УДК 519. 85

О.А. ЕМЕЦ, Т.А. ПАРФЁНОВА

ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ: СВОЙСТВА ОЦЕНОК В МЕТОДЕ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Ключевые слова: *комбинаторная оптимизация, перестановки, транспортная задача, метод ветвей и границ.*

ВВЕДЕНИЕ

Развитие комбинаторной оптимизации [1–10] привело к созданию аппарата для исследования новых классов задач, более адекватно отражающих реалии. Значимость транспортных задач в разных постановках [10, 11], их актуальность [12, 13] в соединении с аппаратом комбинаторной оптимизации обусловили исследование транспортных задач на перестановках [14–17]. В работах [16, 17] для решения таких задач предложено применение метода ветвей и границ. Известно, что эффективность этого метода существенно зависит от правил ветвления допустимого множества и правил оценивания допустимых подмножеств.

В настоящей статье вводится оценка для допустимых подмножеств в данной задаче при решении ее методом ветвей и границ. Доказывается свойство этой оценки, позволяющее повысить его эффективность.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНКИ ДОПУСТИМОГО ПОДМНОЖЕСТВА

Рассмотрим однопродуктовую транспортную задачу на перестановках

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

$$x = (x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}) \in E_k(G), \tag{4}$$

где, как и в классической постановке, c_{ij} — тарифы перевозок продукта от производителя i к потребителю j; a_i — объем производства у производителя i; b_j — потребности потребителя j; $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$; $E_k(G)$ — общее евклидово множество перестановок [5] из элементов мультимножества $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ $(k = mn)$, которые являются возможными объемами перевозок и пронумерованы без ограничения общности так, что выполняется неравенство

$$g_1 \le g_2 \le \ldots \le g_k. \tag{5}$$

В модели (1)–(4) вектор перевозок x может быть только перестановкой заданных объемов $g_1, \ldots, g_k$.

Пусть некоторые переменные задачи (1)–(4) фиксированы как элементы из мультимножества G (что происходит при построении допустимого подмножества в методе ветвей и границ):

$$z_l = x_{ij} = g_{i_l}, \ l = 1, 2, \ldots, t. \tag{6}$$

Будем считать, что переменные z_l упорядочены следующим образом:

$$z_1 \geq z_2 \geq \ldots \geq z_t, \tag{7}$$

что для элементов из G, которые используются в (6), означает

$$g_{i_1} \geq g_{i_2} \geq \ldots \geq g_{i_t}. \tag{8}$$

Если переменные z_l определяют допустимое множество, то их значения x_{ij} из (6) не противоречат условиям (2), (3). Будем это учитывать в дальнейших рассуждениях.

Обозначим $y_1, \ldots, y_\tau$ не использованные в условии (6) (не принявшие конкретные значения) переменные x_{ij} задачи (1)–(4), $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать

$$y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_\tau, \tag{9}$$

где $\tau = k - t$.

Определим разность мультимножества A и его подмультимножества B: $A - B$. Пусть основы мультимножеств A и B — соответственно множества $S(A)$, $S(B)$, и обозначим кратности $k_A(x)$, $k_B(y)$ элементов A и B ($x \in A$, $y \in B$.). Напомним (см., например, [5]), что B является подмультимножеством мультимножества A $(B \subset A)$, если $S(B) \subset S(A)$, $k_B(x) \leq k_A(x)\ \forall x \in B$. Мультимножество C называется разностью мультимножества A и его подмультимножества B, если основа C определяется как множество всех тех элементов из A, кратность которых больше, чем в B:

$$S(C) = \{x \mid x \in A,\ \text{если}\ \ k_A(x) > k_B(x)\};$$

кратность элемента x из C определяется как разность его кратностей в A и B:

$$k_C(x) = k_A(x) - k_B(x)$$

(заметим, что при этом $k_A(x) > 0$, $k_B(x) \geq 0$).

