УДК 519.21

Б.В. БОНДАРЕВ, А.В. БАЕВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ СТАБИЛИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ НАКОПИТЕЛЬНЫМ ФОНДОМ С ФУНКЦИЯМИ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Ключевые слова: *модель П. Самуэльсона, сложный процесс Пуассона, стохастический интеграл, неравенство Иенсена, пуассоновская мера, стохастическое дифференциальное уравнение*.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрена модель накопительной системы с потреблением, которая занимается также инвестированием как в безрисковые, так и в рисковые активы (т.е. фонд функционирует на BS-рынке) и обладает некоторыми функциями «страхования». В случайные моменты времени к компании может быть предъявлен иск, величина которого случайна и определяется следующим образом: если управляющая величиной иска — неотрицательная случайная величина η принимает значение x, $0<x\le\beta<1$, а капитал компании на данный момент времени составляет $\xi(t)$, то компания выплачивает по иску сумму $x\xi(t)$. Если случайная величина η принимает значение x, $\beta\le x$, то компания выплачивает по иску сумму $\beta\xi(t)$. При этом учитывается также потребление средств со скоростью (см., например, [2]) $0\le u_1(t,\xi(t))$. В качестве функционала качества используется функционал Р. Мертона [2]

$$M\int_0^T e^{-\rho s}[u_1(s,\xi(s))]^\gamma ds,\quad 0<\gamma<1, \tag{1}$$

$\rho>0$ — коэффициент непрерывного дисконтирования. Предполагалось, что цена рискового актива (акции) $S(t)$, $0\le t\le T$, описывается моделью П. Самуэльсона [3]

$$S(t)=S_0\exp\left\{\mu t-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W(t)\right\}, \tag{2}$$

где $W(t)$, $0\le t\le T$, — стандартный винеровский процесс. Предполагалось, что в момент времени t капитал страховой компании равен $\xi(t)$, часть средств $u\xi(t)$, $0\le u\le 1$, выделяется на покупку акций, оставшиеся средства $(1-u)\xi(t)$, $0\le u\le 1$, поступают на банковский счет под простую процентную ставку $r>0$ (как и в [2], считалось, что $\mu>r$). Предполагалось, что в момент времени $0\le t<T$ происходит потребление средств со скоростью $u_1(t,\xi(t))\ge 0$, суммарные выплаты страховой компании на промежутке времени от t до $t+\Delta t$ описываются величиной

$$\sum_{i=Z(t)+1}^{Z(t+\Delta t)}\xi(t)\chi(\eta_i,\beta), \tag{3}$$

где η_i — независимые, положительные, одинаково распределенные случайные величины, управляющие величинами выплат компании. Представление (3) есть не что иное как произведение $\xi(t)$ на некоторый сложный процесс Пуассона.

Пусть $P(\eta_i<x)=F_\eta(x)$, $Z(t)$ — процесс Пуассона со средним λt, независимый от последовательности $\{\eta_i\}$,

$$\chi(\tau,\beta)=\begin{cases}\tau, & 0<\tau\le\beta<1,\\ \beta, & \tau\ge\beta.\end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, если к компании в момент времени t предъявлен иск величины η, то компания выплачивает клиенту по иску величину $\eta\xi(t)$ при $0<\eta\le\beta<1$ и величину $\beta\xi(t)$ при $\eta\ge\beta$.

Очевидно, что $0\le u\le 1$. Класс $\mathfrak{R}$ допустимых скоростей потребления $u_1(t,x)$ состоит из функций

$$\mathfrak{R}=\left\{\begin{array}{l} u_1(t,x): u_1(t,0)\equiv 0,\ u_1(t,x)\ge 0,\ (t,x)\in[0,T]\times R, \\ \left|\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x}\right|\le c(t)<+\infty,\ (t,x)\in[0,T)\times R, \\ \displaystyle\int_0^T [c(t)]^{\gamma}\,dt<+\infty,\ 0<\gamma<1 \end{array}\right\}.$$

