 1 + i\upsilon(r, z)) \delta p = 0, \qquad (32)$$

$$z \in (0, \xi) \cup (\xi, H), \; r_0 < r < \infty,$$

$$[\delta p] |_{z=\xi} = 0, \quad \left[\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \delta p}{\partial z} \right] \bigg|_{z=\xi} = 0, \qquad (33)$$

$$\delta p |_{z=H} = 0, \; \frac{\partial \delta p}{\partial z} \bigg|_{z=H} = 0 \qquad (34)$$

с начальным условием

$$\delta p |_{r=r_0} = \delta u(z). \qquad (35)$$

Рассматривая теперь выражение для приращения функционала (8), имеем

$$\Delta J_\varepsilon(u) = \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \left\{ \beta(z) [\, |p(u + \delta u) - p_0|^2 - |p(u) - p_0|^2 \,] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon^2} [\, |u + \delta u|^2 - |u|^2 \,] \right\} dz,$$

где для краткости обозначено $p(u + \delta u) = p(R, z, u + \delta u)$, $p(u) = p(R, z, u)$.

После несложных преобразований приращение функционала можно записать в виде

$$\Delta J_\varepsilon(u) = 2\mathrm{Re} \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \beta(z) \delta p \, (\overline{p(u) - p_0}) \, dz + 2 \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{Re} \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \delta u \bar{u} \, dz +$$

$$+ \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \left[\beta(z) |\delta p|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |\delta u|^2 \right] dz. \qquad (36)$$

Оценим в (36) интегральный член, содержащий приращение решения δp. Для этого воспользуемся леммой 2 и учтем, что δp удовлетворяет краевой задаче (32)–(35). Тогда на основании оценки (26) получим неравенство

$$\int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \beta(z) |\delta p|^2 \bigg|_{r=R} dz \leq M \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} |\delta p|^2 \bigg|_{r=R} \frac{1}{\rho(z)} |\delta u|^2 \, dz = M \, \|\delta u\|^2, \; (37)$$

где $M = \max \beta(z)$, $z \in [0, H]$.

Учитывая оценку (37) в (36), для приращения функционала $\Delta J_\varepsilon(u)$ получаем

$$\Delta J_\varepsilon(u) = 2\operatorname{Re}\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\beta(z)\,\delta p(\overline{p(u)-p_0})\,dz + 2\frac{1}{\varepsilon^2}\operatorname{Re}\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\delta u\bar{u}\,dz + o(\|du\|). \quad (38)$$

Чтобы окончательно определить выражение для главной линейной части в (38), введем в рассмотрение сопряженную функцию $\psi(r,z)=\psi(r,z,u)$ как решение в области $G_R=\{r_0<r<R, 0<z<H\}$ краевой задачи:

$$-2ik_0\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial r} + \rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right) + k_0^2(n^2(r,z)-1+i\nu(r,z))\overline{\psi} = 0, \quad (39)$$

$$z\in(0,\xi)\cup(\xi,H),\ r_0<r<R,$$

$$[\overline{\psi}]|_{z=\xi}=0,\quad \left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=\xi}=0, \quad (40)$$

$$\overline{\psi}|_{z=0}=0,\quad \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\Bigg|_{z=H}=0, \quad (41)$$

$$\overline{\psi}|_{r=R}=\beta(z)(\overline{p(u)-p_0}). \quad (42)$$

Аналогично доказательству леммы 2 легко показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $\overline{\psi},\delta p$ — решения сопряженной задачи (39)–(42) и задачи (32)–(35) соответственно. Тогда имеет место соотношение

$$\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}\,\delta p\Bigg|_{r=r_0}dz = \int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}\,\delta p\Bigg|_{r=R}dz. \quad (43)$$

Теперь, принимая во внимание в (38) полученную оценку (43) и начальное условие (35), можно окончательно представить выражение для приращения функционала $\Delta J_\varepsilon(u)$ в виде

$$\Delta J_\varepsilon(u) = 2\operatorname{Re}\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}\Bigg|_{r=r_0}\delta u\,dz + \frac{2}{\varepsilon^2}\operatorname{Re}\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\delta u\bar{u}\,dz + o(\|\delta u\|). \quad (44)$$

Отсюда следует дифференцируемость функционала $J_\varepsilon(u)$ по $u(z)$ в пространстве $L_2^2(\Omega,1/\rho)$ действительных пар $\{\operatorname{Re}u,\operatorname{Im}u\}$. Легко также видеть, что функционал (8) выпуклый.

Таким образом, установлена следующая теорема.

Теорема 4. Функционал (8) является выпуклым на множестве U, дифференцируемым по Фреше в пространстве $L_2^2(\Omega,1/\rho)$ действительных пар $\{\operatorname{Re}u,\operatorname{Im}u\}$. Градиент функционала определяется выражением

$$J'_\varepsilon(u) = 2\left\{\psi_1(r_0,z,u)+\frac{1}{\varepsilon^2}u_1,\psi_2(r_0,z,u)+\frac{1}{\varepsilon^2}u_2\right\}, \quad (45)$$

где $\psi_1=\operatorname{Re}\psi,\psi_2=\operatorname{Im}\psi,\ u_1=\operatorname{Re}u,u_2=\operatorname{Im}u$.