Обозначим $C = A - B$, где $B \subset A$, и $G_B = \{g_{i_1}, \ldots, g_{i_t}\}$ — мультимножество использованных в (6) элементов G. Рассмотрим разность мультимножества G и G_B: $\widetilde{G} = G - G_B$. Упорядочим элементы $\widetilde{G} = \{\widetilde{g}_{j_1}, \widetilde{g}_{j_2}, \ldots, \widetilde{g}_{j_\tau}\}$:

$$\widetilde{g}_{j_1} \geq \widetilde{g}_{j_2} \geq \ldots \geq \widetilde{g}_{j_i} \geq \widetilde{g}_{j_{i+1}} \geq \ldots \geq \widetilde{g}_{j_\tau}, \tag{10}$$

т.е. (10) задает порядок не использованных в (6) объемов перевозок.

Обозначим c_{ij} коэффициенты целевой функции (1) при переменных x_{ij} из (6) как $c_{ij} = c_l^*$, где c_l^* — коэффициент при z_l из (6). Коэффициенты целевой функции при неопределенных переменных y_i из (9) обозначим $\widetilde{c}_i\ \ \forall i = 1, 2, \ldots, \tau$.

Покажем, что для множества D допустимых решений задачи (1)–(4), которое определяется условием (6) при решении этой задачи методом ветвей и границ, оценкой может быть величина $\xi(D)$, вычисляемая по формуле

$$\xi(D) = \sum_{j=1}^{t} c_j^* g_{i_j} + \sum_{i=1}^{k-t} \widetilde{c}_i \widetilde{g}_{j_i}, \tag{11}$$

в которой элементы удовлетворяют условиям (8), (10), а коэффициенты целевой функции — условиям

$$c_l^* \leq c_{l+1}^* \quad \forall l = 1, 2, \ldots, t-1, \tag{12}$$

$$\widetilde{c}_i \leq \widetilde{c}_{i+1} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, \tau - 1. \tag{13}$$

Из теоремы 3.1 [5, с. 79] имеем

$$\min_{x \in E_k(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j = \sum_{j=1}^{k} c_{\alpha_j} g_{\beta_j}, \tag{14}$$

где $E_k(G)$, как и ранее, — множество перестановок из элементов мультимножества $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$, а коэффициенты целевой функции и элементы в G упорядочены следующим образом:

$$c_{\alpha_1} \le c_{\alpha_2} \le \ldots \le c_{\alpha_k}, \tag{15}$$

$$g_{\beta_1} \ge g_{\beta_2} \ge \ldots \ge g_{\beta_k}. \tag{16}$$

Согласно этой же теореме слагаемые в правой части формулы (11)

$$\xi_1(D) = \sum_{j=1}^{t} c_j^* g_{i_j}, \tag{17}$$

$$\xi_2(D) = \sum_{i=1}^{k-t} \widetilde{c}_i \widetilde{g}_{j_i} \tag{18}$$

являются минимумами линейных функций (с коэффициентами $(c_1^*, \ldots, c_t^*)$, $(\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_\tau)$) на множествах перестановок из мультимножеств G_B (формула (17)) и $\widetilde{G}$ (формула (18)) соответственно:

$$\xi_1(D) = \min_{x=(x_1,\ldots,x_t)\in E_t(G_B)} \sum_{j=1}^{t} c_j^* x_j, \; \xi_2(D) = \min_{x=(x_1,\ldots,x_\tau)\in E_\tau(\widetilde{G}_B)} \sum_{i=1}^{\tau} \widetilde{c}_i x_i. \tag{19}$$

Как известно, число $\xi(D)$ является оценкой множества D в задаче минимизации, решаемой методом ветвей и границ, если она не превышает значений целевой функции задачи $\forall\, x \in D$. Для выражения (11) это нетрудно показать. Слагаемое $\xi_1(D)$ в выражении (11) для $\xi(D)$ $\forall\, x \in D$ постоянное, а слагаемое $\xi_2(D)$ — минимум, определяемый формулой (10), из всевозможных слагаемых в целевых функциях для допустимых точек x из множества D. Поэтому $\xi(D)$ в представлении (11) может использоваться как оценка множества D в методе ветвей и границ при решении задачи (1)–(4).

