УДК 519.8

А.В. КУНЦЕВИЧ, В.М. КУНЦЕВИЧ

УСТОЙЧИВОСТЬ В ОБЛАСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

Ключевые слова: *робастная устойчивость, нелинейные системы, дискретные системы, множественные оценки, разностные включения.*

ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость в широком смысле — ключевое понятие в теории и практике построения систем управления. Поэтому проблема анализа устойчивости актуальна и в настоящее время.

В последних два десятилетия возникло понимание того фундаментального положения, что при решении реальных задач управления конструктору систем во многих случаях приходится иметь дело с некоторым семейством объектов в силу незнания точной модели объекта. Последнее обстоятельство вызывает необходимость исследования робастной устойчивости динамических систем.

Если в анализе робастной устойчивости линейных систем как непрерывных, так и дискретных, уже получены существенные результаты (см., например, [1] и приведенную там обширную библиографию, а также [2, 3]), то в решении проблемы робастной устойчивости нелинейных систем в ее общей постановке, когда как для параметров линейной части системы, так и для параметров нелинейных функций, заданы лишь их оценки, сделаны только первые шаги (см., например, [4]).

Проблема анализа робастной устойчивости нелинейных систем, названная задачей абсолютной устойчивости, была поставлена еще в середине прошлого столетия и ее изучение началось с работы А.И. Лурье и В.Н. Постникова [5], где рассматривались системы с линейной частью и со скалярной нелинейной функцией

[1] Работа выполнена в рамках российско-украинского проекта (проект № 09-01-90431-Укр_ф_а) и при финансовой поддержке ГФФИ Украины (проект № Ф28.1/021).

скалярного аргумента. Авторы рассматривали случай, когда для нелинейной функции задана лишь ее оценка в виде квадратичного ограничения. В дальнейшем эта проблема была тщательно изучена в работах М.А. Айзермана, Ф.Р. Гантмахера, В. Попова, Я.З. Цыпкина, Р. Калмана, Е. Джури, В.А. Якубовича и других авторов.

Указанные задачи анализа вошли в число проблем, рассмотренных в работах А.А. Дородницина [6, 7]. В [4] для класса нелинейных функций, допускающих их представление в квазилинейной форме по Е.А. Барбашину [8], получены достаточные условия робастной устойчивости класса нелинейных систем в заданной области. В настоящей работе, в отличие от [4], рассматривается более широкий класс нелинейных систем, не допускающих их представления в квазилинейной форме. Для этого класса вводится обобщение достаточного условия робастной устойчивости для дискретных нелинейных включений на ограниченном множестве состояний.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ АНАЛИЗА РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Задано семейство систем, описанных разностным уравнением

$$X_{n+1} = F(X_n, L_n), \ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $X_n \in \mathbf{R}^m$ — вектор состояния в дискретный момент времени n, $L_n \in \mathbf{R}^t$ — вектор переменных во времени параметров, $F(\cdot)$ — m-мерная непрерывная нелинейная вектор-функция такая, что $F(0, L_n) = 0$, при этом $F(\cdot)$ обращается в ноль только в точке $X_n = 0$, а вектор L_n входит в $F(\cdot)$ линейно. Остальные свойства функции $F(\cdot)$ оговорены ниже.

Для вектора L_n задана его априорная оценка

$$L_n \in \mathbf{L} = \underset{k=\overline{1;\, K}}{\operatorname{conv}} \{L^k\}, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где L^k — k-я вершина многогранника $\mathbf{L}$, K — число его вершин.

Отметим, что исследованию асимптотической устойчивости «в целом» частного случая систем (1), когда

$$X_{n+1} = AX_n + \Phi(X_n),$$

где

$$\Phi(X_n) = \Phi(\sigma_n) = \| \varphi_i(\sigma_n) \|_{i=1}^m, \ \sigma_n = C^{\mathrm{T}} X_n,$$

а функции $\varphi_i(\sigma_n)$ удовлетворяют квадратичным ограничениям

$$\underline{p}_i \sigma_n^2 \le \sigma_n \varphi_i(\sigma_n) \le \overline{p}_i \sigma_n^2, \ i = \overline{1; m}, \ 0 \le \underline{p}_i \le \overline{p}_i,$$

посвящено множество публикаций, среди которых отметим лишь работы Я.З. Цыпкина, Р. Калмана, Е. Джури и В.А. Якубовича. Нас же интересует робастная устойчивость всего семейства для общего случая нестационарных нелинейных систем (1), (2).

