УДК 004.4

С.С. ШКИЛЬНЯК

ЛОГИКИ КВАЗИАРНЫХ ПРЕДИКАТОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Ключевые слова: *логика, программирование, композиционное программирование, композиционно-номинативный подход, семантика, синтаксис, номинативное данное, именное множество, предикат, композиция, отношение логического следствия, исчисление, секвенция, секвенциальное исчисление, корректность, полнота.*

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы построения логических формализмов, ориентированных на исследование свойств программ, всегда были в центре внимания Киевской школы кибернетики, основанной В.М. Глушковым. Предложенные им алгебраический подход и алгоритм очевидности нашли широкое применение и дальнейшее развитие в работах А.А. Летичевского и его соавторов, например, [1–3]. Алгебраический подход к построению логических систем актуален и в настоящее время. В данной статье на основании этого подхода исследуются композиционно-номинативные логики квазиарных предикатов. Построенное для таких логик исчисление секвенциального типа развивает ряд идей алгоритма очевидности.

Разработано много разнообразных логических систем, которые успешно используются в программировании [4]. Такие системы обычно базируются на классической логике предикатов [5]. Но классическая логика, несмотря на все ее положительные качества, не позволяет адекватно выразить потребности программирования. Ряд ограничений [6] усложняет ее применение. Необходимость усиления классической логики для решения новых задач программирования и моделирования стала предпосылкой возникновения композиционно-номинативных логик. Такое название получили логики, строящиеся на основании композиционно-номинативного подхода [7]. Применение этого подхода способствовало получению [8] ряда логических моделей разнообразных предметных областей, находящихся на разных уровнях абстрактности и общности.

Композиционно-номинативный подход к построению моделей программ и ориентированных на них логик исходит из композиционного программирования [9, 10]. Он базируется на принципах композиционности и номинативности, опирается на общеметодологический принцип развития как восхождения от абстрактного к конкретному. Принцип композиционности трактует средства построения программ (функций, предикатов) как алгебраические операции. Для логики это означает сведение логических связок и кванторов к композициям предикатов. Принцип номинативности базируется на необходимости использования отношений именования для построения семантических моделей логик и программ.

Согласно композиционно-номинативному подходу логики строятся по семантико-синтаксической схеме. Это означает, что сначала задаются интенсиональные (содержательные) модели логик. Такие модели, в первую очередь, определяются уровнями рассмотрения данных, поэтому для их задания фиксируется уровень абстракции рассмотрения. Интенсиональные модели индуцируют класс формул (язык логики) соответствующего уровня (синтаксический аспект).

Далее строятся соответствующие рассмотренному уровню абстракции экстенсиональные модели, которые определяют семантические аспекты логик. Экстенсиональная семантическая модель задается как предикатная композиционная система

$(D, Pr, \boldsymbol{C})$. Такая система фактически определяет две алгебры: алгебру (алгебраическую систему) данных (D, Pr) и алгебру предикатов $(Pr, \boldsymbol{C})$. Термы алгебры предикатов могут трактоваться как формулы языка логики. Основным здесь является понятие композиции, поскольку именно композиции определяют универсальные методы построения предикатов, выступая ядром логики определенного типа.

Наконец, строятся формально-аксиоматические логические исчисления, которые задают синтаксические аспекты логик. Основными типами таких исчислений являются формальные системы гильбертовского типа и системы генценовского типа (секвенциальные исчисления, системы натурального вывода).

В разд. 1 рассмотрен спектр композиционно-номинативных логик, в разд. 2 описаны основные классы первопорядковых логик квазиарных предикатов. В разд. 3 изучено специальное отношение логического следствия в таких логиках, в разд. 4 построено исчисление секвенциального типа для общего случая логик квазиарных предикатов кванторного уровня.

Понятия, которые здесь не уточняются, будем понимать в смысле работы [8].

1. СПЕКТР КОМПОЗИЦИОННО-НОМИНАТИВНЫХ ЛОГИК

Интенсиональные модели композиционно-номинативных логик (КНЛ) задаются уровнями рассмотрения данных. Развитие понятия данного [8] приводит к трем базовым уровням: D.W (данные как целые), D.P (данные как структурированные), D.H (данные как иерархические). Каждый из них распадается на три подуровня: A (абстрактный), C (конкретный), S (синтетический). Отсюда имеем девять уровней рассмотрения данных:

D.W.A; D.W.C; D.W.S;
D.P.A; D.P.C; D.P.S;
D.H.A; D.H.C; D.H.S.

Таким образом, получаем следующие естественные уровни КНЛ:

— пропозициональные (уровень D.W.A, данные абстрактные);
— сингулярные (уровень D.W.C, данные как целостные конкретные);
— реноминативные и первопорядковые (уровень D.P.S, данные как номинаты);
— логики номинативных данных (уровень D.H.S, данные как иерархические номинаты).

Логики других, в определенном смысле вырожденных уровней, довольно специфические и требуют отдельного исследования.

На **пропозициональном** уровне данные трактуются предельно абстрактно, как «черные ящики», т.е. ни одно свойство данных не является доступным. На этом уровне предикаты имеют вид $A \to \{T, F\}$, где A — множество абстрактных данных, $\{T, F\}$ — множество истинностных значений.

Базовыми композициями финитарных пропозициональных логик есть клиниевы операции $\vee$ и $\neg$, инфинитарных пропозициональных логик — инфинитарные множественные операции $\vee_K$, $\&_K$ и $\neg_K$.

На **сингулярном** уровне данные трактуются предельно конкретно, как «белые ящики». На этом уровне фиксируется единый класс данных, который объясняет его название. Композициями сингулярного уровня являются конкретные аппликативные композиции. Для сингулярных логик построена [11] инфинитарная алгебра сингулярных композиций Клини.

На синтетических уровнях D.P.S и D.H.S данные строятся из множеств предметных имен и предметных значений. На этих уровнях данные рассматриваются как «серые ящики», построенные из «белых» и «черных». Такие данные называют номинативными, или номинатами. Они строятся индуктивно из множества предметных имен и множества предметных значений. Синтетические уровни D.P.S и D.H.S называют номинативными, они очень богаты и распадаются на ряд подуровней.

Одноуровневые однозначные номинаты называют именными множествами (ИМ).

Функции и предикаты, заданные на ИМ, называют квазиарными.

V-именное множество (V-ИМ) над A — это [8] произвольная однозначная функция $\delta: V \to A$. Множества V и A трактуем как множества предметных имен и предметных значений. Множество всех V-ИМ над A обозначим ${}^{V}A$.

V-ИМ представляем в виде $[v_1 \mapsto a_1, \ldots, v_n \mapsto a_n, \ldots]$. Здесь $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$. Для V-ИМ вводим функцию im: ${}^{V}A \to 2^{V}$, операции $||X$ и ∇:

$$im(\delta) = pr_1(\delta) = [v \in V \mid v \mapsto a \in \delta];$$

$$\delta \,||\, X = [v \mapsto a \in \delta \mid v \in X];$$

$$\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \,||\, (V \setminus im(\delta_2))).$$

Вместо $\delta \,||\, (V \setminus X)$ будем писать $\delta \,||{-X}$. В частности, вместо $\delta \,||\, (V \setminus \{x\})$ пишем $\delta \,||{-x}$.

Для V-ИМ операцию реноминации $r_{x_1, \ldots, x_n}^{v_1, \ldots, v_n}$ зададим так:

$$r_{x_1, \ldots, x_n}^{v_1, \ldots, v_n}(\delta) = [v_1 \mapsto \delta(x_1), \ldots, v_n \mapsto \delta(x_n)] \cup (\delta \,||\, (V \setminus \{v_1, \ldots, v_n\})).$$

Введя обозначение вида $\bar{y}$ для $y_1, \ldots, y_n$, вместо $r_{x_1, \ldots, x_n}^{v_1, \ldots, v_n}$ будем писать $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Функцию вида P: ${}^{V}A \to \{T, F\}$ назовем V-квазиарным предикатом на A. Функцию вида f: ${}^{V}A \to A$ назовем V-квазиарной функцией на A. Множества V-квазиарных предикатов и функций на A обозначим соответственно Pr^{A} и Fn^{A}.

Областью истинности и областью ложности V-квазиарного предиката P на A назовем множества $\boldsymbol{T}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d) = T\}$ и $\boldsymbol{F}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d) = F\}$.

V-квазиарный предикат P (частично) истинный, или неопровержимый, если $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$. V-квазиарный предикат P выполни́м, если $\boldsymbol{T}(P) \neq \varnothing$.

Для логик квазиарных предикатов (уровень D.P.S) выделим реноминативный, кванторный, кванторно-эквациональный, функциональный, функционально-эквациональный уровни.

Рассмотрим подробнее финитарные логики указанных уровней.

Реноминативные логики [8] наиболее абстрактные среди логик номинативных уровней. Начиная с реноминативного уровня, можно переименовывать компоненты данных. Это позволяет ввести композицию реноминации (переименования) $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}: Pr^{A} \to Pr^{A}$.

Дадим определение предиката $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ через его области истинности и ложности:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{T}(P)); \; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{F}(P)).$$

Базовыми композициями реноминативных логик есть $\vee$, $\neg$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

На **кванторном** уровне можно применять квазиарные предикаты ко всем предметным значениям. Это позволяет ввести композиции квантификации $\exists \boldsymbol{x}$ и $\forall \boldsymbol{x}$.