СВОЙСТВО ОЦЕНКИ $\xi(D)$ В МЕТОДЕ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ КОМБИНАТОРНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Покажем, что оценка $\xi(D)$, задаваемая формулой (11), обладает свойством, которое позволяет в методе ветвей и границ сократить количество вершин — допустимых подмножеств, подлежащих разветвлению.

Пусть $Y = \{y_1, \ldots, y_{p-1}, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_\tau\}$, где

$$y_p = \widetilde{g}_{j_q}, \; \widetilde{g}_{j_q} \in \widetilde{G}, \; \widetilde{g}_{j_q} < \widetilde{g}_{j_p}, \; p \ne q, \; q < \tau, \; 1 \le p \le \tau,$$

$$y_j \in \underset{1\le j\le\tau}{\widetilde{G}} - \{\widetilde{g}_{j_q}\} \;\; \forall\, j \ne p. \tag{20}$$

Пусть при условиях (9), (10), (13), (20) из множества $y_1, \ldots, y_\tau$ сформируем два множества векторов:

$$Y' = \{y_1 = y_1^0, \; y_2 = y_2^0, \ldots, y_{p-1} = y_{p-1}^0, \; y_p = \widetilde{g}_{j_q}, \; y_{p+1} = y'_{p+1}, \ldots, y_\tau = y'_\tau\},$$

$$Y'' = \{y_1 = y_1^0, \; y_2 = y_2^0, \ldots, y_{p-1} = y_{p-1}^0, \; y_p = \widetilde{g}_{j_p}, \; y_{p+1} = y''_{p+1}, \ldots, y_\tau = y''_\tau\}.$$

Отметим, что первые $p-1$ элементов в Y' и Y'' одинаковы; элемент y_p — это $\widetilde{g}_{j_q}$ (в Y') либо $\widetilde{g}_{j_p}$ (в Y''). В силу (20) $\widetilde{g}_{j_p} \ge \widetilde{g}_{j_q}$, поскольку $p < q$; из (13) получим $\widetilde{c}_p \le \widetilde{c}_q$.

Пусть D — подмножество допустимых решений, в котором координаты допустимого решения, которые не являются $y_1, \dots, y_\tau$, определены.

Пусть $Q' = D \cap Y'$; $Q'' = D \cap Y''$.

Теорема. Между оценками вида (11) для множеств Q' и Q'' существует соотношение

$$\xi(Q') \ge \xi(Q''). \tag{21}$$

Доказательство. Согласно (11) оценки для Q' и Q'' отличаются лишь двумя слагаемыми:

$$F' = \xi(Q') = \tilde{c}_p \tilde{g}_{j_q} + \tilde{c}_q \tilde{g}_{j_p} + \sigma, \tag{22}$$

$$F'' = \xi(Q'') = \tilde{c}_p \tilde{g}_{j_p} + \tilde{c}_q \tilde{g}_{j_q} + \sigma. \tag{23}$$

Покажем, что при условиях теоремы выполняется соотношение (21). Отнимем от (22) равенство (23):

$$F' - F'' = \tilde{c}_p (\tilde{g}_{j_q} - \tilde{g}_{j_p}) + \tilde{c}_q (\tilde{g}_{j_p} - \tilde{g}_{j_q}) = (\tilde{g}_{j_p} - \tilde{g}_{j_q})(\tilde{c}_q - \tilde{c}_p). \tag{24}$$

Заметим, что $\tilde{g}_{j_p} > \tilde{g}_{j_q}$ согласно (20), $\tilde{c}_q \ge \tilde{c}_p$ согласно (13), т.е. из (24) имеем $F' - F'' \ge 0$ либо $F' \ge F''$, $\xi(Q') \ge \xi(Q'')$, что и требовалось доказать.

Замечание. Рассмотренное выше свойство оценки (11) для подмножеств Q' и Q'' при ветвлении и отсечении в методе ветвей и границ эффективно использовать для отсечения множеств Q', когда рассмотрено множество Q'' и выполняется неравенство $\xi(Q'') \ge F^0$.