Соотношения (1), (2) определяют движение рассматриваемого семейства систем в терминах разностных включений

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \widetilde{F}(X_n, \mathbf{L}_n) = \bigcup_{L_n \in \mathbf{L}} F(X_n, L_n). \tag{3}$$

Рассмотрим случай, когда для вектора состояния X_n семейства систем (1), (2) известна лишь множественная оценка

$$X_n \in \mathbf{X}_n = \underset{s=\overline{1;\, S_n}}{\operatorname{conv}} \{X_n^s\}, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где X_n^s — s-я вершина многогранника $\mathbf{X}_n$, S_n — число его вершин. Тогда вместо соотношения (3) из (1), (2) и (4) имеем включение

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_n, \mathbf{L}_n) = \bigcup_{L_n \in \mathbf{L},\, X_n \in \mathbf{X}_n} F(X_n, L_n). \tag{5}$$

Для конструктивного отыскания множества $\mathbf{X}_{n+1}$ примем, что составляющие функции $f_i(\cdot)$ непрерывной вектор-функции $F(\cdot)=\{f_i(X_n, L_{i,n})\}_{i=1}^m$ однозначны, линейно зависящие от параметров $L_{i,n}$ и $f_i(0, L_{i,n})=0$ для $i=\overline{1,m}$. Для существенного упрощения реализации операции построения множества $\mathbf{X}_{n+1}$ (5) введем интервальную оценку сверху для этого множества $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$:

$$X_{n+1} \in \overline{\mathbf{X}}_{n+1}. \tag{6}$$

Таким образом, мы предполагаем «загрубление» оценок вектора состояния на каждом шаге n путем погружения точной множественной оценки в гиперпараллелепипед $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$:

$$X_{n+1} \in \overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \{X=[x_i]_{i=1}^m : \underline{x}_{n+1,i} \le x_i \le \overline{x}_{n+1,i},\ i=\overline{1,m}\}. \tag{7}$$

Примем также, что для переменных во времени векторов $L_{i,n}$ заданы априорные оценки

$$L_{n,i} \in \mathbf{L}_i = \underset{k=\overline{1;\,K_i}}{\mathrm{conv}} \{L_i^k\},\ n=1,2,\ldots, \tag{8}$$

где L_i^k — k-я вершина многогранника $\mathbf{L}_i$, K_i — число его вершин.

Поскольку операция объединения в (5) выполняется для каждой i-й составляющей $f_i(X_n, L_{i,n})$ векторной функции $F(\cdot)$ независимо, множество $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$ имеет вид

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{\mathbf{x}}_{1,n+1} \times \overline{\mathbf{x}}_{2,n+1} \times \ldots \times \overline{\mathbf{x}}_{m,n+1}. \tag{9}$$

Множества $\mathbf{x}_{i,n+1}$ интервальные и представимы в виде

$$\mathbf{x}_{i,n+1} = \{x_{i,n+1} : \underline{x}_{i,n+1} \le x_{i,n+1} \le \overline{x}_{i,n+1}\},\ i=\overline{1;m}, \tag{10}$$

$$\underline{x}_{i,n+1} = \min_{L_{i,n}\in\mathbf{L}_i,\ X_n\in\mathbf{X}_n} f_i(X_n, L_{i,n}),\ i=\overline{1;m}, \tag{11}$$

$$\overline{x}_{i,n+1} = \max_{L_{i,n}\in\mathbf{L}_i,\ X_n\in\mathbf{X}_n} f_i(X_n, L_{i,n}),\ i=\overline{1;m}. \tag{12}$$

В общем случае решения $\underline{x}_{i,n+1}$ и $\overline{x}_{i,n+1}$ задач (11) и (12) нетривиальны, связаны с отысканием глобальных экстремумов на заданных множествах, если только не определены заранее свойства нелинейных функций, обеспечивающие совпадение глобального и локальных экстремумов. Ниже рассмотрим частные случаи, когда решения задач (11) и (12) не представляют вычислительной сложности, а пока будем считать, что нам удалось их решить тем или иным способом.

Так как во многих приложениях требование робастной устойчивости системы (5) в целом является избыточным, ниже будем рассматривать робастную устойчивость этой системы только в некоторой наперед заданной (интервальной) области $\mathbf{X}_0$. Это позволит нам также использовать конструктивные методы решения задач (11) и (12).

2. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ «В ОБЛАСТИ»

Введем скалярную характеристику множества $\mathbf{X}$:

$$\rho(\mathbf{X}) = \max_{X\in\mathbf{X}} \{\|X\|\}. \tag{13}$$

Рассмотрим норму вектора в определении (13) в двух видах:

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i|, \tag{14}$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}. \tag{14$'$}$$

Именно с помощью этой скалярной характеристики (13), (14), (14′) множественной оценки вектора состояния будем анализировать устойчивость системы (5). Для анализа устойчивости нелинейного включения (5) потребуется обобщить дискретный аналог прямого метода Ляпунова на класс нелинейных разностных включений.

Поскольку функция (13) положительно-определенная, то можем принять ее в качестве функции Ляпунова и ввести естественное обобщение достаточного условия асимптотической устойчивости Ляпунова.

Теорема. Если первая разность функции Ляпунова

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = \rho(\mathbf{F}(\mathbf{X}_n)) - \rho(\mathbf{X}_n) < 0 \;\; \forall n, \tag{15}$$

отрицательно-определенная, то тривиальное решение разностного включения (5) асимптотически устойчиво при $n \to \infty$.

Замечание. Если множество $\mathbf{X}_n$ вырождается в одноточечное, $\mathbf{X}_n = \{X_n\}$, то $\rho(\mathbf{X}_n) = \| X_n \|$ и неравенство (15) приобретает вид $\| X_{n+1} \| < \| X_n \|$.

Следствие теоремы. Если начало координат является центром множества $\mathbf{X}_n$, иначе центр сферы минимального радиуса, описанной вокруг X_n, является началом координат, то значение функции $\rho(\mathbf{X}_n)$, вычисленной по формуле (14′), совпадает с радиусом описанной сферы и из выполнения неравенства (15) следует включение

$$X_{n+1} \subset X_n . \tag{16}$$

Нетрудно показать, что для интервальных множеств $\mathbf{X}_n$ и $\mathbf{X}_{n+1}$ с центрами в начале координат строгое включение (16) имеет место тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из системы нестрогих неравенств

$$\bar{x}_{i,n+1} \le \bar{x}_{i,n}, \;\; i = \overline{1; m},$$

$$\underline{x}_{i,n+1} \ge \underline{x}_{i,n}, \;\; i = \overline{1; m},$$

является строгим, при этом справедливо неравенство

$$R(\mathbf{X}_{n+1}) < R(\mathbf{X}_n),$$

где $R(\mathbf{X}_n)$ — радиус множества $\mathbf{X}_n$, определяемый как

$$R(\mathbf{X}_n) = \max_{X \in \mathbf{X}_n} \| X \|.$$

3. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ОЦЕНКАМИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Именно наличие априорно заданных оценок (сверху и снизу) для неизвестных нелинейных функций делает возможным анализ устойчивости нелинейной системы возможным и конструктивным.

Рассмотрим класс систем с линейной частью и неизвестной нелинейной функцией векторного аргумента с априорными оценками ее значений

$$X_{n+1} = F(X_n, L_n) = \boldsymbol{A}_n X_n + f(X_n) C_n, \;\; n = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где $\boldsymbol{A}_n$ — матрица $m \times m$, для строк $A_{n,i}^{\mathrm{T}}$ которой заданы априорные оценки

$$A_{n,i}^{\mathrm{T}} \in \mathbf{A}_i = \operatorname*{conv}_{q = \overline{1; Q_i}} \{A_i^q\}, \;\; n = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

A_i^q — q-я вершина множества $\mathbf{A}_i$, Q_i — число его вершин. Координаты вектора C_n переменных во времени параметров принимают значения в заданных интервалах:

$$\begin{gathered} C_n \in \overline{\mathbf{C}} = \{C = [c_i]_{i=1}^m : \underline{c}_i \le c_i \le \bar{c}_i, i = \overline{1, m}\}, \\ \mathbf{C} = \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 \times \ldots \times \mathbf{c}_m . \end{gathered} \tag{19}$$

Для семейства (17)–(19) аргументом L_n функции $F(X_n, L_n)$ является вектор, составленный из строк $A_{n,i}^{\mathrm{T}}$ и вектора C_n и ограниченный множеством

$$L_n \in \mathbf{L} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}, \;\; \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \ldots \times \mathbf{A}_m . \tag{20}$$

Функция $f(X_n)$ непрерывная, скалярная и такая, что $f(0)=0$. На оценках знакопеременных функций $f(X)$ векторного аргумента остановимся подробнее.