В работе [1] решена следующая задача: найдены такие управления $0\le u\le 1$, $u_1(t,x)\in\mathfrak{R}$, которые максимизируют плату

$$M\int_0^T e^{-\rho s}[u_1(s,\xi(s))]^{\gamma}\,ds,\ \ 0<\gamma<1,$$

$\rho>0$ — коэффициент непрерывного дисконтирования. Решение было найдено классическим способом: составлялось уравнение Р. Беллмана, находились цена управления и оптимальные управления, при этом существенным было требование $0<\gamma<1$. Для описания эволюции капитала фонда получено стохастическое дифференциальное уравнение с центрированной мерой Пуассона

$$\begin{aligned} d\xi(t)&=u\xi(t)(\mu dt+\sigma dW(t))+(1-u)\xi(t)r dt-u_1(t,\xi(t))dt- \\ &-\lambda\xi(t)\int_0^{+\infty}\chi(\alpha,\beta)F_{\eta}(d\alpha)dt-\xi(t)\int_0^{+\infty}\chi(\alpha,\beta)\widetilde{\nu}(d\alpha,dt). \end{aligned}\tag{5}$$

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей статье рассмотрена модель накопительной системы, которая занимается также инвестированием как в безрисковые, так и в рисковые активы и обладает, как и в [1], некоторыми функциями страхования, т.е. компания функционирует на BS-рынке. Возможны также денежные интервенции со скоростью $u_1(t,x)$, где t $(0\le t\le T)$ — момент времени поступления средств. При этом величина скорости зависит от x — собственного капитала фонда на данный момент.

Очевидно, что уравнение эволюции капитала такого фонда имеет вид

$$\begin{aligned} d\xi_{t,x}^{u,u_1}(s)&=u\xi_{t,x}^{u,u_1}(s)(\mu ds+\sigma dW(s))+(1-u)\xi_{t,x}^{u,u_1}(s)r ds+u_1(s,\xi_{t,x}^{u,u_1}(s))ds- \\ &-\lambda\xi_{t,x}^{u,u_1}(s)\int_0^{+\infty}\chi(\alpha,\beta)F_{\eta}(d\alpha)dt-\xi_{t,x}^{u,u_1}(s)\int_0^{+\infty}\chi(\alpha,\beta)\widetilde{\nu}(d\alpha,dt), \\ &\xi_{t,x}^{u,u_1}(t)=x,\ \ t\le s\le T. \end{aligned}\tag{6}$$

В последнем нетрудно убедиться, проанализировав вывод уравнения баланса в [1]. Формально уравнение (6) следует из (5), если потребление $(-u_1(s,\xi_{t,x}(s))ds)$ заменяется внешним денежным «вливанием» в фонд $(u_1(s,\xi_{t,x}(s))ds)$.

Функционалом качества считается функционал

$$R(t,x,u,u_1)=M\left\{\Phi(T,\xi_{t,x}^{u,u_1}(T))+\int_t^T\left[\frac{u_1^2(s,\xi_{t,x}^{u,u_1}(s))}{\sigma^2[\xi_{t,x}^{u,u_1}(s)]^2}ds+Q(s,\xi_{t,x}^{u,u_1}(s))\right]ds\right\},\tag{7}$$

где $\Phi(s,x)$ и $Q(s,x)$ — некоторые ограниченные функции. Задача управления состоит в минимизации по u, u_1 функционала (7) на множестве допустимых управлений $[0,1]\times U$, состоящего из функций, при которых существует сильное решение уравнения (6). В дальнейшем будем также предполагать, что $|u_1(t,x)|\le C|x|$.