Дадим определение предикатов $\exists \boldsymbol{x}$ и $\forall \boldsymbol{x}$ через их области истинности и ложности:

$$\boldsymbol{T}(\exists \boldsymbol{x} P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = T \text{ для некоторого } a \in A\};$$

$$\boldsymbol{F}(\exists \boldsymbol{x} P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = F \text{ для всех } a \in A\};$$

$$\boldsymbol{T}(\forall \boldsymbol{x} P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = T \text{ для всех } a \in A\};$$

$$\boldsymbol{F}(\forall \boldsymbol{x} P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = F \text{ для некоторого } a \in A\}.$$

Базовыми композициями логик кванторного уровня есть $\vee$, $\neg$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$.

На **кванторно-эквациональном** уровне появляются новые возможности отождествления и различения значений с помощью специальных 0-арных композиций — предикатов равенства $=_{xy}$. Базовыми композициями логик кванторно-эквационального [12] уровня есть $\vee$, $\neg$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$, $=_{xy}$.

На **функциональном** уровне имеем расширенные возможности формирования новых аргументов для функций и предикатов. Это дает возможность ввести композицию суперпозиции $S^{\bar{x}}$ (см. [8]). На функциональном уровне представляется естественным введение специальных 0-арных композиций — функций разыменования $'\boldsymbol{x}$. При введении таких функций композиции реноминации можно промоделировать с помощью суперпозиции. Базовыми композициями логик функционального уровня есть $\vee$, $\neg$, $S^{\bar{x}}$, $\exists x$, $'\boldsymbol{x}$.

На функционально-эквациональном уровне можно дополнительно ввести [8] специальную композицию равенства $=$. Базовыми композициями логик функционально-эквационального уровня есть $\vee$, $\neg$, $S^{\bar{x}}$, $\exists x$, $'\boldsymbol{x}$, $=$.

На уровне D.H.S данные можно рассматривать как иерархические номинаты, они строятся индуктивно из множеств предметных имен и предметных значений. Соответствующие логики названы логиками номинативных данных, они исследованы, в частности, в [13].

Рассмотрим теперь классы первопорядковых КНЛ квазиарных предикатов. Характерные свойства таких логик проявляются уже на квантором уровне, поэтому ограничимся рассмотрением логик квазиарных предикатов кванторного уровня.

2. КОМПОЗИЦИОННО-НОМИНАТИВНЫЕ ЛОГИКИ КВАЗИАРНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Семантическими моделями КНЛ кванторного уровня являются композиционные системы квазиарных предикатов вида $({}^{V}A, Pr, \boldsymbol{C})$. Множество $\boldsymbol{C}$ задается множеством базовых композиций $\{\vee, \neg, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists \boldsymbol{x}\}$. При фиксированном $\boldsymbol{C}$ система $({}^{V}A, Pr, \boldsymbol{C})$ однозначно определяется объектом вида (A, Pr) — неоклассической алгебраической системой (АС) [8].

Рассмотрение композиционных систем предусматривает наличие языка логики, индуцированного соответствующими интенсиональными моделями (уровнями рассмотрения). Это означает необходимость обозначения базовых предикатов, из которых с помощью композиций строятся более сложные предикаты.

Алфавит языка КНЛ кванторного уровня состоит из таких символов: символы базовых композиций, множество Ps предикатных символов (сигнатура языка), множество V предметных имен.

Дадим определение множества Fr формул языка КНЛ кванторного уровня (см. [8]):

1) каждый предикатный символ (ПС) является формулой, такие формулы атомарные;

2) если Φ и Ψ — формулы, то $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$, $\exists x\Phi$ — формулы.

Конкретная интерпретация языка определяется АС (A, Pr) и значениями ПС на A, которые задаем с помощью тотального однозначного отображения $\boldsymbol{I}: Ps \to Pr$. Поэтому моделями языка КНЛ кванторного уровня будем считать [8] АС с приданной сигнатурой — объекты вида $((A, Pr), \boldsymbol{I})$, которые сокращенно обозначим $(A, \boldsymbol{I})$.

Отображение интерпретации формул $\boldsymbol{J}: Fr \to Pr$ определяется с помощью $\boldsymbol{I}$ так:

1) $\boldsymbol{J}(p) = \boldsymbol{I}(p)$ для каждого $p \in Ps$;

2) $\boldsymbol{J}(\neg\Phi)=\neg(\boldsymbol{J}(\Phi))$, $\boldsymbol{J}(\vee\Phi\Psi)=\vee(\boldsymbol{J}(\Phi),\boldsymbol{J}(\Psi))$, $\boldsymbol{J}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi)=\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{J}(\Phi))$, $\boldsymbol{J}(\exists x\,\Phi)=$ $=\exists\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

Здесь базовые композиции обозначены полужирным шрифтом, символы базовых композиций как элементы алфавита языка — обычным.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ — значение формулы Φ при интерпретации на $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$ — обозначим Φ_A.

Формула Φ (частично) истинная при интерпретации на $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$, или $\boldsymbol{A}$-неопровержимая, если Φ_A — неопровержимый предикат (обозначим $\boldsymbol{A}\,|\!=\Phi$).

Формула Φ всюду (частично) истинная, или неопровержимая, если Φ $\boldsymbol{A}$-неопровержимая для каждой модели языка $\boldsymbol{A}$ (обозначим $|\!=\Phi$).

Формула Φ — логическое следствие формулы Ψ (обозначим $\Phi\,|\!=\Psi$), если для каждой модели языка $\boldsymbol{A}$ имеем $T(\Phi_A)\cap F(\Psi_A)=\varnothing$.

Формулы Φ и Ψ логически эквивалентны (обозначим $\Phi\sim\Psi$), если $\Phi\,|\!=\Psi$ и $\Psi\,|\!=\Phi$.

Формула Ψ — слабое логическое следствие [8] формулы Φ (обозначим $\Phi\,|\!|\!=\Psi$), если для каждой модели языка $\boldsymbol{A}$ из условия $\boldsymbol{A}\,|\!=\Phi$ вытекает $\boldsymbol{A}\,|\!=\Psi$.

Пусть $\Gamma\subseteq Fr$ и $\Delta\subseteq Fr$ — некоторые множества формул;

Δ — логическое следствие Γ в АС $\boldsymbol{A}$ ($\Gamma_A\,|\!=\Delta$), если

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma}T(\Phi_A)\cap\bigcap_{\Psi\in\Delta}F(\Psi_A)=\varnothing;$$

Δ — логическое следствие Γ (обозначим $\Gamma\,|\!=\Delta$), если $\Gamma_{\boldsymbol{A}}\,|\!=\Delta$ для каждой модели языка $\boldsymbol{A}$.

Класс квазиарных предикатов очень мощный, для логик квазиарных предикатов не выполняются некоторые важные законы классической логики. Например, в общем случае логики квазиарных предикатов не всегда выполняются $\forall x\Phi\,|\!|\!=\Phi$, $|\!=\forall x\Phi\to\Phi$, $|\!=\Phi\to\exists x\Phi$. В то же время всегда выполняются $\Phi\,|\!|\!=\forall x\Phi$, $|\!=\forall x(\forall x\Phi\to\Phi)$, $|\!=\exists x(\forall x\Phi\to\Phi)$, $|\!=\forall x(\Phi\to\exists x\Phi)$, $|\!=\exists x(\Phi\to\exists x\Phi)$.

Таким образом, для сохранения основных свойств классической логики класс квазиарных предикатов следует ограничить. Естественное ограничение задается свойством эквитонности, которое означает, что значение отображения не изменяется при расширении данных. Неформально это означает неизменность установленного знания.

Предикат P эквитонный (ЭП), если для произвольных d, $d'\in{}^{V}\!A$ из $d'\supseteq d$ и $P(d)\!\downarrow$ вытекает $P(d')\!\downarrow=P(d)$.

Ближайшими к классической логике являются логики **полнототальных эквитонных предикатов**. Полнототальность означает определенность предиката на максимальных данных — V-полных ИМ.

V-ИМ δ V-полная, если $im(\delta)=V$. Множество всех V-полных ИМ над A обозначим A^V. Предикат P полнототальный, если $P(d)\!\downarrow$ для всех $d\in A^V$.

Для логик полнототальных ЭП строятся [8] аксиоматические системы гильбертовского типа, для них доказываются теоремы непротиворечивости (корректности) и полноты. Логики полнототальных ЭП названы неоклассическими [6], поскольку сохраняют основные законы классической логики при существенном расширении класса моделей.

Логики **эквитонных предикатов** тоже можно отнести к неоклассическим, они сохраняют основные законы классической логики, но для них уже неверны некоторые правила вывода (modus ponens и родственное правило сечения), нарушаются некоторые свойства классической логики. Например, для конкретных семантических моделей возможно $\boldsymbol{A}\,|\!=P$, $\boldsymbol{A}\,|\!=P\to Q$, но $\boldsymbol{A}\,|\!\neq Q$. Возможно также $\boldsymbol{A}\,|\!=P\leftrightarrow Q$,

$A \models Q \leftrightarrow S$, но $A \not\models P \leftrightarrow S$. Для логики ЭП неверно $\Phi \& (\Phi \to \Psi) \| = \Psi$, поэтому не всегда из $\Xi \models \Psi$ вытекает $\Xi \| = \Psi$.

Класс моделей логики ЭП существенно шире класса моделей логики полнототальных ЭП.

Семантические свойства логики ЭП фактически воссоздают свойства композиций. В частности, свойства, которые не используют реноминации и суперпозиции, полностью аналогичны соответствующим свойствам классической логики предикатов.