Как известно, исследование устойчивости нелинейных непрерывных систем управления началось с работы [5], в которой рассматривалась система с нелинейной знакопеременной скалярной «секториальной» функцией скалярного аргумента, удовлетворяющей ограничениям

$$\underline{k}x^2 \le x f(x) \le \bar{k}x^2, \text{ где } 0 \le \underline{k} < \bar{k} > 0, \tag{21}$$

что эквивалентно $\underline{k}x \operatorname{sign} x \le f(x) \operatorname{sign} x \le \bar{k}x \operatorname{sign} x$ или $\underline{k}\,|x| \le f(x) \operatorname{sign} x \le \bar{k}\,|x|$.

Для функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (21), справедливо равенство

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} x. \tag{22}$$

Так как для знакопеременных функций $f(X)$ векторного аргумента X многомерного аналога равенства (22) не существует, то это вынуждает для такого класса функций $f(X)$ вводить их оценки иным образом.

Для положительно-определенной функции $f(X)$ ее оценку примем в виде

$$\underline{k}\,\|X\| \le f(X) \le \bar{k}\,\|X\|, \text{ где } 0 \le \underline{k} < \bar{k}. \tag{23}$$

Аналогично вводится оценка для отрицательно-определенной функции $f(X)$

$$-\underline{k}\,\|X\| \ge f(X) \ge -\bar{k}\,\|X\|, \text{ где } 0 \le \underline{k} < \bar{k}. \tag{24}$$

Для однозначной знакопеременной функции $f(X)$ по априорным сведениям о ее свойствах определяются те непересекающиеся между собой области $\mathbf{X}^+$, в которых $f(X) \ge 0$, и области $\mathbf{X}^-$, в которых $f(X) \le 0$. Для области $\mathbf{X}^+$ оценка (23) функции $f(X)$ принимается в виде

$$\underline{k}\,\|X\| \le f(X) \le \bar{k}\,\|X\|, \; X \in \mathbf{X}^+, \tag{25}$$

и соответственно для области $\mathbf{X}^-$ оценка (24) функции $f(X)$ принимается в виде

$$\underline{k}\,\|X\| \ge f(X) \ge \bar{k}\,\|X\|, \; X \in \mathbf{X}^-. \tag{26}$$

Такими областями $\mathbf{X}^+$ и $\mathbf{X}^-$ могут быть, в частности, ортанты пространства $\mathbf{R}^m$.

Для рассматриваемой функции $f(X)$ решение задач (11) и (12) тривиально, так как известны точные оценки сверху и снизу для каждого значения аргумента из области определения функции (см. Приложение 2).

Пусть по-прежнему для вектора X_n задана его априорная оценка (7), тогда из (17)–(20) и (7) получим

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \bigcup_{A_n \in \mathbf{A},\, C_n \in \mathbf{C},\, X_n \in \mathbf{X}_n} (A_n X_n + f(X_n) C_n). \tag{27}$$

Для рассматриваемой функции $F(X_n, L_n)$ с заданными свойствами (25), (26) скалярной функции $f(X_n)$ решение задач (11) и (12) для построения (интервальной) верхней оценки $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$ множества $\mathbf{X}_{n+1}$ также не представляют сложности ввиду заданных априори оценок (7), (17), (19) и (25), (26) и сводятся к перебору вершин A_i^q множеств $\mathbf{A}_i$ (см. (18)). Пример применения достаточного условия (15) для данного частного случая рассмотрен в Приложении 3.

Представляет интерес матрица $\boldsymbol{A}_n$ в форме Фробениуса:

$$\boldsymbol{A}_n = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & & A_{n,m}^{\mathrm{T}} & & \end{matrix} \right\|. \tag{28}$$

Утверждение. Если в (27) матрица $\boldsymbol{A}_n$ принимает форму (28), то $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$ — точная верхняя оценка множества $\mathbf{X}_{n+1}$.

Проверка утверждения проводится прямой подстановкой.

