КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

С.И. ЛЯШКО, В.В. СЕМЕНОВ

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ М.А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО

Ключевые слова: *метод простой итерации, сходимость, операторное уравнение, разрешимость, бочечное пространство.*

В работах [1, 2] изучалась сходимость метода простой итерации для решения уравнения

$$x - Ax = f \tag{1}$$

с линейным самосопряженным оператором A, действующим в гильбертовом пространстве H. Предполагалось, что $||A|| = 1$. Основной результат статьи [1] — следующая теорема.

Теорема 1 (М.А. Красносельского). Пусть -1 не является собственным значением оператора A, уравнение (1) при данном $f \in H$ имеет решение (возможно, не единственное). Тогда при любом начальном приближении $x_0 \in H$ последовательные приближения

$$x_{n+1} = Ax_n + f \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

сходятся к одному из решений операторного уравнения (1).

Цель настоящей работы — получить обобщение данной теоремы для операторов, действующих в банаховых и, более того, в ненормированных локально выпуклых пространствах.

Пусть E — хаусдорфово топологическое векторное пространство, A — эндоморфизм пространства E (линейный непрерывный оператор, действующий из пространства E в E). Рассмотрим операторное уравнение

$$x - Ax = y, \tag{2}$$

где $y \in E$ — известный элемент E.

Для решения уравнения (2) применим метод простой итерации

$$x_n = Ax_{n-1} + y, \tag{3}$$

где $x_0 \in E$ — заданное начальное приближение. Порожденную итерационной процедурой (3) последовательность (x_n) можно представить в виде

$$x_n = y + Ay + A^2 y + \ldots + A^{n-1} y + A^n x_0. \tag{4}$$

Покажем, что для определенного ниже класса эндоморфизмов существует простая связь между разрешимостью операторного уравнения (2) и сходимостью последовательности (x_n), порожденной равенством (3).

Определение 1. Эндоморфизм A назовем правильным, если для произвольного элемента $x \in E$ последовательность $(A^n x)$ сходится в пространстве E.

Для правильного эндоморфизма A пространства E определим следующий линейный оператор $B: E \to E$:

$$Bx = \lim_{n \to \infty} A^n x, \; x \in E.$$

Предположим, что E — хаусдорфово бочечное пространство. Тогда линейный оператор B — эндоморфизм пространства E [3, с. 105, следствие 1].

Для произвольных элементов $y^* \in E^*$ и $x \in E$ имеет место соотношение

$$\langle (A^*)^n y^*, x\rangle_{E^*, E} = \langle y^*, A^n x\rangle_{E^*, E} \to \langle y^*, Bx\rangle_{E^*, E} = \langle B^* y^*, x\rangle_{E^*, E} \text{ при } n \to \infty,$$

где $A^*: E^* \to E^*$, $B^*: E^* \to E^*$ — соответствующие сопряженные операторы.

Таким образом, последовательность $((A^*)^n y^*)$ сходится в слабой топологии $\sigma(E^*, E)$ к элементу $B^* y^* \in E^*$.

Используя этот факт и условие сходимости из определения правильности эндоморфизма A, получаем

$$\langle y^* A^{2n} x\rangle_{E^*, E} = \langle (A^*)^n y^*, A^n x\rangle_{E^*, E} \to \langle B^* y^*, Bx\rangle_{E^*, E} = \langle y^*, B^2 x\rangle_{E^*, E}$$

$$\text{при } n \to \infty.$$

Следовательно, $A^{2n} x \to B^2 x$ в топологии $\sigma(E^*, E)$.

Получили, что $B^2 = B$. Кроме того, поскольку

$$BAx = \lim_{n \to \infty} A^{n+1} x = Bx = ABx,$$

имеем $B = AB = BA$. Отсюда следует

$$R(B) = N(I - A). \tag{5}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. Пусть A — правильный эндоморфизм хаусдорфова бочечного пространства E. Тогда $y \in R(I - A)$ в том и только в том случае, когда для произвольного элемента $x_0 \in E$ последовательность (4) сходится в пространстве E к решению операторного уравнения (2).

Доказательство. Пусть для элемента $y \in E$ последовательность (x_n), определенная (4), сходится в пространстве E к элементу $x \in E$. Покажем, что x — решение операторного уравнения (2) с правой частью $y \in E$, т.е. $y \in R(I - A)$.

Действительно, поскольку

$$Bx_n = B(y + Ay + A^2 y + \ldots + A^{n-1} y + A^n x_0) = nBy + Bx_0,$$

имеем $By = 0$, иначе последовательность (Bx_n) не будет ограниченной в E, что противоречит сходимости (x_n).

Следовательно, справедливо соотношение

$$(I - A)(y + Ay + \ldots + A^{n-1} y) = y - A^n y \to y - By = y \text{ при } n \to \infty.$$

Далее имеем

$$y + Ay + \ldots + A^{n-1} y \to x - Bx_0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, установлено равенство $(I - A)(x - Bx_0) = y$, но в то же время, учитывая условие (5), получаем $(I - A)(x - Bx_0) = (I - A)x$. Следовательно, справедливо равенство $(I - A)x = y$.