В настоящую схему вписывается, например, расчет портфеля инвестора (т.е. доли $0\le u\le 1$), который проводится следующим образом: при некоторой фиксированной доле u^*, $0\le u^*\le 1$, стабилизационные вливания $u_1(s,x)$ обязаны обеспечить минимальное значение функционалу

$$R(t,x,u^*, u_1)=M\left\{\ln\left[\xi_{t,x}^{u^*,u_1}(s)\right]^{-2m}+\int_t^T\frac{u_1^2(s,\xi_{t,x}^{u^*,u_1}(s))}{\sigma^2[\xi_{t,x}^{u^*,u_1}(s)]^2}ds\right\},\ m>0, \tag{8}$$

$$d\xi_{t,x}^{u^*,u_1}(s)=\xi_{t,x}^{u^*,u_1}(s)(\mu u^*+(1-u^*)r-\lambda c(\beta))ds+u_1(s,\xi_{t,x}^{u^*,u_1}(s))ds+$$

$$+\sigma u^*\xi_{t,x}^{u^*,u_1}(s)dW(s)-\int_0^{+\infty}\chi(\alpha,\beta)\xi_{t,x}^{u^*,u_1}(s)\widetilde{\nu}(d\alpha,ds), \tag{9}$$

$$\xi_{t,x}^{u^*,u_1}(t)=x,\ \ t\le s\le T,\ \ c(\beta)=\int_0^{+\infty}\chi(\alpha,\beta)F_n(d\alpha),$$

где u^* — фиксировано.

Суть оптимальных вливаний (либо отбора средств) заключается в обеспечении максимальных значений капитала в терминальный момент, т.е. в момент времени T (первое слагаемое минимально); при этом суммарные стабилизационные воздействия (второе слагаемое) должны быть также минимальны. После того, как найдено значение функционала $R(t,x,u^*)=\min\limits_{u_1\in U}R(t,x,u^*, u_1)$, находится $R(t,x)=\min\limits_{0\le u^*\le 1}R(t,x,u^*)$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть класс допустимых управлений состоит из таких функций, при которых решение

$$d\xi_{t,x}^{u_1}(s)=a(s,\xi_{t,x}^{u_1}(s))ds+u_1(s,\xi_{t,x}^{u_1}(s))ds+\sigma(s,\xi_{t,x}^{u_1}(s))dW(s)-$$

$$-\int_0^{+\infty}\gamma(s,\alpha,\xi_{t,x}^{u_1}(s))\widetilde{\nu}(d\alpha,ds),\xi_{t,x}^{1,u_1}(t)=x,\ \ t\le s\le T, \tag{10}$$

существует и единственно. Пусть также $\mu_{t,x}^{u_1}$ — мера, порожденная решением (10) в пространстве траекторий $\{\xi_{t,x}^{u_1}(s)\colon t\le s\le T\}$, $\mu_{t,x}^0$ — мера, порожденная решением уравнения

$$d\xi_{t,x}^0(s)=a(s,\xi_{t,x}^0(s))ds+\sigma(s,\xi_{t,x}^0(s))dW(s)-\int_0^{+\infty}\gamma(s,\alpha,\xi_{t,x}^0(s))\widetilde{\nu}(d\alpha,ds), \tag{11}$$

$$\xi_{t,x}^{1,0}(t)=x,\ \ t\le s\le T.$$

Будем предполагать, что управления $u_1(t,x)$ такие, что выполняется условие

$$\frac{u^2(t,x)}{\sigma^2(t,x)}\le C<+\infty, \tag{12}$$

тогда плотность меры $\mu_{t,x}^0$ относительно $\mu_{t,x}^{u_1}$ имеет вид (см. [4, 5])

$$\rho_{t,x}(\xi_{t,x}(\cdot))=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T\frac{u_1^2(s,\xi_{t,x}^0(s))}{\sigma^2(s,\xi_{t,x}^0(s))}ds-\int_t^T\frac{u_1(s,\xi_{t,x}^0(s))}{\sigma(s,\xi_{t,x}^0(s))}dW(s)\right\}. \tag{13}$$