Полученные выше результаты очевидным образом обобщаются на более широкий класс систем, когда в правой части (17) вместо скалярной функции $f(X_n)C_n$ представлена векторная функция $F(X_n, L_n) = || f_i(X_n, L_{n,i}) ||_{i=1}^m$ такая, что $f_i(0, L_{n,i}) = 0$ и $f_i(X_n, L_{n,i})$ линейно зависит от аргумента $L_{n,i}$, для которого задана множественная оценка (8).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для класса систем, описанных нелинейными разностными включениями, предложено обобщение дискретного аналога теоремы Ляпунова об устойчивости нелинейных динамических систем. Условия устойчивости носят характер достаточных, так как множества возможных значений вектора состояния погружаются в интервальные минимального размера.

Проверка выполнения достаточных условий устойчивости в общем случае нетривиальна, так как для получения верхних и нижних оценок координат вектора состояния требуется решать задачи отыскания глобальных экстремумов. Однако в частных случаях, встречающихся на практике, эта проверка не представляет вычислительной сложности. В частности, это справедливо для случая априорных оценок нелинейных неизвестных функций функциями, обладающими свойствами выпуклости/вогнутости на заданных множествах вектора состояний.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Рассмотренный подход к анализу робастной устойчивости нелинейных систем в заранее заданной области является более общим в сравнении с приведенным в [4], где изложен метод, основанный на квазилинейном представлении нелинейных функций по Барбашину [6]. Для иллюстрации рассмотрим следующий простейший пример.

Пусть

$$f(x) = \sqrt{|x|}. \tag{П1.1}$$

Представим (П1.1) в квазилинейном виде

$$f(x) = \varphi(x)x, \tag{П1.2}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|\operatorname{sign} x} = \frac{1}{\sqrt{|x|}\operatorname{sign} x}. \tag{П1.3}$$

При любом доопределении $\operatorname{sign} 0$, $\operatorname{sign} 0 = 1$ или $\operatorname{sign} 0 = 0$ из (П1.3) получаем

$$\varphi(0) = \frac{1}{0} = \infty,$$

и представление в квазилинейной форме на множестве, включающем начало координат, невозможно.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Проиллюстрируем описанный выше метод анализа устойчивости нелинейных разностных включений (17), (18) и (19) при $m = 2$ на следующем примере:

$$X_{n+1} = \boldsymbol{A}_n X_n + f(X_n)C_n = \begin{bmatrix} A_{1,n}^{\mathrm{T}} \\ A_{2,n}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} c_{1,n} f_1(X_n) \\ c_{2,n} f_2(X_n) \end{bmatrix}, \tag{П2.1}$$

где

$$f_1(X_n) = \operatorname{sign}(x_{1,n}\ x_{2,n}),\quad f_2(X_n) = \sqrt{x_{1,n}}. \tag{П2.2}$$

Ниже принимаем, что $\operatorname{sign} 0 = 0$.

Для элементов $a_{ij,n}$ матрицы $\boldsymbol{A}_n$, $i, j = 1, 2$, и координат $c_{i,n}$ вектора C_n заданы оценки

$$\begin{gathered}\underline{a}_{ij,n} \le a_{ij,n} \le \overline{a}_{ij,n}, \;\; j = 1, 2;\\ \underline{a}_{ij,n} = 0{,}2, \;\; \overline{a}_{ij,n} = 0{,}4, \;\; j = 1, 2;\\ c_{1,n} = c_1 = 0{,}3, \;\; c_{2,n} = c_2 = 0{,}35.\end{gathered} \tag{П2.3}$$

Зададим множество $\mathbf{X}_0$ в виде

$$\mathbf{X}_0 = \operatorname{conv} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}. \tag{П2.4}$$

Пусть $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_0$, тогда при выборе нормы вектора в форме (14′) получим

$$\rho(\mathbf{X}_n) = \max_{X_n \in \mathbf{X}_n} \| X_n \|_2 = \sqrt{8} \approx 2{,}83. \tag{П2.5}$$

Для семейства систем (П2.1)–(П2.4) найдем решения задач (11) и (12):

$$\begin{gathered}\underline{x}_{1,n+1} = -1{,}3;\\ \overline{x}_{1,n+1} = 1{,}9;\\ \underline{x}_{2,n+1} \approx -1{,}17;\\ \overline{x}_{2,n+1} \approx 1{,}95.\end{gathered} \tag{П2.6}$$

Из (П2.6) получаем

$$\rho(\mathbf{X}_{n+1}) = \max_{X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1}} \| X_{n+1} \|_2 \approx 2{,}73. \tag{П2.7}$$

Следовательно, $\rho(\mathbf{X}_{n+1}) < \rho(\mathbf{X}_n)$ и условие устойчивости (15) семейства систем (П2.1)–(П2.4) выполнено.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Еще один иллюстративный пример описывает проверку достаточного условия робастной устойчивости семейства систем (17), (18) и (19) при $m = 2$ при заданных оценках нелинейных функций.