ПРИМЕР

Пусть рассматривается задача (1)–(4) и задано $a_1 = 14$, $a_2 = 16$, $a_3 = 15$; $b_1 = 23$, $b_2 = 16$, $b_3 = 6$; $c_{11} = 1$, $c_{12} = 6$, $c_{13} = 4$, $c_{21} = 7$, $c_{22} = 5$, $c_{23} = 2$, $c_{31} = 3$, $c_{32} = 9$, $c_{33} = 8$; $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Решим задачу методом ветвей и границ.

На рис. 1 дана схема реализации метода ветвей и границ. Здесь использованы следующие обозначения: D — множество всех допустимых решений задачи; A — разрыв и продолжение схемы; ветвление осуществляется следующим образом: наименьшему коэффициенту целевой функции ставится в соответствие наибольший элемент из G (например, $x_{11} = 9$, так как $c_{11} = 1$, и т.д.); F_0 — текущее рекордное минимальное значение целевой функции для известного допустимого решения; F_i $(i = 0, 1, \dots,)$ — значение целевой функции для i-го допустимого решения; $F_0 := F_i$ — операция замены текущего рекордного значения на новое, когда $F_i < F_0$. Разветвление в схеме по методу ветвей и границ происходит сверху вниз, а на одном уровне — слева направо, причем вначале ветвится уровень, если это возможно, а затем — переход вниз на следующий уровень. Каждый прямоугольник схемы соответствует множеству допустимых решений задачи, в которых определены переменные, зафиксированные в прямоугольнике либо находящиеся выше или левее по схеме. Знак $\varnothing$ обозначает, что прямоугольнику, возле которого он стоит, соответствует пустое множество допустимых решений. Если $\xi \ge F_0$, то допустимое множество не будет дальше ветвиться, а отсекается (отбрасывается). Величина ν — оценка множества, которое использовалось в [16, 17], а величина ξ — оценка вида (11). Допустимые множества, обозначенные в схеме как * *, согласно теореме в данной схеме могут не рассматриваться, поскольку для них, как и для Q', существуют множества Q'' с оценкой $\xi = \xi(Q'') \ge F_0$. Последнее свидетельствует об эффективности свойства, сформулированного в теореме.