Для логики ЭП выполняются [8] теоремы эквивалентости и равенства, а относительно отношения логического следствия для множеств формул — теорема о замене эквивалентных. Для формул логики ЭП определяются разнокванторные, нормальные, квазизамкнутые формулы. Доказывается [8], что для каждой формулы можно построить эквивалентные ей разнокванторную и нормальную.

Для формул классической логики существенными есть только их свободные предметные имена, от которых может зависеть значение соответствующих предикатов. Для логики квазиарных предикатов важна несущественность предметных имен. Поэтому для базовых предикатов будем указывать множество несущественных имен, от которых не зависят значения таких предикатов.

Имя $x \in V$ строго несущественное для квазиарного предиката P, если для произвольных $d \in {}^{V}\!A$ и $a \in A$ имеем $P(d \nabla x \mapsto a) = P(d \,\|\!-x)$.

Имя $x \in V$ несущественное для квазиарного предиката P, если для произвольных $d \in {}^{V}\!A$ и $a, b \in A$ из $P(d \nabla x \mapsto a){\downarrow}$ и $P(d \nabla x \mapsto b){\downarrow}$ вытекает $P(d \nabla x \mapsto a) = P(d \nabla x \mapsto b)$.

Возможность выполнения эквивалентных преобразований произвольных формул требует наличия бесконечного множества тотально несущественных имен, т.е. имен, несущественных для каждого $p \in Ps$. Таким образом, семантической основой логики квазиарных предикатов являются композиционные алгебры с дополнительным требованием наличия бесконечного множества тотально строго несущественных (тотально несущественных для логики ЭП) предметных имен.

Квазизамкнутые формулы — синтаксические аналоги замкнутых формул классической логики, но семантическими аналогами замкнутых формул их считать нельзя. Квазизамкнутые формулы необязательно интерпретируются как константные предикаты, хотя для классической логики каждая замкнутая формула на каждой модели языка всегда интерпретируется как тождественная истина или тождественная ложь. Дело в том, что в состав формулы логики квазиарных предикатов могут входить предикатные символы, для которых множества существенных имен бесконечны. Возможность для формулы быть зависимой от бесконечного множества предметных имен — определяющее свойство логик квазиарных предикатов, которое существенным образом отличает их от классической логики.

Естественным обобщением ЭП есть л**окально-эквитонные предикаты** (ЛЭП) [8]. Для ЛЭП требуется сохранение значения при расширении данных лишь на конечное число именованных компонент.

Предикат P локально-эквитонный, если для произвольных $d, d \in {}^{V}\!A$, из того, что $P(d){\downarrow}$, $d' \supset d$ и $d' \setminus d$ конечное, вытекает $P(d'){\downarrow} = P(d)$. То, что класс ЛЭП является расширением класса ЭП, показывает пример предиката, истинного на всех конечных ИМ и ложного на всех бесконечных ИМ. Такой предикат локально-эквитонный, но неэквитонный.

Семантические свойства ЛЭП аналогичные свойствам ЭП. Класс моделей логики ЛЭП — расширение класса моделей логики ЭП.

Логики, ориентированные на такие особенности предметных областей, как неопределенность, неполнота имеющейся информации, базируются на классах предикатов, определенных на данных с неполной информацией, это **эквисовместные предикаты** (ЭСП) и локально-эквисовместные предикаты (ЛЭСП) [8].

Эквисовместность предиката P означает, что при возможности расширения разных данных (совместность данных) одним большим данным значения P на таких данных должны совпадать. Для ЛЭСП требуется сохранение значений лишь для расширений конечной информацией.

ИМ d и d' совместные (обозначаем $d \approx d'$), если функция $d \cup d'$ однозначная.

Предикат P ЭСП, если для произвольных $d,\ d' \in {}^{V}\!A$ из $d \approx d'$, $P(d)\downarrow$ и $P(d')\downarrow$ вытекает $P(d) = P(d')$.

Предикат P ЛЭСП, если для произвольных $d,\ d' \in {}^{V}\!A$ таких, что $(d' \setminus d) \cup (d \setminus d')$ конечное, из $d \approx d'$, $P(d)\downarrow$ и $P(d')\downarrow$ вытекает $P(d) = P(d')$.

ЭСП и ЛЭСП являются обобщениями ЭП и ЛЭП. Свойства логик ЭСП и ЛЭСП аналогичны соответствующим свойствам логик ЭП и ЛЭП. Классы семантических моделей логик ЭСП и ЛЭСП еще шире, хотя эти логики сохраняют основные законы классической логики.

Отказ от modus ponens ведет к необходимости исследования синтаксических свойств логик ЭП, ЛЭП, ЭСП и ЛЭСП на базе не гильбертовских, а генценовских систем — секвенциальных исчислений [5]. Такие исчисления построены в [8]. Семантической основой их построения есть свойства отношения логического следствия для множеств формул. Для построенных секвенциальных исчислений доказаны теоремы корректности и полноты.

3. ОТНОШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДСТВИЯ В ЛОГИКАХ КВАЗИАРНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Для общего случая логики квазиарных предикатов значения предиката P на данном d могут быть разными, в зависимости от того, входит ли в d компонента с некоторым предметным именем, ведь условие эквитонности не выполняется. Поэтому при интерпретациях формул на моделях языка необходимо явным образом указывать множества означенных и неозначенных имен, т.е. имен, которые имеют или не имеют значения на множестве базовых данных.

Введем понятие X–Y-значного именного множества, X–Y-значных областей истинности и ложности квазиарного предиката, на этой основе исследуем понятие X–Y-значного логического следствия.

3.1. *X–Y*-значные именные множества. Множества X, Y называют дизъюнктными, если $X \cap Y = \varnothing$. Для произвольных дизъюнктных множеств $X, Y \subseteq V$ множество X–Y-значных V-ИМ зададим так:

$$^{V,\,X-Y}\!A = \{d \in {}^{V}\!A \mid X \subseteq im(d) \text{ и } Y \cap im(d) = \varnothing\}\ .$$

Если $Y = \varnothing$, то получаем множество X-означенных V-ИМ:

$$^{V,\,X}\!A = \{d \in {}^{V}\!A \mid X \subseteq im(d)\}.$$

Для случая $X = \varnothing$ получаем множество Y-неозначенных V-ИМ:

$$^{V,\,-Y}\!A = \{d \in {}^{V}\!A \mid Y \cap im(d) = \varnothing\}.$$

Понятно, что $^{V,\,X-Y}\!A = {}^{V,\,X}\!A \cap {}^{V,\,-Y}\!A$.

Из определений получаем такие соотношения:

$$^{V,\,X \cup Z}\!A = {}^{V,\,X}\!A \cap {}^{V,\,Z}\!A\,,$$

$$^{V,\,-(Y \cup Z)}\!A = {}^{V,\,-Y}\!A \cap {}^{V,\,-Z}\!A.$$

Для произвольных дизъюнктных множеств $X, Y \subseteq V$ имеем

$$^{V}A = {}^{V,X\cup Y}A \cup {}^{V,X-Y}A \cup {}^{V,Y-X}A \cup {}^{V,-(X\cup Y)}A .$$

Рассмотрим следующие представления X–Y-значных V-ИМ.

Утверждение 1. Пусть X, W, $U \subseteq V$ — дизъюнктные множества предметных имен. Тогда $^{V,W-U}A = \bigcup_{Y\subseteq X} {}^{V,W\cup Y-U\cup(X\setminus Y)}A$.

Здесь $W \cup U$ трактуем как множество задействованных в данный момент имен, при этом W — множество означенных задействованных имен, U — множество неозначенных задействованных имен; X трактуем как множество новых имен, которые прибавляются к задействованным.

Утверждение 2. Пусть $Z, G \subseteq V$ — дизъюнктные множества предметных имен. Тогда $^{V,G}A = \bigcup_{Y\subseteq Z} {}^{V,G\cup Y-Z\setminus Y}A.$

В частности, при $G=\varnothing$ имеем $^{V}A = \bigcup_{Y\subseteq Z} {}^{V,Y-Z\setminus Y}A$.

Здесь G трактуем как множество гарантировано означенных задействованных имен, $Z\cup G$ — как множество задействованных имен.

3.2. *X–Y*-значные области истинности и ложности квазиарных предикатов. Определим X–Y-значные области истинности и ложности квазиарного предиката P, где дизъюнктные $X, Y \subseteq V$. X–Y-значность состоит в том, что принимаем во внимание только те $d \in {}^{V}A$, для которых $X \subseteq im(d)$ и $Y \cap im(d)=\varnothing$, т.е. $d \in {}^{V,X-Y}A$. В таких d имена из X имеют значение, имена из Y не имеют значения:

$$\boldsymbol{T}_{X-Y}(P)=\{d \in {}^{V}A \mid P(d)=T, X \subseteq im(d), Y\cap im(d)=\varnothing\}=\{d \in {}^{V,X-Y}A \mid P(d)=T\};$$

$$\boldsymbol{F}_{X-Y}(P)=\{d \in {}^{V}A \mid P(d)=F, X \subseteq im(d), Y\cap im(d)=\varnothing\}=\{d \in {}^{V,X-Y}A \mid P(d)=F\}.$$

Если $Y=\varnothing$, получаем X-означенные области истинности и ложности предиката P:

$$\boldsymbol{T}_{X}(P)=\{d \in {}^{V}A \mid P(d)=T, X \subseteq im(d)\}=\{d \in {}^{V,X}A \mid P(d)=T\};$$

$$\boldsymbol{F}_{X}(P)=\{d \in {}^{V}A \mid P(d)=F, X \subseteq im(d)\}=\{d \in {}^{V,X}A \mid P(d)=F\}.$$

Понятно, что $\boldsymbol{T}_{X-Y}(P)\subseteq \boldsymbol{T}_{X}(P)\subseteq \boldsymbol{T}(P)$ и $\boldsymbol{F}_{X-Y}(P)\subseteq \boldsymbol{F}_{X}(P)\subseteq \boldsymbol{F}(P)$.

