УДК 518.9

А.А. БЕЛОУСОВ, Ю.И. БЕРДЫШЕВ, А.Г. ЧЕНЦОВ, А.А. ЧИКРИЙ

# О РЕШЕНИИ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО КОММИВОЯЖЕРА

**Ключевые слова:** *дифференциальная игра, игра со многими убегающими, порядок поимки, параллельное преследование.*

## ВВЕДЕНИЕ

В теории дифференциальных игр существует ряд формализаций, определяющих процедуру построения оптимальных стратегий игроков [1–5]. Ввиду большой сложности игровых задач часто ограничиваются достаточными условиями разрешимости, иначе говоря, получением некоторого гарантированного результата. Для исследования центральных в этой области проблем преследования–убегания «один на один» разработан ряд эффективных методов, позволяющих решать широкий круг задач [1–3]. Естественным обобщением этого спектра проблем стали задачи преследования–убегания с группами участников с той или другой стороны, так называемые задачи группового или поочередного преследования и убегания от группы. Исследование игровых задач началось в середине 70-х годов XX ст. Результаты по групповому преследованию содержатся в работах [1, 6–8], по убеганию — в [4, 9].

В данной статье рассматривается задача поочередного преследования (игровая задача динамического коммивояжера), в которой критерием качества является суммарное время поимки всех убегающих. Задача состоит из двух неразрывно связанных частей: переборной — для определения порядка поимки и непосредственного преследования при заданном порядке обслуживания. Первая из них относится к проблеме целераспределения, хорошо известной проектировщикам ракетной и космической техники, и представляется наиболее трудным звеном в решении исходной задачи. Многие полезные рекомендации по этой теме содержатся в работе [10], использующей метод динамического программирования для решения задач маршрутизации. Близкие проблемы изучаются в [11]. Когда порядок поимки убегающих определен, то целесообразно применение упомянутых ранее эффективных методов преследования. Следует подчеркнуть, что ключевая трудность проблемы состоит в том, что обе части исходной задачи (переборная и управленческая) неразрывны и решать их нужно только во взаимосвязи.

В исследовании задачи поочередного преследования отметим работы Е.П. Маслова и его коллег [12–14]. Подобными проблемами занимались санкт-петербургские [15] и екатеринбургские [16] ученые. Особый интерес представляет статья [17], в которой порядок преследования определяется позиционным образом.

К методике данной работы наиболее близки исследования [18, 19], где, следуя ранее высказанной идее, применяется метод разрешающих функций [1], дающий на основе введенных обратных функционалов Минковского обоснование параллельного сближения. Таким образом, когда преследователь использует алгоритм параллельного сближения при заданном порядке поимки убегающих, то остается определить оптимальный ответ каждого убегающего. При этом динамика каждого из игроков предполагается простой и имеется некоторое преимущество преследователя над каждым убегающим. Последнее обстоятельство позволяет свести исходную бесконечномерную оптимизационную проблему к двум взаимно зависимым конечномерным задачам: непрерывной оптимизации суммарного времени поимки по постоянным управлениям убегающих и дискретной оптимизации по порядку поимки.

Настоящая статья примыкает к работам [1, 10, 12–19] и развивает исследования [18–20].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача поочередной поимки одним игроком-преследователем ($x$) $N$ убегающих игроков ($y_i$), которые стремятся избежать сближения. Динамика объектов задается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = u, \quad x \in R^n, \quad x(0) = x_0, \ ||u|| \le 1,$$

$$\dot{y}_i = v_i, \quad y_i \in R^n, \quad y_i(0) = y_i, \ ||v_i|| \le \beta_i < 1, \ i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

где управления $u(\cdot), v_i(\cdot)$ — измеримые по Лебегу функции. Под поимкой понимается совпадение координат объектов $x(T_i) = y_i(T_i)$ в некоторый момент времени $T_i$. Перед преследователем ставится задача как можно скорее поймать всех убегающих, убегающие игроки, в свою очередь, стремятся этому помешать.