Предположим, что $y \in R(I - A)$. Тогда для некоторого элемента $x \in E$ имеем $y = x - Ax$ и выполняется равенство

$$y + Ay + \ldots + A^{n-1} y = x - Ax + Ax - A^2 x + \ldots + A^{n-1} x - A^n x = x - A^n x.$$

Зафиксируем элемент $x_0 \in E$ и рассмотрим последовательность

$$x_n = y + Ay + A^2 y + \ldots + A^{n-1} y + A^n x_0 .$$

Поскольку $A^n x \to Bx$ и $A^n x_0 \to Bx_0$ при $n \to \infty$, получаем

$$x_n \to x - Bx - Bx_0 \text{ при } n \to \infty.$$

Кроме того, несложно установить, что элемент $x - Bx - Bx_0$ — решение уравнения (2). Действительно, $(I - A)(x - Bx - Bx_0) = x - Ax + (I - A)B(x_0 - x) = y$ в силу (5).

С помощью классической спектральной теоремы [4, 5] покажем, что правильные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве допускают простое описание.

Теорема 3. Пусть A — самосопряженный линейный непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Тогда оператор A правильный в том и только в том случае, когда $||A|| \le 1$ и -1 не является собственным значением оператора A.

Доказательство. Пусть $||A|| \le 1$ и число -1 не является собственным значением самосопряженного оператора A. Пусть E_λ — разложение единицы, соответствующее оператору A: $A = \int\limits_{-1}^{1} \lambda dE_\lambda$.

Покажем, что для произвольного $x \in H$ последовательность

$$A^n x = \int\limits_{-1}^{1} \lambda^n dE_\lambda x$$

сходится в пространстве H при $n \to \infty$.

Обозначим H_1 собственное подпространство оператора A, соответствующее собственному значению $\lambda = 1$ (возможно, $H_1 = \{0\}$), а H_2^δ, H_3^δ — линейные подпространства векторов вида

$$x = \int\limits_{-1+\delta}^{1-\delta} dE_\lambda x, \quad x = \int\limits_{-1}^{-1+\delta} dE_\lambda x + \int\limits_{1-\delta}^{1-} dE_\lambda x$$

соответственно $(0 < \delta < 1)$. Тогда $H = H_1 \oplus H_2^\delta \oplus H_3^\delta$. Пусть P_1, P_2, P_3 — ортогональные проекторы на подпространства H_1, H_2^δ, H_3^δ соответственно.

Имеет место равенство

$$A^n x = A^n P_1 x + A^n P_2 x + A^n P_3 x = P_1 x + A^n P_2 x + A^n P_3 x . \tag{6}$$

Оценим второе и третье слагаемое в (6):

$$||A^n P_2 x||_H = \left\| \int\limits_{-1+\delta}^{1-\delta} \lambda^n dE_\lambda x \right\|_H \le (1-\delta)^2 ||P_2 x||_H ,$$

$$||A^n P_3 x||_H \le ||A^{n-1} P_3 x||_H \le \ldots \le ||P_3 x||_H .$$

Поскольку

$$||P_3 x||_H = \int\limits_{-1}^{-1+\delta} d(E_\lambda x, x)_H + \int\limits_{1-\delta}^{1-} d(E_\lambda x, x)_H$$

и число -1 не является точкой разрыва функции $\lambda \mapsto (E_\lambda x, x)_H$, при каждом фиксированном элементе $x \in H$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} ||P_3 x||_H = 0$.

Пусть ε — произвольное положительное число. Выберем число $\delta \in (0,1)$ так, чтобы имело место неравенство $||P_3 x||_H < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$||A^n (P_2 x + P_3 x)||_H < (1-\delta)^n ||P_2 x||_H + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon ,$$

т.е. последовательность $(A^n x)$ сильно сходится к вектору $P_1 x$.

Обратно, пусть самосопряженный оператор $A: H \to H$ — правильный. Если -1 — собственное значение оператора A, $x' \in E$ — соответствующий собственный вектор, то последовательность точек $A^n x' = (-1)^n x'$ не сходится в пространстве E, что противоречит правильности оператора A.

Предположим, что $||A|| > 1$. Для произвольного $\varepsilon \in (0, ||A|| - 1)$ рассмотрим линейное подпространство $H_\varepsilon \subseteq H$ элементов вида

$$x = \int_{1+\frac{\varepsilon}{2}}^{1+\varepsilon} dE_\lambda x .$$

Пусть произвольный элемент $x \in H_\varepsilon \setminus \{0\}$. Для последовательности $(A^n x)$ имеем оценку

$$||A^n x||_H = \left\| \int_{1+\frac{\varepsilon}{2}}^{1+\varepsilon} \lambda^n dE_\lambda x \right\|_H \geq (1 + \frac{\varepsilon}{2})^n ||x||_H \to +\infty ,$$

что противоречит правильности оператора A.

Замечание 1. Очевидно, что из теорем 2 и 3 следует теорема М.А. Красносельского, сформулированная в начале статьи.

Замечание 2. В [6] теорема 2 получена для эндоморфизмов банаховых пространств и использована для формулировки критерия включения $y \in R(T)$, где T — самосопряженный неотрицательный оператор, действующий в гильбертовом пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А. О решении методом последовательных приближений уравнений с самосопряженным оператором // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, вып. 3. — С. 161–165.
2. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко. — М.: Наука, 1969. — 456 с.
3. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967. — 257 с.
4. Эдвардс Р. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1969. — 1071 с.
5. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. — Киев: Вища шк., 1990. — 600 с.
6. Ляшко С.И., Номировский Д.А., Петунин Ю.И., Семенов В.В. Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. — М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2009. — 192 с.

Поступила 08.07.2009