Теорема 1. Для логик квазиарных предикатов выполняются такие соотношения:

$$\boldsymbol{T}_{Y-Z}(R_y^x(P))\subseteq \boldsymbol{T}_{Y-Z}(\exists x(P)) \text{ при условии } y\in Y, \qquad \text{(TR}\exists\text{)}$$

$$\boldsymbol{F}_{Y-Z}(\exists xP)\subseteq \boldsymbol{F}_{Y-Z}(R_y^x(P)) \text{ при условии } y\in Y, \qquad \text{(FR}\exists\text{)}$$

$$\boldsymbol{T}_{Y-Z}(\forall xP)\subseteq \boldsymbol{T}_{Y-Z}(R_y^x(P)) \text{ при условии } y\in Y, \qquad \text{(TR}\forall\text{)}$$

$$\boldsymbol{F}_{Y-Z}(R_y^x(P))\subseteq \boldsymbol{F}_{Y-Z}(\forall xP) \text{ при условии } y\in Y. \qquad \text{(FR}\forall\text{)}$$

Пусть $d \in \boldsymbol{T}_{Y-Z}(R_y^x(P))$ и $y\in Y$, тогда $y\in Y$, $Y\subseteq im(d)$, $Z\cap im(d)=\varnothing$ и $R_y^x(P)(d)=T$, откуда $y\in im(d)$, и $P(d\nabla x\mapsto d(y))=T$. В силу $y\in im(d)$ имеем $d(y)\downarrow a$ для некоторого $a\in A$. Отсюда $P(d\nabla x\mapsto a)=T$ для некоторого $a\in A$ и $y\in Y\subseteq im(d)$, откуда $\exists xP(d)=T$ и $y\in Y\subseteq im(d)$. Учитывая $Z\cap im(d)=\varnothing$, получаем $d\in T_{Y-Z}(\exists xP)$. Итак, при условии $y\in Y$ имеем $\boldsymbol{T}_{Y-Z}(R_y^x(P))\subseteq \boldsymbol{T}_{Y-Z}(\exists xP)$.

Пусть $d \in \boldsymbol{F}_{Y-Z}(\exists xP)$ и $y \in Y$, тогда $y \in Y$, $Y \subseteq im(d)$, $Z \cap im(d) = \varnothing$ и $P(d \nabla x \mapsto b) = F$ для всех $b \in A$. В силу $y \in im(d)$ имеем $d(y){\downarrow}\, a$ для некоторого $a \in A$, тогда $P(d \nabla x \mapsto d(y)) = F$. Отсюда $R^x_y(P)(d) = F$ и $y \in Y \subseteq im(d)$. Учитывая $Z \cap im(d) = \varnothing$, получаем $d \in \boldsymbol{F}_{Y-Z}(R^x_y(P))$. Итак, при условии $y \in Y$ имеем $\boldsymbol{F}_{Y-Z}(\exists xP) \subseteq \boldsymbol{F}_{Y-Z}(R^x_y(P))$.

Пусть $d \in \boldsymbol{T}_{Y-Z}(\forall xP)$ и $y \in Y$, тогда $y \in Y$, $Y \subseteq im(d)$, $Z \cap im(d) = \varnothing$ и $P(d \nabla x \mapsto b) = T$ для всех $b \in A$. В силу $y \in im(d)$ имеем $d(y){\downarrow}\, a$ для некоторого $a \in A$, тогда $P(d \nabla x \mapsto d(y)) = T$. Отсюда $R^x_y(P)(d) = T$ и $y \in Y \subseteq im(d)$. Учитывая $Z \cap im(d) = \varnothing$, получаем $d \in \boldsymbol{T}_{Y-Z}(R^x_y(P))$. Итак, при условии $y \in Y$ имеем $\boldsymbol{T}_{Y-Z}(\forall xP) \subseteq \boldsymbol{T}_{Y-Z}(R^x_y(P))$.

Пусть $d \in \boldsymbol{F}_{Y-Z}(R^x_y(P))$ и $y \in Y$, тогда $y \in Y$, $Y \subseteq im(d)$, $Z \cap im(d) = \varnothing$ и $R^x_y(P)(d) = F$, откуда $y \in im(d)$ и $P(d \nabla x \mapsto d(y)) = F$. В силу $y \in im(d)$ имеем $d(y){\downarrow}\, a$ для некоторого $a \in A$. Отсюда $P(d \nabla x \mapsto a) = F$ для некоторого $a \in A$ и $y \in Y \subseteq im(d)$, откуда $\forall xP(d) = F$ и $y \in Y \subseteq im(d)$. Если $Z \cap im(d) = \varnothing$, то $d \in \boldsymbol{F}_{Y-Z}(\forall xP)$. Итак, при $y \in Y$ имеем $\boldsymbol{F}_{Y-Z}(R^x_y(P)) \subseteq \boldsymbol{F}_{Y-Z}(\forall xP)$.

Для формул вида $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi$ введем понятие Y-неозначиваемой формы. Здесь $Y \subseteq V$ — произвольное множество предметных имен, которые будем трактовать как неозначенные, т.е. не имеющие значений. При интерпретациях все имена из Y не могут иметь значений.

Пусть $R^{r_1,\ldots r_k,x_1,\ldots x_n,u_1,\ldots u_m}_{s_1,\ldots s_k,y_1,\ldots y_n,v_1,\ldots v_m}\Phi$ такая, что все $r_1,\ldots,r_k, s_1,\ldots,s_k, y_1,\ldots,y_n \in Y$, все $x_1,\ldots,x_n \notin Y$.

Y-неозначиваемой формой формулы $R^{r_1,\ldots r_k,x_1,\ldots x_n,u_1,\ldots u_m}_{s_1,\ldots s_k,y_1,\ldots y_n,v_1,\ldots v_m}\Phi$ назовем выражение вида $R^{x_1,\ldots x_n,u_1,\ldots,u_m}_{\perp,\ldots,\perp,v_1,\ldots,v_m}\Phi$, где $\perp$ — специальный символ, который обозначает неопределенное значение.

Пусть $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi$ и $R^{\bar{u}}_{\bar{y}}\Phi$ имеют одинаковые Y-неозначиваемые формы. Тогда для всех моделей языка $\boldsymbol{A}$ предикаты $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi_A$ и $R^{\bar{u}}_{\bar{y}}\Phi_A$ принимают одинаковые значения на данных $d \in^{V,-Y} A$, где все имена из Y не имеют значений: $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi_A(d) = R^{\bar{u}}_{\bar{y}}\Phi_A(d)$.

3.3. *X–Y*-значные отношения логического следствия. Отношение следствия $_{\boldsymbol{A}}|\!=$ для двух формул при фиксированной модели языка $\boldsymbol{A}$ можно определить так:

$$\Phi_{\boldsymbol{A}}|\!=\Psi, \text{ если для всех } d \in {}^{V}\!A \text{ неверно } (\Phi_A(d) = T \text{ и } \Psi_A(d) = F).$$

Это означает, что $\boldsymbol{T}(\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \varnothing$.

Для произвольных дизъюнктных множеств предметных имен $X, Y \subseteq V$ определим X–Y-значное отношение следствия $_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!=$ для двух формул при фиксированной $\boldsymbol{A}$:

$$\Phi_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!=\Psi, \text{ если для всех } d \in {}^{V,X-Y}\!A \text{ неверно } (\Phi_A(d) = T \text{ и } \Psi_A(d) = F).$$

Если $Y = \varnothing$, то получаем X-означенное отношение следствия $_{\boldsymbol{A},X}|\!=$ для двух формул при фиксированной модели языка $\boldsymbol{A}$:

$$\Phi_{\boldsymbol{A},X}|\!=\Psi, \text{ если для всех } d \in {}^{V,X}\!A \text{ неверно } (\Phi_A(d) = T \text{ и } \Psi_A(d) = F).$$

Для случая $X = \varnothing$ получаем Y-неозначенное отношение следствия $_{\boldsymbol{A},-Y}|\!=$ для двух формул при фиксированной модели языка $\boldsymbol{A}$:

$$\Phi_{\boldsymbol{A},-Y}|\!=\Psi, \text{ если для всех } d \in {}^{V,-Y}\!A \text{ неверно } (\Phi_A(d) = T \text{ и } \Psi_A(d) = F).$$

Понятно, что $\Phi_{\boldsymbol{A},\,X} \models \Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},X-Y} \models \Psi$ и $\Phi_{\boldsymbol{A},\,-Y} \models \Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models \Psi$.

Непосредственно из определений вытекают следующие утверждения.

Утверждение 3. Отношение $_{\boldsymbol{A},X-Y}\models$ рефлексивное и транзитивное.

Утверждение 4. $\Phi_{\boldsymbol{A}} \models \Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},\,X} \models \Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models \Psi$;

$$\Phi_{\boldsymbol{A}} \models \Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},\,-Y} \models \Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models \Psi .$$

Утверждение 5. Для произвольного $W \subseteq V$ выполняется соотношение

$$\Phi_{\boldsymbol{A}} \models \Psi \Leftrightarrow \text{ для каждой } X \subseteq V \text{ имеем } \Phi_{\boldsymbol{A},\,X-W\setminus X} \models \Psi .$$

Утверждение 6. $\Phi_{\boldsymbol{A},\,X} \models \Psi \Leftrightarrow T_X(\Phi_A) \cap F_X(\Psi_A) = \varnothing$;

$$\Phi_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models \Psi \Leftrightarrow T_{X-Y}(\Phi_A) \cap F_{X-Y}(\Psi_A) = \varnothing .$$

Принимая во внимание теорему 1, получаем следующую теорему.