Различные формализации игровых задач сближения с групповой целью приведены в работах [1, 12–15, 18, 19]. Из этих исследований можно заключить, что конструктивные аналитические решения удается построить лишь для игр с двумя убегающими. Для большего числа убегающих оптимальное поведение игроков находится только численно. Но и численное исследование возможно только для небольших значений $N$, а для $N \ge 5$ такие задачи уже трудноразрешимы [18]. Сложность этих задач становится очевидной, если учесть тот факт, что принятие решений в них должно происходить в режиме реального времени. Следовательно, методы и алгоритмы, реализующие принятие решений, должны быть весьма быстрыми. В данной работе предлагается метод исследования игровой задачи коммивояжера, позволяющий достаточно эффективно решать задачу поимки (1) для большого числа убегающих.

## ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ

Подробное описание задачи (1) и подходов к ее решению дано в работе [1]. Основные результаты проведенных в ней исследований можно кратко сформулировать следующим образом. Очередность поимки определяется преследователем программно, т.е. в начале игры и далее не изменяется. При фиксированном порядке поимки преследователем используется стратегия параллельного сближения с каждым последующим убегающим игроком

$$u(v, x, y) = v - \left[ \langle v, e \rangle + \sqrt{\langle v, e \rangle^2 + 1 - v^2} \right] e, \ e = \frac{x - y}{||x - y||},$$

где $x$, $y$ — положения преследователя и убегающего в момент начала погони за этим игроком. При указанных предположениях в работе [1] доказано, что, во-первых, преследователь может поймать всех убегающих при любых их допустимых управлениях (1); во-вторых, для максимизации времени поимки $T_N$ убегающие должны двигаться с постоянными по направлению и максимальными по величине скоростями ($v_i(t) \equiv v_i$, $t \in [0, \infty)$, $||v_i|| = \beta_i$, $i = 1, \ldots, N$).

Таким образом, первоначальная игровая задача, которая, вообще говоря, бесконечномерна, сводится к двум конечномерным оптимизационным задачам: максимизации суммарного времени поимки при фиксированном порядке $T_N(v_1, \ldots, v_N)$ на множестве векторов $\{v_i \in R^n : ||v_i|| = \beta_i, \ i = 1, \ldots, N\}$; дискретной оптимизации по выбору последовательности поимки, которая минимизирует эти максимальные времена поимки.

Данная работа посвящена изучению первой задачи — максимизации суммарного времени поимки при фиксированном порядке. Связано это с тем, что большая часть проблем порождается именно этой задачей, и от эффективности ее решения главным образом зависит скорость и точность решения всей проблемы.

Относительно второй задачи отметим, что в ней речь идет о переборе $N!$ вариантов очередности поимки (вообще говоря). Причем для каждого такого варианта суммарное время поимки находится независимо от других. Значит, в этой части алгоритм решения может быть хорошо распараллелен и при его реализации на многопроцессорной вычислительной системе время оптимизации будет практически линейно зависеть от числа используемых процессоров.

### ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Исходная игровая задача (1) при фиксированном порядке поимки сводится к задаче условной оптимизации [21], функционал и ограничения которой в наиболее простом виде можно записать следующим образом:

$$T_N = \alpha_N \|x_N - y_N\| \to \max, \tag{2}$$

$$G_k(x_k, x_{k-1}) = \alpha_k \|x_k - y_k\| - \alpha_{k-1}\|x_{k-1} - y_{k-1}\| - \|x_k - x_{k-1}\| = 0, \; k = 1, \ldots, N,$$
$$y_0 = x_0, \;\; \alpha_0 = 0, \;\; \alpha_k = 1/\beta_k. \tag{3}$$

В этой формулировке максимизация проводится по векторам $x_k \in R^n$, которые обозначают точки поимки $k$-го убегающего:

$$x_k = x_{k-1} + (T_k - T_{k-1}) u_k = y_k + T_k v_k, \; k = 1, \ldots, N. \tag{4}$$

Здесь $T_k$ — момент поимки $k$-го убегающего, $v_k$ — управление $k$-го убегающего ($v_k \in R^n$, $\|v_k\| = \beta_k$), $u_k$ — управление преследователя на интервале $[T_{k-1}, T_k)$ ($u_k \in R^n$, $\|u_k\| = 1$). Отметим очевидное соотношение $T_k = \alpha_k \|x_k - y_k\|$. Значит, функционал $T_N$ (2) определяет суммарное время поимки, а ограничения (3) отражают соотношения между скоростями объектов, моментами и геометрическими координатами точек поимки.