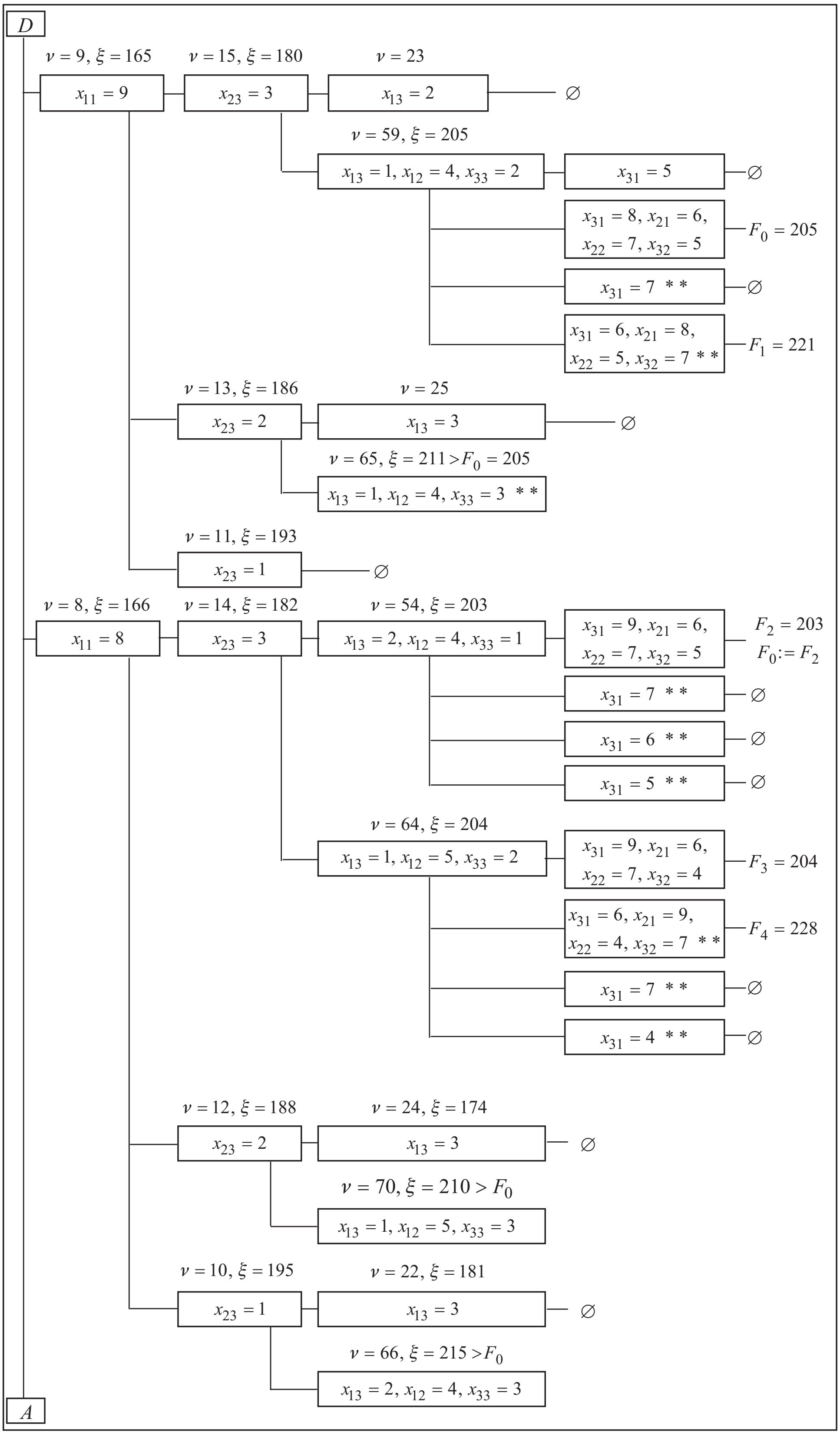
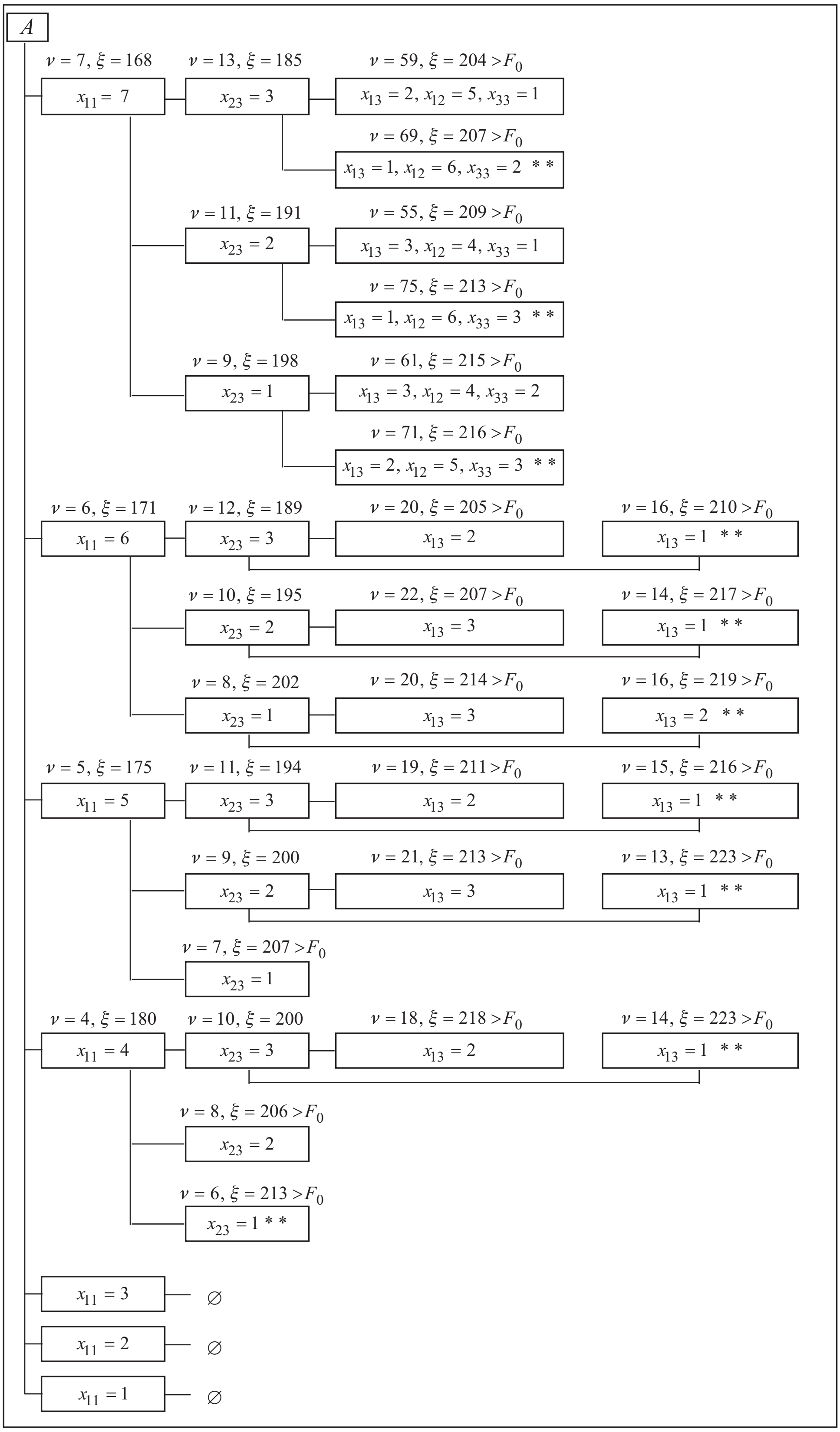