Теорема 2. При условии $z \in X$ выполняются $R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models \exists x\Phi$ и $\forall x\,\Phi_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models R_z^x(\Phi)$.

Распространим понятие X–Y-значного логического следствия при фиксированной модели языка $\boldsymbol{A}$ на произвольные множества формул $\Gamma \subseteq Fr$ и $\Delta \subseteq Fr$.

Δ есть X–Y-значным логическим следствием Γ в АС $\boldsymbol{A}$ (обозначим $\Gamma_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models \Delta$), если для всех $d \in {}^{V,\,X-Y}A$ неверно (для всех $\Phi \in \Gamma$ $\Phi_A(d) = T$ и для всех $\Psi \in \Delta$ $\Psi_A(d) = F$).

Из определений вытекают следующие утверждения.

Утверждение 7. $\Gamma_{\boldsymbol{A}} \models \Delta \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},\,X} \models \Delta \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models \Delta$;

$\Gamma_{\boldsymbol{A}} \models \Delta \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},-Y} \models \Delta \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models \Delta$.

Утверждение 8. $\Gamma_{\boldsymbol{A},\,X} \models \Delta \Leftrightarrow \bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma} T_X(\Phi_A) \cap \bigcap\limits_{\Psi\in\Delta} F_X(\Psi_A) = \varnothing$;

$$\Gamma_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models \Delta \Leftrightarrow \bigcap_{\Phi\in\Gamma} T_{X-Y}(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi\in\Delta} F_{X-Y}(\Psi_A) = \varnothing .$$

Учитывая утверждения 1 и 2, получаем следующую теорему.

Теорема 3. 1. Пусть $X, W, U \subseteq V$ — дизъюнктные множества предметных имен. Тогда

$$\Gamma_{\boldsymbol{A},\,W-U} \models \Delta \Leftrightarrow \text{ для каждой } Y \subseteq X \text{ имеем } \Gamma_{\boldsymbol{A},\,W\cup Y-U\cup(X\setminus Y)} \models \Delta .$$

2. Пусть $Z, G \subseteq V$ — дизъюнктные множества предметных имен. Тогда

$$\Gamma_{\boldsymbol{A},\,G} \models \Delta \Leftrightarrow \text{ для каждой } Y \subseteq Z \text{ имеем } \Gamma_{\boldsymbol{A},\,G\cup Y-Z\setminus Y} \models \Delta .$$

Для упрощения обозначим $\bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma} T_{X-Y}(\Phi_A)$ как $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)$, $\bigcup\limits_{\Psi\in\Delta} T_{X-Y}(\Psi_A)$ как $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$, $\bigcup\limits_{\Phi\in\Gamma} F_{X-Y}(\Phi_A)$ как $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)$, $\bigcap\limits_{\Psi\in\Delta} F_{X-Y}(\Psi_A)$ как $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)$.

Аналогично вводим обозначения $\boldsymbol{T}_X(\Gamma_A)$, $\boldsymbol{T}_X(\Delta_A)$, $\boldsymbol{F}_X(\Gamma_A)$, $\boldsymbol{F}_X(\Delta_A)$.

Теорема 4. Для логик квазиарных предикатов при условии $z \in X$ имеем:

1) $\Gamma_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models \Delta,\ \exists x\Phi,\ R_z^x(\Phi) \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models \Delta,\ \exists x\Phi$;

2) $\Gamma,\ \forall x\Phi,\ R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models \Delta \Rightarrow \Gamma,\ \forall x\Phi_{\boldsymbol{A},\,X-Y} \models \Delta$.

Согласно FR∃ при условии $z \in X$ имеем $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$, поэтому $\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A) = \boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$. Отсюда из $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cap \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A) = \varnothing$ имеем $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cap \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A) = \varnothing$, т.е. $\Gamma_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta,\, \exists x\Phi,\, R_z^x(\Phi) \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta,\, \exists x\Phi$.

Согласно TR∀ при условии $z \in X$ имеем $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$, поэтому $\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A) = \boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)$. Отсюда из $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cap \cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) = \varnothing$ имеем $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cap \cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) = \varnothing$, т.е. $\Gamma,\ \forall x\Phi,\ R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta \Rightarrow \Gamma,\ \forall x\Phi_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta$.

Уже на пропозициональном уровне выполняется свойство:

U) пусть $\Gamma |= \Delta$ и $\Delta \subseteq \Sigma$, тогда $\Gamma |= \Sigma$; пусть $\Gamma |= \Delta$ и $\Gamma \subseteq \Lambda$, тогда $\Lambda |= \Delta$.

Учитывая это свойство, из теоремы 4 получаем следствие.

Следствие 1. Для логик квазиарных предикатов при условии $z \in X$ имеем:

1) $\Gamma_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta,\ \exists x\Phi,\ R_z^x(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta,\ \exists x\Phi$;

2) $\Gamma,\ \forall x\Phi,\ R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta \Leftrightarrow \Gamma,\ \forall x\Phi_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta$.

Теорема 5. Для логик квазиарных предикатов при условии $z \in X$ имеем:

1) $\Gamma,\ \exists x\Phi_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta \Rightarrow \Gamma,\ R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta$;

2) $\Gamma_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \forall x\Phi,\ \Delta \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= R_z^x(\Phi),\ \Delta$.

Согласно TR∃ при условии $z \in X$ имеем $\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$. Отсюда из $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) = \varnothing$ имеем $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cap \cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) = \varnothing$, т.е. получаем $\Gamma,\ \exists x\Phi_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta \Rightarrow \Rightarrow \Gamma,\ R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta$.

Согласно FR∀ при условии $z \in X$ имеем $\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)$. Отсюда из $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\forall x\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) = \varnothing$ имеем $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cap \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) = \varnothing$, т.е. получаем $\Gamma_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \forall x\Phi,\ \Delta \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= R_z^x(\Phi),\ \Delta$.

Для общего случая логик квазиарных предикатов выполняется следующая теорема.

Теорема 6. Пусть z тотально строго несущественное и $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$. Тогда:

1) $R_z^x(\Phi),\ \Gamma_A |= \Delta \Rightarrow \exists x\Phi,\ \Gamma_A |= \Delta$;

2) $\Gamma_A |= R_z^x(\Phi),\ \Delta \Rightarrow \Gamma_A |= \forall x\Phi,\ \Delta$.

Из теорем 5 и 6 получаем следствие.

Следствие 2. Пусть z тотально несущественное и $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$. Тогда при условии $z \in X$ имеем:

1) $\Gamma,\ \exists x\Phi_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta \Leftrightarrow \Gamma,\ R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \Delta$;

2) $\Gamma_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= \forall x\Phi,\ \Delta \Leftrightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},\, X-Y} |= R_z^x(\Phi),\ \Delta$.

4. СЕКВЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ЛОГИК КВАЗИАРНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Формально-аксиоматические системы, которые формализуют отношение логического следствия между двумя множествами формул, называют секвенциальными исчислениями. Основные объекты таких систем — секвенции, роль правил вывода играют секвенциальные формы.

4.1. Исчисление секвенций специфицированных формул. Секвенции трактуем (см. [14, 15, 8]) как множества специфицированных формул. Каждая формула секвенции отмечена (специфицирована) слева одним из двух символов — $\vdash$ или $\dashv$. Секвенции обозначаем в виде $\vdash\Gamma\dashv\Delta$, где все формулы множества Γ специфицированы символом $\vdash$, все формулы множества Δ — символом $\dashv$. Не детализируя, секвенции специфицированных формул обозначаем Σ.

Секвенциальное исчисления строится так, что секвенция $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ выводима $\Leftrightarrow \Gamma|=\Delta$.

Семантическим свойствам отношения $|=$ (см. [8, 15]) сопоставляются их синтаксические аналоги — секвенциальные формы. Они являются правилами вывода секвенциальных исчислений. Секвенциальные формы будем записывать в виде $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ или $\dfrac{\Sigma\;\;\Lambda}{\Omega}$. Роль аксиом секвенциального исчисления играют замкнутые секвенции. Понятие замкнутой секвенции в разных вариантах секвенциального исчисления уточняется по-разному. При этом должно выполняться условие: если секвенция $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ замкнута, то $\Gamma|=\Delta$.

Вывод в секвенциальных исчислениях имеет вид дерева, вершинами которого выступают секвенции. Такие деревья называют секвенциальними. Секвенциальное дерево замкнуто, если каждый его лист (конечная вершина, отличная от корня) — замкнутая секвенция. Секвенция Σ выводима, или имеет вывод, если существует замкнутое секвенциальное дерево с корнем Σ. Такое дерево называют выводом секвенции Σ. Секвенция X — преемник секвенции Y в секвенциальном дереве δ с корнем Σ, если в δ существует путь $\Sigma=\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n,\ldots,\Sigma_m,\ldots$ такой, что $\mathrm{X}=\Sigma_n$ и $\mathrm{Y}=\Sigma_m$. Тогда секвенцию Y назовем предком секвенции X. Такая терминология соответствует процессу вывода секвенции Σ из аксиом.