По сути, в оптимизационной задаче (2), (3) речь идет о максимизации функции $T_N(v_1, \ldots, v_N)$ на множестве $\underbrace{S^{n-1} \times \ldots \times S^{n-1}}_{N}$ (декартовом произведении $N$ экземпляров $(n-1)$-мерных сфер). Требуется найти глобальный максимум этой функции. Однако следует отметить, что вычислительные методы оптимизации локальны, т.е. они позволяют найти лишь локальный максимум функции в окрестности начальной точки алгоритма. Поэтому, как правило, оптимизационный алгоритм начинает работу из нескольких точек (из некоторого достаточно представительного множества начальных точек), а полученный оптимум считается глобальным. Но такой общий подход порождает серьезную проблему в данной оптимизационной задаче. Суть ее состоит в следующем: если $M$ — число начальных точек на каждой из $N$ сфер $S^{n-1}$, то общее количество начальных точек оптимизационного алгоритма на множестве ограничений составляет $M^N$, а это число может оказаться огромным при достаточно больших значениях $M$ и $N$.

Для преодоления этой проблемы предлагается применить необходимые условия экстремума в виде правила множителей Лагранжа [21]. Заметим, что в общем случае переход от оптимизационной задачи к решению системы нелинейных уравнений не дает особых преимуществ в плане численного решения. Однако в данном случае необходимые условия позволяют извлечь важную аналитическую информацию об общем виде экстремальных точек.

### НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Для задачи (2), (3) правило множителей Лагранжа [21] можно сформулировать в следующем виде.

Если вектор $(x_1^*, \ldots, x_N^*) \in (R^n)^N$ является локальным максимумом функционала (2) при ограничениях (3), то существует ненулевой вектор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in R^N$ такой, что для функции

$$f(x_1,\dots,x_N,\lambda_1,\dots,\lambda_N)=||x_N-y_N||+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k G_k(x_k,x_{k-1})$$

производные $\dfrac{\partial}{\partial x_k} f(x_1^*,\dots,x_N^*,\lambda_1,\dots,\lambda_N)=0$ при $k=1,\dots,N.$

Выпишем последние соотношения в явном виде:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=\lambda_{k+1}\frac{\partial G_{k+1}}{\partial x_k}+\lambda_k\frac{\partial G_k}{\partial x_k}=\lambda_{k+1}\left[-\alpha_k\frac{x_k-y_k}{||x_k-y_k||}+\frac{x_{k+1}-x_k}{||x_{k+1}-x_k||}\right]-$$

$$-\lambda_k\left[-\alpha_k\frac{x_k-y_k}{||x_k-y_k||}+\frac{x_k-x_{k-1}}{||x_k-x_{k-1}||}\right]=0,\ k=1,\dots,N-1, \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_N}=\frac{x_N-y_N}{||x_N-y_N||}+\lambda_N\left[\alpha_N\frac{x_N-y_N}{||x_N-y_N||}-\frac{x_N-x_{N-1}}{||x_N-x_{N-1}||}\right]=0. \tag{6}$$

Учитывая (4), соотношения (5) запишем следующим образом:

$$\lambda_{k+1}(\alpha_k^2 v_k-u_{k+1})=\lambda_k(\alpha_k^2 v_k-u_k),\ k=1,\dots,N-1. \tag{7}$$

Отметим, что $||\alpha_k^2 v_k||=\alpha_k>1=||u_k||=||u_{k+1}||$, поэтому можно утверждать, что в скобках в формуле (7) стоят ненулевые векторы. Значит, если предположить, что одно из чисел $\lambda_k=0$, то и все остальные числа $\lambda_i$ $(i=1,\dots,N)$ должны быть равны нулю, а это противоречит утверждению правила множителей Лагранжа. Следовательно, все $\lambda_k\neq 0$ $(k=1,\dots,N)$.

Уравнение (7) можно переписать в виде

$$u_{k+1}=u_k+\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)w_k,\ w_k=\alpha_k^2 v_k-u_k\neq 0.$$

Это уравнение, с учетом $||u_{k+1}||=||u_k||=1$, имеет два решения:

$$u_{k+1}=u_k,$$

$$u_{k+1}=u_k-2\langle u_k,e_k\rangle e_k,\ e_k=\frac{w_k}{||w_k||}. \tag{8}$$

Первое решение, очевидно, не подходит — оно дает минимум времени при движении от точки $x_{k-1}$ до $x_{k+1}$. Вид оптимального управления (8) отмечался ранее (например, [12]) под названием «закон отражения от окружности».