Теорема 1. На классе допустимых управлений справедливо неравенство

$$R(t,x,u_1)\geq -2\ln M\exp\left(-\frac{1}{2}\Phi(T,\xi^0_{t,x}(T))-\frac{1}{2}\int\limits_t^T Q(s,\xi^0_{t,x}(s))ds-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^T\int\limits_0^{+\infty}\ln\frac{\zeta(s,\xi^0_{t,x}(s)-\gamma(s,\alpha,\xi^0_{t,x}(s)))}{\zeta(s,\xi^0_{t,x}(s))}\widetilde{\nu}(d\alpha,ds)\right), \tag{14}$$

причем равенство достигается при управлении

$$\bar{u}_1(t,x)=\sigma^2(t,x)\frac{1}{\zeta(t,x)}\frac{\partial\zeta(t,x)}{\partial x}. \tag{15}$$

Здесь $\zeta(t,x)$ — решение задачи

$$\frac{\partial\zeta}{\partial s}+a(s,x)\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\zeta\lambda\int\limits_0^{+\infty}\ln\frac{\zeta(s,x-\gamma(s,\alpha,x))}{\zeta(s,x)}dF_\eta(\alpha)-\frac{\zeta}{2}Q(s,x)=0,$$

$$-2\ln\zeta(T,x)=\Phi(T,x). \tag{16}$$

Доказательство. Воспользуемся идеями и методами, изложенными в работе [6]. Запишем представление функционала стоимости (7) в следующем виде:

$$R(t,x,u_1)=M\ln\exp\left(\Phi(T,\xi^{u_1}_{t,x}(T))+\int\limits_t^T\left[\frac{u_1^2(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}{\sigma^2(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}+Q(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))\right]ds\right)=$$

$$=-M\,2\ln\exp\left(-\frac{1}{2}\Phi(T,\xi^{u_1}_{t,x}(T))-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\left[\frac{u_1^2(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}{\sigma^2(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}+Q(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))\right]ds-\right.$$

$$\left.-\int\limits_t^T\frac{u_1(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}{\sigma(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}dW(s)-\int\limits_t^T\int\limits_0^{+\infty}\ln\frac{\zeta(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s)-\gamma(s,\alpha,\xi^{u_1}_{t,x}(s)))}{\zeta(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}\widetilde{\nu}(d\alpha,ds)\right). \tag{17}$$

Воспользовавшись неравенством Иенсена для функции $f(x)=-\ln x$, $x>0$, из (17) с учетом (13) имеем неравенство

$$R(t,x,u_1)\geq -2\ln M\exp\left(-\frac{1}{2}\Phi(T,\xi^{u_1}_{t,x}(T))-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\left[\frac{u_1^2(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}{\sigma^2(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}+Q(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))\right]ds-\right.$$

$$\left.-\int\limits_t^T\frac{u_1(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}{\sigma(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}dW(s)-\int\limits_t^T\int\limits_0^{+\infty}\ln\frac{\zeta(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s)-\gamma(s,\alpha,\xi^{u_1}_{t,x}(s)))}{\zeta(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}\widetilde{\nu}(d\alpha,ds)\right)=$$

$$=-2\ln M\exp\left(-\frac{1}{2}\Phi(T,\xi^0_{t,x}(T))-\frac{1}{2}\int\limits_t^T Q(s,\xi^0_{t,x}(s))ds-\right.$$

$$\left.-\int\limits_t^T\int\limits_0^{+\infty}\ln\frac{\zeta(s,\xi^0_{t,x}(s)-\gamma(s,\alpha,\xi^0_{t,x}(s)))}{\zeta(s,\xi^0_{t,x}(s))}\widetilde{\nu}(d\alpha,ds)\right). \tag{18}$$