Базовое условие замкнутости секвенции [8] дается таким свойством: секвенция Ξ замкнута, если существует формула Φ такая, что $\vdash\Phi\in\Xi$ и $\dashv\Phi\in\Xi$. Замкнутость секвенции $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ означает, что $\Gamma\cap\Delta\neq\varnothing$, но из условия $\Gamma\cap\Delta\neq\varnothing$ вытекает $\Gamma|=\Delta$. Итак, если секвенция $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ замкнута, то $\Gamma|=\Delta$.

Введем дополнительное условие замкнутости секвенции в данной вершине секвенциального дерева. Пусть Y — множество всех неозначенных имен в данной вершине Ξ. Секвенция Ξ Y-замкнута, если существует пара формул $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}A\in\Xi$ и $\dashv R_{\bar{y}}^{\bar{u}}A\in\Xi$ таких, что $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}A$ и $R_{\bar{y}}^{\bar{u}}A$ имеют одинаковые Y-неозначиваемые формы.

Если секвенция $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ Y-замкнута, то $\Gamma_{A,-Y}|=\Delta$ для произвольной $\boldsymbol{A}$. В самом деле, при интерпретациях на данных, где все имена Y не имеют значения, предикаты, которые есть интерпретациями формул с одинаковыми Y-неозначиваемыми формами, принимают одинаковые значения. Отсюда получаем: если секвенция $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ Y-замкнута, то $\Gamma_{A,X-Y}|=\Delta$ для произвольных $\boldsymbol{A}$ и $X\subseteq Y: X\cap Y=\varnothing$.

4.2. Базовые секвенциальные формы исчислений логик квазиарных предикатов. Укажем базовые секвенциальные формы пропозиционального уровня (см. [8]):

$$\vdash\neg\ \frac{\dashv A,\Sigma}{\vdash\neg A,\Sigma};\qquad\qquad \dashv\neg\ \frac{\vdash A,\Sigma}{\dashv\neg A,\Sigma};$$

$$\vdash\vee\ \frac{\vdash A,\Sigma\qquad \vdash B,\Sigma}{\vdash A\vee B,\Sigma};\qquad\qquad \dashv\vee\ \frac{\dashv A,\ \dashv B,\Sigma}{\dashv A\vee B,\Sigma}.$$

Укажем секвенциальные формы, которые используют реноминацию:

$${}_{\vdash}\mathbf{RT}\,\frac{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{}_{\vdash}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma}\,;\qquad {}_{\dashv}\mathbf{RT}\,\frac{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{}_{\dashv}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma}\,;$$

$${}_{\vdash}\mathbf{RR}\,\frac{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A),\Sigma}{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)),\Sigma}\,;\qquad {}_{\dashv}\mathbf{RR}\,\frac{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A),\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)),\Sigma}\,;$$

$${}_{\vdash}\mathbf{R}\neg\,\frac{{}_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma}\,;\qquad {}_{\dashv}\mathbf{R}\neg\,\frac{{}_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma}\,;$$

$${}_{\vdash}\mathbf{R}\vee\,\frac{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma}\,;\qquad {}_{\dashv}\mathbf{R}\vee\,\frac{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma}\,;$$

$${}_{\vdash}\Phi\mathbf{N}\,\frac{{}_{\vdash}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{}_{\vdash}R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma}\ \text{при}\ \ y\in\nu(A)\,;\qquad {}_{\dashv}\Phi\mathbf{N}\,\frac{{}_{\dashv}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{}_{\dashv}R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma}\ \text{при}\ \ y\in\nu(A)\,;$$

$${}_{\vdash}\mathbf{R}\exists\,\frac{{}_{\vdash}\exists yR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yA),\Sigma}\ \text{при}\ \ y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}\,;\qquad {}_{\dashv}\mathbf{R}\exists\,\frac{{}_{\dashv}\exists yR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yA),\Sigma}\ \text{при}\ \ y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}\,;$$

$${}_{\vdash}\mathbf{R\exists S}\,\frac{{}_{\vdash}\exists zR_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{z}^{y}(A),\Sigma}{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yA),\Sigma}\,;\qquad {}_{\dashv}\mathbf{R\forall S}\,\frac{{}_{\dashv}\exists zR_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{z}^{y}(A),\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yA),\Sigma}\,.$$

Для форм ${}_{\vdash}\mathbf{R\exists S}$ и ${}_{\dashv}\mathbf{R\exists S}$ условия: $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$, z тотально строго несущественно, $z\notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A))$.

Укажем секвенциальные формы для элиминации кванторов:

$${}_{\vdash}\exists\,\frac{{}_{\vdash}R_{y}^{x}(A),\Sigma}{{}_{\vdash}\exists xA,\Sigma}\,;\qquad {}_{\dashv}\exists\,\frac{{}_{\dashv}R_{z_1}^{x}(A),\ldots,{}_{\dashv}R_{z_m}^{x}(A),\Sigma,\ {}_{\dashv}\exists xA}{{}_{\vdash}\exists xA,\Sigma}\,.$$

Для формы ${}_{\vdash}\exists$ имя y тотально строго несущественно и $y\notin nm(\Sigma, A)$; такое y гарантировано означенное.

Для формы ${}_{\dashv}\exists$ $\{z_1,\ldots,z_m\}$ — это множество означенных имен (всех означенных при первом применении формы ${}_{\dashv}\exists$, новых означенных при ее следующих применениях) множества доступных формул секвенции ${}_{\dashv}\exists xA,\Sigma$ и ее преемников.

Для производных композиций $\to$, $\&$, $\forall x$ можно дополнительно ввести производные секвенциальные формы ${}_{\vdash}\!\to$, ${}_{\dashv}\!\to$, ${}_{\vdash}\&$, ${}_{\dashv}\&$, ${}_{\vdash}\mathbf{R}\forall$, ${}_{\dashv}\mathbf{R}\forall$, ${}_{\vdash}\mathbf{R\forall S}$, ${}_{\dashv}\mathbf{R\forall S}$, ${}_{\vdash}\forall$, ${}_{\dashv}\forall$.

Секвенциальное исчисление логик квазиарных предикатов с приведенными выше базовыми секвенциальними формами назовем QG-исчислением.

4.3. Процедура построения секвенциального дерева. Рассмотрим процедуру построения секвенциального дерева для заданной секвенции Ξ.

Для общего случая логики квазиарных предикатов процедура построения секвенциального дерева существенным образом усложняется по сравнению со случаем логики ЭП [8]. Как уже отмечалось, это связано с тем, что значение предиката $P(d)$ может быть разным в зависимости от того, входит ли в d компонента с некоторым предметным именем. Поэтому при интерпретациях формул необходимо явным образом указывать множества означенных и неозначенных имен. Такая особенность проявляется при построении частных случаев формул вида ${}_{\dashv}\exists u\Phi$ с помощью ${}_{\dashv}\exists$-форм: частные случаи могут иметь только вид ${}_{\dashv}R_{y}^{u}(\Phi)$, где имя y означенное.

Таким образом, при применении ${}_{\dashv}\exists$-формы надо перебрать все возможные случаи распределения задействованных предметных имен на означенные и неозначенные.

Это можно реализовать с помощью построения соответствующих разветвлений секвенциального дерева. Неформально говоря, если в вершине Ξ к формуле вида $\dashv\exists u\Phi$ применяется $\dashv\exists$-форма, то для Ξ строится не одна, а много вершин-«сестер», которые являются непосредственными предками Ξ, имеют одно и то же множество задействованных имен и отличаются лишь разными множествами означенных имен и соответствующими множествами частных случаев вида $\dashv R_y^u(\Phi)$.

Процедура построения дерева для секвенции Σ начинается из корня дерева. Такую процедуру разобьем на этапы. Каждое применение секвенциальной формы проводится к конечному множеству доступных на данный момент формул.

В начале каждого этапа выполняется шаг доступа: к списку доступных формул прибавляем по одной формуле со списка $\vdash$-формул и списка $\dashv$-формул. Если недоступных $\vdash$-формул или $\dashv$-формул нет (соответствующий список исчерпан), то на дальнейших шагах доступа прибавляем по одной формуле неисчерпанного списка.

В начале построения дерева доступна лишь пара первых формул списков (единственная $\vdash$-формула или $\dashv$-формула, если один из списков пустой).

В начале построения секвенциального дерева для секвенции Σ зафиксируем некоторый список TN (бесконечный) тотально строго несущественных имен («новых» имен) такой, что имена из TN не встречаются в формулах секвенции Σ.

С каждой вершиной дерева связываем множество задействованных и множество означенных предметных имен. Множество означенных имен явным образом выделяется лишь на путях, где хотя бы раз применялись $\dashv\exists$-формы (до такого применения явное выделение множества означенных имен не нужно). Множество задействованных имен — это множество имен всех доступных в данной вершине формул. Все тотально строго несущественные имена, фигурирующие при применении $\vdash\exists$-форм, в данном выводе гарантировано означенные.

Пусть выполнено k этапов процедуры. На этапе $k+1$ проверяем, будет ли каждый из листьев дерева замкнутой секвенцией. Если все листья замкнутые, то процедура завершена положительно, получено замкнутое секвенциальное дерево. Если нет, то для каждого незамкнутого листа ξ делаем следующий шаг доступа, затем достраиваем конечное поддерево с вершиной ξ следующим образом:

1) активизируем все доступные непримитивные формулы ξ;

2) поочередно к каждой активной формуле применяем соответствующую секвенциальную форму.

Секвенциальные формы $\vdash\mathbf{RT}$ и $\dashv\mathbf{RT}$ вспомогательные: перед применением одной из форм типа $\Phi\mathbf{N}$, $\mathbf{RR}$, $\mathbf{R}\neg$, $\mathbf{R}\vee$, $\mathbf{R}\exists$, $\mathbf{R}\exists\mathbf{S}$ удаляем, в случае наличия, тождественные переименования, применяя надлежащее количество раз $\vdash\mathbf{RT}$ или $\dashv\mathbf{RT}$.