Таким образом, необходимые условия экстремума позволяют установить оптимальное управление $u_{k+1}$ по заданным значениям $u_k$, $T_k$, $x_k$ (формулы (8) и (4)). Для нахождения $T_{k+1}$, соответствующего управлению $u_{k+1}$, следует переписать ограничения (3) в виде

$$\alpha_{k+1}||x_k+(T_{k+1}-T_k)u_{k+1}-y_{k+1}||-T_{k+1}=0.$$

Это уравнение является квадратным относительно $T_{k+1}$, а его корни равны

$$T_{k+1}=\frac{\alpha_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2-1}\left[T_k+\langle u_{k+1},a\rangle\pm\sqrt{\left\|\frac{T_k u_{k+1}+a}{\alpha_{k+1}}\right\|^2-(a^2-\langle u_{k+1},a\rangle^2)}\right], \tag{9}$$

где $a=y_{k+1}-x_k$. Из этих корней следует выбрать больший, так как (при прочих равных условиях) он дает большее время поимки. Точнее, можно формально показать, что в случае выбора другого корня общее время поимки $T_N$ может быть увеличено при сохранении тех же значений $x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_N$ путем надлежащего выбора $x_k$.

Отметим, что подкоренное выражение в формуле (9) может оказаться отрицательным. Это будет означать, что для предложенных значений $u_k$, $T_k$, $x_k$ не существует управления $u_{k+1}$, удовлетворяющего одновременно и необходимым условиям оптимальности (5) и ограничениям (3).

**СВЕДЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ К РЕШЕНИЮ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ**

Сделаем два простых замечания. Во-первых, множеством точек, которые удовлетворяют ограничению (3) при $k=1$, т.е. $\alpha_1 ||x_1 - y_1|| = ||x_1 - x_0||$, является сфера (так называемая сфера Аполлония)

$$||x_1 - d|| = R, \tag{10}$$

где $d = \dfrac{\alpha_1^2 y_1 - x_0}{\alpha_1^2 - 1}$, $R = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1^2 - 1} || y_1 - x_0 ||$. Во-вторых, из необходимых условий (6) следует, что оптимальный вектор $u_N$ должен быть параллелен вектору $x_N - y_N$. Учитывая соотношения (4), можно заключить, что $u_N$ должен быть параллелен $x_{N-1} - y_N$. Причем для увеличения времени поимки $N$-й убегающий игрок должен двигаться в направлении от точки $x_{N-1}$ к $y_N$. Значит, для максимизации суммарного времени поимки должно выполняться равенство

$$\left\langle u_N, \frac{y_N - x_{N-1}}{|| y_N - x_{N-1} ||} \right\rangle = 1.$$

Таким образом, исходная оптимизационная задача (2), (3) с помощью необходимых условий оптимальности сведена к нахождению всех корней одного нелинейного уравнения $F(x) = 0$, заданного на сфере Аполлония (10).

Функция $F(x)$ для произвольного вектора $x$, лежащего на сфере Аполлония (10), задается рекуррентно следующим образом:

1) полагаем $x_1 = x$, $T_1 = ||x_1 - x_0||$, $u_1 = \dfrac{x_1 - x_0}{T_1}$;

2) (шаг рекурсии) по заданным $x_k$, $T_k$, $u_k$ $(k = 1, \ldots, N-1)$ находим (см. (8) и (9))

$$w = \alpha_k \frac{x_k - y_k}{T_k} - u_k, \quad u_{k+1} = u_k - 2\left\langle u_k, \frac{w}{||w||} \right\rangle \frac{w}{||w||},$$

$$a = y_{k+1} - x_k, \quad D = \left\| \frac{T_k u_{k+1} + a}{\alpha_{k+1}} \right\|^2 - (a^2 - \langle u_{k+1}, a \rangle^2),$$

если $D < 0$, то формально полагаем $F(x) = -1$ и вычисление останавливаем, если $D \geq 0$, то процесс определения функции продолжается,

$$T_{k+1} = \frac{\alpha_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2 - 1} \left[ T_k + \langle u_{k+1}, a \rangle + \sqrt{D} \right], \quad x_{k+1} = x_k + (T_{k+1} - T_k) u_{k+1},$$