Знак равенства в неравенстве Иенсена достигается тогда и только тогда, когда подынтегральная функция является константой [7]. Покажем, что при выполнении (15) случайная величина, стоящая под знаком математического ожидания в неравенстве (17), не случайная. Воспользовавшись обобщенной формулой Ито [8], имеем

$$-\frac{1}{2}\Phi(T,\xi^{u_1}_{t,x}(T))-\ln\zeta(t,x)=\int_t^T\left[\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial s}+\left\{a(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))+u_1(s,\xi^{1,u_1}_{t,x}(s))\right\}\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma^2(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}{2\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\frac{\sigma^2(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}{2\zeta^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right]ds+$$

$$+\int_t^T\sigma(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}dW(s)+\lambda\int_t^T\int_0^{+\infty}\left[\ln\frac{\zeta(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s)-\gamma(s,\alpha,\xi^{u_1}_{t,x}(s)))}{\zeta(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\gamma(s,\alpha,\xi^{1,u_1}_{t,x}(s))\right]dF_\eta(\alpha)ds+\int_t^T\int_0^\infty\ln\frac{\zeta(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s)-\gamma(s,\alpha,\xi^{u_1}_{t,x}(s)))}{\zeta(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}\widetilde{\nu}(d\alpha,ds). \qquad (19)$$

Поскольку при $u_1(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))=\sigma^2(s,\ \xi^{u_1}_{t,x}(s))\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ справедливы соотношения

$$u_1(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\sigma^2(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\sigma^2(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))=\frac{u_1^2(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}{2\sigma^2(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}, \qquad (20)$$

$$\sigma(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{u_1(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}{\sigma(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))},$$

то из (19) с учетом (16) и (20) следует

$$-\ln\zeta(t,x)=\frac{1}{2}\Phi(T,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(T))+\frac{1}{2}\int_t^T\frac{\bar u_1^2(s,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))}{\sigma^2(s,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))}ds+\frac{1}{2}\int_t^T Q(s,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))ds+$$

$$+\int_t^T\frac{\bar u_1(s,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))}{\sigma(s,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))}dW(s)+\int_t^T\int_0^{+\infty}\ln\frac{\zeta(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s)-\gamma(s,\alpha,\xi^{u_1}_{t,x}(s)))}{\zeta(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}\widetilde{\nu}(d\alpha,ds),$$

т.е.

$$-2\ln\zeta(t,x)=\int_t^T\frac{\bar u_1^2(s,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))}{\sigma^2(s,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))}ds+\int_t^T Q(s,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))ds+\Phi(T,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))+$$

$$+2\int_t^T\frac{\bar u_1(s,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))}{\sigma(s,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))}dW(s)+2\int_t^T\int_0^{+\infty}\ln\frac{\zeta(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s)-\gamma(s,\alpha,\xi^{u_1}_{t,x}(s)))}{\zeta(s,\xi^{u_1}_{t,x}(s))}\widetilde{\nu}(d\alpha,ds). \qquad (21)$$

Другими словами, величина, стоящая под знаком математического ожидания в (18), — не случайная; следовательно, минимум в (15) достигается при управлении (13).

Теорема доказана.

Замечание 1. Из равенства (21), в частности, следует

$$M\int_t^T\frac{\bar u_1^2(s,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))}{\sigma^2(s,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))}ds+M\int_t^T Q(s,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))ds+M\Phi(T,\xi^{\bar u_1}_{t,x}(s))=-2\ln\zeta(t,x). \qquad (22)$$

Замечание 2. Функция $V(s,x)=-2\ln\zeta(t,x)$ является ценой управления.

Действительно, запишем уравнение Р. Беллмана [9] для уравнения (13) с функционалом качества (7). Нетрудно увидеть, что

$$0=\min_{u_1\in U}\left\{\frac{\partial V}{\partial s}+(a(s,x)+u_1)\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+\lambda\int_0^{+\infty}\left[V(s,x-\gamma(s,\alpha,x))-V(s,x)+\gamma(s,\alpha,x)\frac{\partial V}{\partial x}\right]F_\eta(d\alpha)+\frac{u_1^2}{\sigma^2}+Q(s,x)\right\}, \tag{23}$$

$$V(T,x)=\Phi(x).$$

Отсюда имеем

$$\bar{u}_1=-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{24}$$

Подставив (24) в (23), получим

$$0=\frac{\partial V}{\partial s}+a(s,x)\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\sigma^2(s,x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+$$

$$+\lambda\int_0^{+\infty}\left[V(s,x-\gamma(s,\alpha,x))-V(s,x)+\gamma(s,\alpha,x)\frac{\partial V}{\partial x}\right]F_\eta(d\alpha)+Q(s,x),\ V(T,x)=\Phi(x). \tag{25}$$