Сначала выполняем все $\vdash\exists$-формы. Применение $\vdash\exists$-формы прибавляет новое тотально строго несущественное имя y к множеству означенных имен вершины, такое y берем как первое невстреченное на данном пути от корня имя со списка TN. Имя y прибавляем к множествам задействованных и означенных имен, дальше для каждой доступной формулы вида $\dashv\exists u\Phi$ прибавляем ее частный случай $\dashv R_y^u(\Phi)$. Такое имя y гарантировано означенное. Затем выполняем $\mathbf{R}\exists\mathbf{S}$-формы, при этом берем $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$ из встречавшихся на данном пути от корня имен списка TN, если такие есть, иначе берем z как первое имя списка TN. В последнем случае z прибавляем к множествам задействованных и означенных имен, дальше для каждой доступной формулы вида $\dashv\exists u\Psi$ прибавляем ее частный случай $\dashv R_z^u(\Psi)$. Затем к каждой из оставшихся активных формул применяем соответствующую форму — одну из $\vdash\neg$, $\dashv\neg$, $\vdash\vee$, $\dashv\vee$, $\vdash\Phi\mathbf{N}$, $\dashv\Phi\mathbf{N}$, $\vdash\mathbf{RR}$, $\dashv\mathbf{RR}$, $\vdash\mathbf{R}\neg$, $\dashv\mathbf{R}\neg$, $\vdash\mathbf{R}\vee$, $\dashv\mathbf{R}\vee$, $\vdash\mathbf{R}\exists$, $\dashv\mathbf{R}\exists$.

Затем применяем $\dashv\exists$-формы. Такое применение выполняем следующим образом.

Если $\dashv\exists$-форма впервые применяется на пути от корня дерева, то из данной вершины строим разветвление дерева. Для каждой вершины, что является непосредственным предком данной, задаем множество означенных имен как определенное подмножество задействованных, при этом в нее должны входить все тотально строго несущественные имена, фигурирующие в предыдущих применениях $\vdash\exists$-форм на пути от корня к данной вершине.

Пусть в данной вершине Σ с множеством задействованных имен Z $\dashv\exists$-форма применяется впервые на пути от корня к Σ. Это означает, что на этом пути еще не было явного выделения множеств означенных и неозначенных имен, кроме, возможно, выделения гарантировано означенных при предыдущих применениях $\vdash\exists$-форм. Пусть G — множество гарантировано означенных имен, фигурирующих при применениях $\vdash\exists$-форм на пути от корня к данной вершине Σ, пусть $\dashv\exists x\Phi$ — та специфицированная формула, к которой применяется $\dashv\exists$-форма. Достраиваем непосредственных предков Σ для каждого $X \subseteq Z \setminus G$, тогда $X \cup G$ и $Z \setminus (X \cup G)$ — это множества означенных и неозначенных имен соответствующей вершины-предка. В каждой такой вершине-предке прибавляем частный случай $\dashv R_z^x(\Phi)$ формулы $\dashv\exists x\Phi$ для каждого $z \in X \cup G$, в дальнейшем во всех путях из этой вершины-предка имена из $X \cup G$ означенные.

Пусть в вершине Σ с множествами задействованных имен Z и означенных имен W к $\dashv\exists x\Phi$ впервые применяется $\dashv\exists$-форма, но применения $\dashv\exists$-форм на пути от корня к вершине Σ уже были, поэтому для Σ множества означенных и неозначенных имен уже выделены. Тогда для каждого $z \in W$ прибавляем частный случай $\dashv R_z^x(\Phi)$.

Расширение множества задействованных имен при появлении новых доступных формул после выполнения шага доступа ведет к повторному применению $\dashv\exists$-форм к старым доступным формулам вида $\dashv\exists x\Phi$. Пусть X — множество добавленных новых имен после выполнения шага доступа в вершине с множествами задействованных имен Z и означенных имен W. Повторное применение $\dashv\exists$-формы к $\dashv\exists x\Phi$ дает разветвление для каждой $Y \subseteq X$, в каждой такой вершине-предке прибавляем $\dashv R_z^x(\Phi)$ для каждого $z \in Y$, при этом множеством задействованных имен вершины-предка будет $Z \cup X$, множеством означенных имен будет $W \cup Y$.

Все повторы формул в секвенции удаляем. После выполнения невспомогательной секвенциальной формы формула пассивная. К пассивным и образованным на данном этапе формулам секвенциальные формы не применяются.

При построении секвенциального дерева возможны такие случаи:

1) процедура завершена положительно, имеем конечное замкнутое дерево;

2) процедура завершена отрицательно, имеем конечное незамкнутое дерево;

3) процедура не завершается, имеем бесконечное секвенциальне дерево. В силу леммы Кенига [5] такое дерево имеет хотя бы один бесконечный путь $\wp$. Вершины пути $\wp$ не могут быть замкнутыми секвенциями, ведь при появлении замкнутой секвенции процесс построения для этого пути обрывается. Каждая из формул секвенции Σ встретится на пути $\wp$ и станет доступной.

Итак, в случаях 2) и 3) в дереве существует конечный или бесконечный путь, все вершины которого — незамкнутые секвенции. Такой путь назовем незамкнутым.

4.4. Корректность и полнота *QG*-исчислений. Пусть для секвенции $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ построено замкнутое дерево. Из приведенной выше процедуры построения секвенциального дерева вытекает, что для каждой его вершины $\vdash\Lambda\dashv\mathrm{K}$ с множествами означенных имен W и неозначенных имен U для каждой модели языка $\boldsymbol{A}$ выполняется $\Lambda_{\boldsymbol{A}, W-U} \models \mathrm{K}$. Утверждение очевидно для всех форм, кроме $\vdash\exists$ и $\dashv\exists$. Для $\vdash\exists$-форм это вытекает из следствия 2, для $\dashv\exists$-форм — из теоремы 3 и следствия 1. Введенные $\vdash\exists$-формами новые тотально строго несущественные имена гарантировано означенные в данном выводе секвенции $\vdash\Gamma\dashv\Delta$, поэтому рассматриваем только модели языка $\boldsymbol{A}$ из G-означенными данными, где G — множество таких гарантировано означенных имен. Неформально говоря, гарантировано означенные имена ведут себя подобно константным символам классической логики предикатов. Итак, $\Gamma\models\Delta \Leftrightarrow$ для каждой $\boldsymbol{A}$ имеем $\Gamma_{A,G}\models\Delta$, где G — множество гарантировано означенных имен.

Таким образом, для построенного QG-исчисления выполняется следующая теорема.

Теорема 7 (корректности**).** Пусть секвенция $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ выводима. Тогда $\Gamma\models\Delta$.

Для доказательства полноты QG-исчислений будем опираться на известный (см., например, [15, 8]) метод модельных множеств.

Пусть $\boldsymbol{H}$ — множество специфицированных формул с выделенным множеством $W \subseteq nm(\boldsymbol{H})$ означенных имен; тогда $U = nm(\boldsymbol{H}) \setminus W$ — множество его неозначенных имен.

Множество H модельно, если выполняются следующие условия.

HC) Не существует формулы Φ такой, что $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ и $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$.

HU) Не существует пары формул вида $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} A \in \boldsymbol{H}$ и $\dashv R_{\bar{y}}^{\bar{u}} A \in \boldsymbol{H}$ таких, что $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} A$ и $R_{\bar{y}}^{\bar{u}} A$ имеют одинаковые U-неозначиваемые формы.

H¬) Если $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$;
если $\dashv\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$.

H∨) Если $\vdash\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ или $\vdash\Psi\in\boldsymbol{H}$;
если $\dashv\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$ и $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$.

HRT) Если $\vdash R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;
если $\dashv R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HRR) Если $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;
если $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR¬) Если $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;
если $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR∨) Если $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$;
если $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$.

HΦN) Если $\vdash R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ и $y\in\nu(\Phi)$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;
если $\dashv R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ и $y\in\nu(\Phi)$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR∃) Если $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}$ и $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$, то $\vdash\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;
если $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}$ и $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$, то $\dashv\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR∃S) Если $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}$ и $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$, то $\vdash\exists z\, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{z}^{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;
если $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}$ и $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$, то $\dashv\exists z\, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{z}^{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

Здесь z строго тотально несущественное и $z\notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi))$.

H∃) Если $\vdash\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то существует $y\in W$ такое, что $\vdash R_{y}^{x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;
если $\dashv\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то для всех $y\in W$ имеем $\dashv R_{y}^{x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

Теорема 8. Пусть $\wp$ — незамкнутый путь в секвенциальном дереве, $\boldsymbol{H}$ — множество всех его специфицированных формул. Тогда существуют АС $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$ и $\delta\in{}^{V}A$ такие, что:

- из условия $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ вытекает $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$;
- из условия $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$ вытекает $\delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

Пусть $\wp$ — незамкнутый путь в секвенциальном дереве. Тогда $\boldsymbol{H}$ — модельное множество. В самом деле, для перехода от низшей вершины пути к высшей используется одна из базовых секвенциальных форм. Переходы, выполненные согласно таким формам, в точности отвечают пунктам определения модельного множества. Каждая непримитивная формула [8], которая встречается на пути $\wp$, будет разложена или упрощена согласно соответствующей секвенциальной форме. Все секвенции пути $\wp$ незамкнутые, поэтому выполняются соответствующие условия корректности модельного множества.