повторяем шаг рекурсии для $k = 1, \ldots, N-1$;

3) $F(x) = \left\langle u_N, \dfrac{y_N - x_{N-1}}{|| y_N - x_{N-1} ||} \right\rangle - 1.$

Из всех корней уравнения $F(x) = 0$ выбираем те, которые дают наибольшее значение $T_N$. Это значение $T_N$ является решением исходной оптимизационной задачи, соответствующие управления убегающих игроков имеют вид $v_k = \dfrac{x_k - y_k}{T_k}$ $(k = 1, \ldots, N)$.

Таким образом, вместо нахождения глобального максимума функции суммарного времени $T_N(v_1, \ldots, v_N)$ на декартовом произведении $N$ сфер $(S^{n-1})^N$ предлагается искать все корни уравнения $F(x) = 0$ на одной сфере $S^{n-1}$ вида (10). Это представляется значительно более простой задачей, несмотря на то, что функция $F$ имеет довольно сложный вид и задается рекуррентно. Основной результат работы можно кратко сформулировать в виде следующего утверждения.

**Теорема.** Решение игровой задачи коммивояжера (1) при выбранной очередности поимки сводится к нахождению всех корней уравнения $F(x)=0$ (для построенной указанным образом функции $F$), лежащих на сфере Аполлония (10).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход к решению игровой задачи динамического коммивояжера программно реализован для кластерного многопроцессорного комплекса в Институте кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины. Проведенные численные расчеты показали высокую эффективность построенного алгоритма. В игровой задаче поочередного преследования на плоскости оптимальная очередность сближения с 11–12 игроками синтезирована практически в режиме реального времени.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 384 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
3. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. — М.: Наука, 1988. — Т. 2. — 576 с.
4. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1992. — 260 с.
5. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в игровых задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
6. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 198 с.
7. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. — Ижевск: Изд-во Удм. гос. ун-та, 2009. — 265 с.
8. Ledyaev Yu. S. Optimal robust discontinuous feedback control in differential games of group pursuit // Int. Conf. Differential Equations and Topology, ded. 100 Anniversary L. S. Pontryagin (Moscow, June 17-22, 2008). — Moscow: Lomonosov State Univ., 2008. — P. 265.
9. Chikrii A.A. The problem of avoidance for controlled dynamic objects // J. Math., Game Theory and Algebra. — 1998. — **7**, N 2/3. — P. 81–94.
10. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. — М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. — 240 с.
11. Каспшицкая М.Ф., Глушкова В.В. Об устойчивости решения задачи коммивояжера // Кибернетика. — 1986. — № 3. — С. 26–32.
12. Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. Дифференциальные игры с групповой целью // Итоги науки и техники. Сер. Техн. кибернетика. — М.: ВИНИТИ, 1991. — **32**. — С. 32–59.
13. Шевченко И.И. Геометрия альтернативного преследования. — Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2003. — 240 с.
14. Шевченко И.И. Стратегии сближения с коалициями в целом. — Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2004. — 132 с.
15. Петросян Л.А., Ширяев В.Д. Групповое преследование одним преследователем нескольких преследуемых // Вестн. ЛГУ. — 1980. — **13**, № 3. — С. 50–57.
16. Бердышев Ю.И. Об одной нелинейной задаче последовательного управления с параметром // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2008. — Вып. 3. — С. 58–63.
17. Breakwell J.V., Hagedorn P. Point capture of two evaders in succession // J. Optim. Theory and Appl. — 1979. — **27**, N 1. — P. 90–97.
18. Чикрий А.А., Соболенко Л.А., Калашникова С.Ф. Численный метод решения задачи поочередного преследования // Кибернетика. — 1988. — № 1. — С. 44–49.
19. Чикрий А.А., Калашникова С.Ф. Преследование управляемым объектом группы убегающих // Там же. — 1987. — № 4. — С. 1–8.
20. Belousov A., Chikrii A. On solution of traveling salesman game problem // 12-th Intern. Symp. on Dynamic Games and Applications (3–6 July 2006, Sophia-Antipolis, France): Abstracts. — 2006. — P. 31.
21. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 479 с.


*Поступила 17.02.2010*