Покажем, что $V(s,x)=-2\ln\zeta(t,x)$ является решением (25). Действительно,

$$-2\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial s}-2a(s,x)\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\left[2\frac{1}{\zeta^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2-2\frac{1}{\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]-\frac{1}{4}\sigma^2(s,x)\left(2\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2-$$

$$-2\lambda\int_0^{+\infty}\left[-\ln\zeta(s,x-\gamma(s,\alpha,x))+\ln\zeta(s,x)-\gamma(s,\alpha,x)\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]F_\eta(d\alpha)+Q(s,x)=0,$$

$$-2\ln(T,x)=\Phi(x),$$

так как имеет место равенство (16).

Следствие. В случае уравнения (9) при условии $|u_1(t,x)|\le C|x|$ неравенство (14) очевидно примет вид

$$R(t,x,u^*,u_1)\ge-2\ln M\exp\left(-\frac{1}{2}\Phi(T,\xi_{t,x}^{u^*,0}(T))-\frac{1}{2}\int_t^T Q(s,\xi_{t,x}^{u^*,0}(s))ds-\right.$$

$$\left.-\int_t^T\int_0^\infty\ln\frac{\zeta_{u^*}(s,\xi_{t,x}^{u^*,0}(s)[1-\chi(\alpha,\beta)])}{\zeta_{u^*}(s,\xi_{t,x}^{u^*,0}(s))}\tilde{\nu}(d\alpha,ds)\right). \tag{26}$$

Вместо соотношения (15) имеем

$$\bar{u}_1(t,x)=\sigma^2x^2\frac{1}{\zeta_{u^*}(t,x)}\frac{\partial\zeta_{u^*}(t,x)}{\partial x}, \tag{27}$$

а уравнение (16) примет вид

$$\frac{\partial\zeta_{u^*}}{\partial s}+\frac{\partial\zeta_{u^*}}{\partial x}x(\mu u^*+(1-u^*)r)+\frac{1}{2}(u^*)^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2\zeta_{u^*}}{\partial x^2}+$$

$$+\zeta_{u^*}\lambda\int_0^{+\infty}\ln\frac{\zeta_{u^*}(s,x(1-\chi(\alpha,\beta)))}{\zeta_{u^*}(s,x)}dF_\eta(\alpha)-\frac{1}{2}\zeta_{u^*}Q(s,x)=0, \tag{28}$$

$$-2\ln\zeta_{u^*}(T,x)=\Phi(T,x).$$

Тогда цена управления определится выражением

$$V(t,x)=-2\min_{0\le u^*\le 1}\ln\zeta_{u^*}(t,x). \tag{29}$$

Рассмотрим пример. Пусть

$$\Phi(s,x)\equiv\ln x^{-2m},\ \ m>0,\ \ Q(s,x)\equiv 0,$$

т.е. на траекториях (9) минимизируется функционал (8).

Будем находить решение уравнения (28) в виде $\zeta_{u^*}(s,x)=g_{u^*}(s)x^{-m}$, $g_{u^*}(s)>0$, тогда

$$g'_{u^*}(s)x^m-(\mu u^*+(1-u^*)r)mg_{u^*}(s)x^{-m}+\frac{1}{2}(u^*)^2m(m-1)\sigma^2g_{u^*}(s)x^{-m}-$$

$$-\lambda m\int_0^{+\infty}\ln(1-\chi(\alpha,\beta))dF_\eta(\alpha)g(s)x^{-m}=0,\ -2\ln g_{u^*}(T)x^m=\ln x^{-2m}.$$