Пусть W — множество всех означенных предметных имен, которые фигурируют в H. Возьмем некоторое множество A такое, что $|A|=|W|$, и некоторую инъективную $\delta\in{}^{V}A$ с $im(\delta)=W$. Такая A дублирует множество W.

Доказательство проведем индукцией по сложности формулы согласно построению модельного множества.

Сначала зададим значение базовых предикатов на δ и на ИМ вида $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$.

Если $\vdash p\in\boldsymbol{H}$, то положим $\delta\in\boldsymbol{T}(p_A)$; если $\dashv p\in\boldsymbol{H}$, то положим $\delta\in\boldsymbol{F}(p_A)$.

Если $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)\in\boldsymbol{H}$, то положим $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)\in\boldsymbol{T}(p_A)$; если $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)\in\boldsymbol{H}$, то положим $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)\in\boldsymbol{F}(p_A)$.

Заданные таким образом значения базовых предикатов продолжим, учитывая условия строго несущественности имен, на соответствующие $h\in{}^{V}A$. Во всех других случаях $d\in{}^{V}A$ значение $p_A(d)$ можно задавать произвольно, учитывая естественное ограничение относительно строго несущественности: для всех d, $h\in{}^{V}A$ таких, что $d\|-\nu(p)=h\|-\nu(p)$, необходимо $p_A(d)=p_A(h)$. Таким образом, значение базовых предикатов заданы однозначно, причем учтено, что имена $y\in\nu(p)$ строго несущественные для p.

Для атомарных формул и формул вида $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ утверждения 1) и 2) теоремы вытекают с приведенного выше определения значений базовых предикатов.

Докажем шаг индукции для утверждений 1) и 2).

Пусть $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$. Согласно H$\neg$ имеем $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)$, откуда $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg\Phi_A)$.

Пусть $\dashv\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$. Согласно H$\neg$ имеем $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$, откуда $\delta\in\boldsymbol{F}(\neg\Phi_A)$.

Пусть $\vdash\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$. Согласно H$\vee$ имеем $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ или $\vdash\Psi\in\boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ или $\delta\in\boldsymbol{T}(\Psi_A)$, откуда $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)\cup\boldsymbol{T}(\Psi_A)=$ $=\boldsymbol{T}(\Phi\vee\Psi_A)$.

Пусть $\dashv\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$. Согласно H$\vee$ имеем $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$ и $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)$ и $\delta\in\boldsymbol{F}(\Psi_A)$, откуда $\delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)\cap\boldsymbol{F}(\Psi_A)=\boldsymbol{F}(\Phi\vee\Psi_A)$.

Пусть $\vdash R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Согласно HRT имеем $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$, откуда $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_A)$.

Пусть $\dashv R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Согласно HRT имеем $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$, откуда $\delta\in\boldsymbol{F}(R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_A)$.

Пусть $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}$. Согласно HRR имеем $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta \in \boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_A)$. Пусть $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}$. Согласно HRR имеем $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta \in \boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_A)$.

Пусть $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H}$. Согласно HR¬ имеем $\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta \in \boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_A)$.

Пусть $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H}$. Согласно HR¬ имеем $\dashv \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta \in \boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_A)$.

Пусть $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in \boldsymbol{H}$. Согласно HR∨ имеем $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta \in \boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi)_A)$.

Пусть $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in \boldsymbol{H}$. Согласно HR∨ имеем $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee \mathrm{P}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta \in \boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi)_A)$.

Пусть $\vdash R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ и $y \in \nu(\Phi)$. Согласно HΦN имеем $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta \in \boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{T}(R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)_A)$.

Пусть $\dashv R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ и $y \in \nu(\Phi)$. Согласно HΦN имеем $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta \in \boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{F}(R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)_A)$.

Пусть $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ и $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$. Согласно HR∃ имеем $\vdash \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta \in \boldsymbol{T}(\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)_A)$.

Пусть $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ и $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$. Согласно HR∃ имеем $\dashv \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta \in \boldsymbol{F}(\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)_A)$.

Пусть $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ и $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$. Согласно HR∃S имеем $\vdash \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{z}^{y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ для некоторого строго тотально несущественного $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi))$. По предположению индукции имеем $\delta \in \boldsymbol{T}(\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{z}^{y}(\Phi)_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)_A)$.

Пусть $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ и $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$. Согласно HR∃S имеем $\dashv \forall z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{z}^{y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ для некоторого строго тотально несущественного $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi))$. По предположению индукции имеем $\delta \in \boldsymbol{F}(\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{z}^{y}(\Phi)_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)_A)$.

Пусть $\vdash \exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$. Согласно H∃ существует $y \in W$ такое, что $\vdash R_{y}^{x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta \in \boldsymbol{T}(R_{y}^{x}(\Phi)_A)$. Отсюда $\delta\nabla x \mapsto \delta(y) \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$. Однако $\delta(y)\downarrow$ согласно $y \in W$, поэтому для $a = \delta(y)$ имеем $\delta\nabla x \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{T}(\exists x\Phi_A)$.

Пусть $\dashv \exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$. Согласно H∃ для всех $y \in W$ имеем $\dashv R_{y}^{x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$. По предположению индукции $\delta \in \boldsymbol{F}(R_{y}^{x}(\Phi)_A)$ для всех $y \in W$. Отсюда $\delta\nabla x \mapsto \delta(y) \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ для всех $y \in W$. Согласно $\delta \in {}^{W}A$ имеем $\delta(y)\downarrow$ для всех $y \in W$. Поскольку δ — биекция $W \to A$, то каждое $b \in A$ имеет вид $b = \delta(y)$ для некоторого $y \in W$. Итак, $\delta\nabla x \mapsto b \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$, откуда $\delta \in \boldsymbol{F}(\exists x\Phi_A)$.

Теорема 9 (полноты). Пусть $\Gamma \models \Delta$. Тогда секвенция $\vdash \Gamma \dashv \Delta$ выводима.

Для доказательства предположим противное: $\Gamma \models \Delta$ и секвенция $\vdash \Gamma \dashv \Delta$ невыводима. Если $\Sigma = \vdash \Gamma \dashv \Delta$ невыводима, то в секвенциальном дереве для Σ существует незамкнутый путь. Множество $\boldsymbol{H}$ всех специфицированных формул секвенций этого пути модельное. Заметим, что $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta \subseteq \boldsymbol{H}$. Согласно теореме 8 существуют АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ и $\delta \in {}^{V}A$ такие: $_{|-}\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ и $_{-|}\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$. Согласно $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta \subseteq \boldsymbol{H}$ для всех $\Phi \in \Gamma$ имеем $\delta \in T(\Phi_A)$, для всех $\Psi \in \Delta$ имеем $\delta \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$. Отсюда $\delta \in \boldsymbol{T}(\Gamma) \cap \boldsymbol{F}(\Delta)$, откуда $\boldsymbol{T}(\Gamma) \cap \boldsymbol{F}(\Delta) \neq \varnothing$. Это противоречит $\Gamma | = \Delta$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследуются семантико-синтаксические свойства композиционно-номинативных логик квазиарных предикатов. Такие логики строятся в семантико-синтаксическом стиле на основе композиционно-номинативного подхода. Рассмотрен спектр композиционно-номинативных логик, описаны важные классы первопорядковых логик квазиарных предикатов — логики полнототальных эквитонных, эквитонных, эквисовместных и локально-эквисовместных предикатов. Для общего случая логик квазиарных предикатов кванторного уровня построено исчисление секвенциального типа, доказаны его корректность и полнота.

Композиционно-номинативные логики квазиарных предикатов наиболее близки к классическим, они сохраняют основные свойства классических логик при существенном расширении класса семантических моделей. Такие логики, с одной стороны, позволяют использовать как теоретические результаты, так и богатый опыт применения классической логики, а с другой стороны, они больше адаптированы к потребностям программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капитонова Ю.В., Летичевский А.А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. — М.: Наука, 1988. — 295 с.
2. Капітонова Ю.В., Летичевський О.А. Доведення теорем в математичному інформаційному середовищі // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 4. — С. 3–12.
3. Капитонова Ю.В., Летичевский А.А., Волков В.А. Дедуктивные средства системы алгебраического программирования // Там же. — 2000. — № 1. — С. 17–34.
4. Handbook of logic in Computer Science / Ed. by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T.S.E. Maibaum. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1993–2000.
5. Клини С. Математическая логика. — М.: Мир, 1973. — 480 с.
6. Никитченко Н.С., Шкильняк С.С. Неоклассические логики предикатов // Проблемы программирования. — 2000. — № 3–4. — С. 3–17.
7. Никитченко Н.С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Там же. — 1999.— № 1. — С. 16–31.
8. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. — К.: ВПЦ Київ. ун-ту, 2008. — 528 с.
9. Редько В.Н. Композиции программ и композиционное программирование // Программирование. — 1978. — № 5. — С. 3–24.
10. Редько В.Н. Основания композиционного программирования // Там же. — 1979. — № 3. — С. 3–13.
11. Никитченко Н.С. Аппликативные композиции частичных предикатов // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 2. — С. 14–33.
12. Шкільняк С.С. Неокласичні кванторні логіки з рівністю // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. — 2003. — Вип. 1. — С. 222–225.
13. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Композиційні логіки номінативних даних // Проблемы программирования. — 2003. — № 3. — С. 29–40.
14. Непейвода Н.Н. Прикладная логика. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. — 521 с.
15. Смирнова Е.Д. Логика и философия. — М.: РОССПЭН, 1996. — 304 с.

Поступила 15.03.2010