Рис. 1. Схема реализации метода ветвей и границ к примеру

Окончание рис. 1



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе для предложенной оценки допустимого подмножества перестановок при решении комбинаторной транспортной задачи на перестановках доказано ее свойство, которое позволяет повысить эффективность отсечения допустимых множеств.

Планируется обобщение этой оценки на более широкий класс задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — К.: Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения. — К.: Наук. думка, 2003. — 264 с.
3. Гуляницький Л.Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2005. — 32 с.
4. Панишев А.В., Плечистый Д.Д. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. — Житомир: ЖГТУ, 2006. — 300 с.
5. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. — 188 с.
6. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.
7. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними функціями. — К.: Наук. думка, 2005. — 117 с.
8. Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування: — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. — 129 с.
9. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с.
10. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. — 344 с.
11. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. — 384 с.
12. Гаращенко І.В. Моделювання і розробка методів оптимізації циклічних процесів на транспортних мережах: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Харків: ХНУРЕ, 2009. — 19 с.
13. Набатова С.М. Математичне моделювання та чисельний аналіз процесів транспорту та розподілення неперервних матеріальних потоків у технічних системах: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Харків: ХНУРЕ, 2009. — 19 с.
14. Ємець О.О., Парфьонова Т.О. Транспортні задачі комбінаторного типу // Вестн. Харьк. нац. автом.-дорож. ун-та. — 2005. — Вып. 29. — С. 162–164.
15. Ємець О.О., Парфьонова Т.О. Наближений метод для розв'язування комбінаторних транспортних задач // Радиоэлектроника и информатика. — 2006. — № 2. — С. 39–41.
16. Парфьонова Т.О. Евклідова комбінаторна транспортна задача на переставленнях, її розв'язування методом гілок та меж // Матеріали Другої ювіл. наук.-техн. конф. «Комп'ютерна математика в інженерії, науці та освіті» (CMSEE), Полтава, 29–31 жовт. 2008 р. — Київ: Вид-во НАН України, 2008. — С. 24.
17. Парфьонова Т.О. Застосування методу гілок та меж до комбінаторних транспортних задач // Тези доп. IV міжнар. наук.-практ. конф. «Методологія та практика менеджменту на порозі XXI століття: загальнодержавні, галузеві та регіональні аспекти», 15–16 трав. 2008 р. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2008. — С. 352–353.

Поступила 15.09.2009