Таким образом, для $g_{u^*}(s)$ получаем дифференциальное уравнение

$$g'_{u^*}(s)-\left[(\mu u^*+(1-u^*)r)m-\frac{1}{2}(u^*)^2m(m-1)\sigma^2+\right.$$

$$\left.+\lambda m\int_0^{+\infty}\ln(1-\chi(\alpha,\beta))dF_\eta(\alpha)\right]g_{u^*}(s)=0,\quad g_{u^*}(T)=1. \tag{30}$$

Решение задачи (30) очевидно имеет вид

$$g_{u^*}(s)x^m-(\mu u^*+(1-u^*)r)mg_{u^*}(s)x^{-m}+\frac{1}{2}(u^*)m(m-1)\sigma^2g_{u^*}(s)x^{-m}-$$

$$-\lambda m\int_0^{+\infty}\ln(1-\chi(\alpha,\beta))dF_\eta(\alpha)g(s)x^{-m}=0,\ \ -2\ln g_{u^*}(T)x^m=\ln x^{-2m}. \tag{31}$$

Таким образом, решением задачи (28) будет $\zeta_{u^*}(s,x)=x^{-m}g_{u^*}(s)$, а оптимальным управлением — функция

$$\bar{u}_1(t,x)=-\sigma^2x^2\frac{1}{g_{u^*}(t)x^{-m}}mx^{-m-1}g_{u^*}(t)=-\sigma^2mx.$$

Очевидно также, что

$$R(s,x,u^*)=-2\ln x^{-m}g_{u^*}(s)=2m\ln x-2\ln g_{u^*}(s)=2m\ln x+$$

$$+2\left[(\mu u^*+(1-u^*)r)m-\frac{1}{2}m(m-1)\sigma^2(u^*)^2+\lambda m\int_0^{+\infty}\ln(1-\chi(\alpha,\beta))dF_\eta(\alpha)\right](T-s),$$

$$\min_{0\le u^*\le 1}R(s,x,u^*)=2m\ln x+$$

$$
+\begin{cases} 2rm+2\lambda m\int\limits_0^{+\infty}\ln(1-\chi(\alpha,\beta))dF_\eta(\alpha)(T-s), & r\le \mu-\dfrac{1}{2}(m-1)\sigma^2,\ u^*=0,\\ 2\mu m-m(m-1)\sigma^2+2\lambda m\int\limits_0^{+\infty}\ln(1-\chi(\alpha,\beta))dF_\eta(\alpha)(T-s), & r>\mu-\dfrac{1}{2}(m-1)\sigma^2,\ u^*=1. \end{cases}
$$

Замечание 3. Если $m\le 1$, то в силу условия $0\le r<\mu$ имеем $u^*=0$. При этом

$$
\min_{0\le u^*\le 1} R(s,x,u^*)=2m\ln x+2rm+2\lambda m\int\limits_0^{+\infty}\ln(1-\chi(\alpha,\beta))dF_\eta(\alpha)\,(T-s)\,.
$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье при нахождении оптимального управления стохастической системой со скачками авторы опирались на два существенных момента: 1) плотность «опорной меры» не содержит в себе пуассоновских интегралов; 2) предложенный в работе [6] метод нахождения оптимального управления стохастической системой не требует установления априорной «гладкости» цены управления по начальным условиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Бондарев Б.В., Баев А.В. Управление накопительно-потребительским фондом с функциями страховой компании // Укр. мат. вестник. — 2006. — **3**, № 2. — С. 166–186.
2. Merton R.C. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time model // J. Economic Theory. — 1971. — **3**. — P. 373–413.
3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики: факты, модели. Т. 1, 2. — М.: ФАЗИС, 1998. — 1017 с.
4. Гихман И.И. Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 612 с.
5. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1. — М.: Изд. фирма «Физ.-мат. лит.», 1994. — 366 с.
6. Баклан В.В. Об оптимальном управлении некоторыми диффузионными процессами // Теория случайных процессов. Вып 4. — Киев: Наук. думка, 1976. — С. 13–18.
7. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: ИЛ, 1948. — 456 с.
8. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка, 1968. — 354 с.
9. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978. — 316 с.

Поступила 21.01.2009,
После доработки 11.01.2010