Рассмотрим семейство систем

$$X_{n+1} = \boldsymbol{A}_n X_n + f(X_n) C, \tag{П3.1}$$

где для знакопеременной однозначной функции $f(X_n)$ заданы априорные оценки:

$$\begin{gathered}\underline{k} \| X \|_1 \le f(X) \le \overline{k} \| X \|_1, \;\; X \in \mathbf{X}^{(1)} = \{ X : x_i \ge 0, i = 1, 2 \};\\ f(X) = 0, \;\; X \in \mathbf{X}^{(2)} = \{ X : x_1 \ge 0, x_2 \le 0 \};\\ -k \| X \|_1 \ge f(X) \ge -\overline{k} \| X \|_1, \;\; X \in \mathbf{X}^{(3)} = \{ X : x_i \le 0, i = 1, 2 \};\\ f(X) = 0, \;\; X \in \mathbf{X}^{(4)} = \{ X : x_1 \le 0, x_2 \ge 0 \};\\ \underline{k} = 0, \;\; \overline{k} = 0{,}09,\end{gathered} \tag{П3.2}$$

а на элементы матрицы $\boldsymbol{A}_n$ наложены ограничения:

$$\begin{gathered}0{,}1 \le a_{11,n} \le 0{,}4, \;\; 0{,}1 \le a_{12,n} \le 0{,}4,\\ -0{,}4 \le a_{21,n} \le 0{,}1, \;\; -0{,}4 \le a_{22,n} \le 0{,}1,\\ B^{\mathrm{T}} = (0; 1).\end{gathered} \tag{П3.3}$$

Нетрудно убедиться, что функция $\| X \|_1 = |x_1| + |x_2|$ не может быть представлена в квазилинейной форме по Е.А. Барбашину, как и для примера из Приложения 1.

Анализируем, как и в Приложении 2, устойчивость семейства систем (П3.1)–(П3.3) в области (П2.4), полагая $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_0$. Для этого решим задачи (11) и (12) для каждого из множеств $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$, $\mathbf{X}^{(3)}$ и $\mathbf{X}^{(4)}$ и для каждой из вершин множественной оценки $\mathbf{A}$ (П3.3). Опуская арифметические выкладки, представим полученный для примера результат:

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \text{conv}\left\{ \begin{bmatrix} 1{,}96 \\ 1{,}96 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1{,}96 \\ -1{,}96 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1{,}96 \\ -1{,}96 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1{,}96 \\ 1{,}96 \end{bmatrix} \right\}. \qquad (\text{П}3.4)$$

Сравним радиусы множественных оценок вектора состояния: $\rho(\mathbf{X}_n) = 2{,}82$, $\rho(\mathbf{X}_{n+1}) = 2{,}76$, и убедимся, что достаточное условие (15) устойчивости выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастная устойчивость дискретных систем // Докл. АН СССР — 1991. — **316**, № 4. — С. 842–846.
2. Джури Е.И. Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 5. — С. 3–28.
3. Барабанов Н.Е. О показателе Ляпунова дискретных включений. I, II, III // Там же. — 1988. — № 2. — С. 40–46; № 3. — С. 24–29; № 5. — С.17–24.
4. Кунцевич В.М., Кунцевич А.В. Синтез робастно устойчивых дискретных систем управления нелинейными объектами // Там же. — 2008. — **16,** № 12. — С. 105–118.
5. Лурье А.И., Постников В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикл. математика и телемеханика — 1944. — **8**, № 3. — С. 246–248.
6. Дородницын А.А. Проблемы обработки информации // Вестн. АН СССР. — 1963. — № 2. — С. 85–87.
7. Дородницын А.А. Новые практические применения математических методов // Там же. — 1966. — № 7. — С. 24–29.
8. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 224 с.

Поступила 29.06.2010