Из вышеизложенного следует, что для определения градиента функционала (8) необходимо при фиксированном $u(z)$ получить решение двух краевых задач. Вначале с помощью прямой задачи (9)–(12) следует определить функцию $p(r,z,u)$, а затем из (39)–(42) найти значение сопряженной функции.

Приближенное решение задачи оптимального управления (9)–(13) можно получить, используя градиентные методы [16, 17]. Поэтому в таких задачах прежде всего необходимо вычислить градиент минимизируемого функционала и сформулировать необходимые условия оптимальности. В случае экстремальных задач без ограничений условие оптимальности имеет вид

$$\operatorname{grad} J_\varepsilon(w)=0,\ J_\varepsilon(w)=\inf_{u\in L_2(\Omega,1/\rho)} J_\varepsilon(u). \quad (46)$$

Для решения задачи (46) можно применить приближенные методы, в частности,

$$\frac{w_{k+1}-w_k}{\tau_{k+1}}+\operatorname{grad} J_\varepsilon(w_k)=0,\ k=0,1,\ldots, \tag{47}$$

с использованием различных способов выбора итерационных параметров τ_k. На практике часто используется выбор итерационного праметра в (47) из условия монотонности $J_\varepsilon(w_{k+1})<J_\varepsilon(w_k)$. Начиная с некоторого заданного значения, итерационный параметр уменьшают до тех пор, пока не будет выполнено условие монотонности.

В случае задач оптимизации с ограничениями вместо (47) используется итерационный процесс

$$w_{k+1}=P_U(w_k-\tau_{k+1}\operatorname{grad} J_\varepsilon(w_k)), \tag{48}$$

где P_U — оператор проектирования на множество U.

Алгоритм (48) можно реализовать следующим образом:

$$\frac{\widetilde{w}_{k+1}-w_k}{\tau_{k+1}}+\operatorname{grad} J_\varepsilon(w_k)=0, \tag{49}$$

$$w_{k+1}=P_U(\widetilde{w}_k),\quad k=0,1,\ldots. \tag{50}$$

Здесь на первом шаге (49) вычисление аналогично случаю задачи без ограничений. На втором шаге (50) реализуется ввод в подпространство ограничений U.

Приближенное вычисление градиента связано с численным решением прямой краевой задачи (9)–(12) и сопряженной задачи (39)–(42) с комплексными несамосопряженными операторами. Легко видеть, что для численного решения сопряженной краевой задачи (39)–(42) может использоваться разностная схема, изложенная выше для решения прямой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982. — 264 с.
2. Распространение волн и подводная акустика / Под ред. Дж.Б. Келлера и Дж. Пападакиса. — М.: Мир, 1980. — 230 с.
3. Тапперт Ф.Д. Метод параболического уравнения // Распространение волн в подводной акустике. — М.: Мир, 1980. — С. 180–226.
4. Завадский В.Ю. Моделирование волновых процессов. — М.: Наука, 1991. — 368 с.
5. Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. — Киев: Наук. думка, 2001. — 452 с.
6. Алексеев Г.В., Комаров Е.Г. Численное исследование экстремальных задач теории излучения звука в плоском волноводе // Математическое моделирование. — 1991. — **3,** № 12. — С. 52–64.
7. Алексеев Г.В., Комашинская Т.С., Синько В.Г. Распределенные вычисления в задачах активной минимизации звука в двумерном многомодовом волноводе // Сибирский журн. индустриальной математики. — 2004. — **7**, № 2. — С. 9–22.
8. Данилов В.Я., Кравцов Ю.А., Наконечный А.Г. Математические аспекты управления гидроакустическими полями // Формирование акустических полей в океанических волноводах. Н. Новгород: ИПФ АН СССР, 1991. — С. 32–55.
9. Савенкова А.С. Мультипликативное управление в задаче рассеяния для уравнения Гельмгольца // Сибирский журн. индустриальной математики. — 2007. — **10,** № 1. — С. 128–139.
10. Lee D., Mc Daniel S.T. Ocean acoustic propagation by finite difference method // Comput. Math. Appl. — 1987. — **14.** — P. 305–423.
11. Гладкий А.В., Скопецкий В.В., Подласов Е.С. Численное моделирование волновых процессов в неоднородных средах с импедансной границей // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 4. — С. 41–50.
12. Lee D., Pierse A.D., Shang E.C. Parabolic equation development in the twentieth Century // J. Comput. Acoust. — 2000. — **1,** N 4. — P. 527–637.
13. Meyer M., Hermand J.-P., Asch M., Le Gac J.-C. An analytic multiple frequency adjoint-based inversion algorithm for parabolic-type approximations in ocean acoustics // Inverse Probl. in Sci. and Engineer. — 2006. — **14,** N 3. — P. 245–265.
14. Hermand J.-P., Meyer M., Asch M., Berrada M. Adjoint-based acoustic inversion for the physical characterization of a shallow water environment // J. Acoust. Soc. Amer. — 2006. — **119,** N 6. — P. 3860–3871.
15. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973. — 416 с.
16. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
17. Васильев П.Ф. Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002. — 824 с.

Поступила 27.05.2010