Т.А. АЛИЕВ, Н.Ф. МУСАЕВА, У.Э. САТТАРОВА

УДК 519.216

ТЕХНОЛОГИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ РОБАСТНЫХ НОРМИРОВАННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ[1]

Ключевые слова: *случайный сигнал, помеха, зашумленный сигнал, нормированная корреляционная матрица, робастная нормированная корреляционная матрица.*

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что, по существу, все типовые задачи, связанные со статистическим анализом исследуемых процессов, требуют знания корреляционных матриц, составленных из оценок автокорреляционных и взаимно корреляционных функций. Однако на практике для реальных объектов по данным их нормальной эксплуатации оценки автокорреляционных и взаимно корреляционных функций входных и выходных сигналов из-за помех, которыми сопровождаются исследуемые сигналы, содержат определенные погрешности. Исходя из этого корреляционная матрица зашумленных сигналов, содержащая погрешности в элементах, существенно отличается от корреляционной матрицы полезных сигналов, элементы которой не содержат погрешности. Поэтому причине решение корреляционных матричных уравнений не всегда оказывается удовлетворительным и адекватным.

Для устранения погрешностей в элементах корреляционных матриц, т.е. в оценках корреляционных функций, как правило, применяют нормирование. Однако, как показали проведенные нами исследования, нормирование корреляционных функций позволяет устранить влияние помехи только для оценок автокорреляционных функций при нулевом временно́м сдвиге. В остальных случаях нормирование не всегда улучшает оценки корреляционных функций [1].

При этом из [2–4] известно, что при решении матричных уравнений, как правило, исследуется вопрос плохой обусловленности корреляционных матриц, вызванной ошибками округления или измерения. Для улучшения обусловленности корреляционных матриц в этом случае предложено множество методов. Среди них особое место занимают метод регуляризации и его модификации [2–4], способ предобусловливания [2–4] и т.д. Но так как эти методы не ориентированы на исключение погрешностей от помех в элементах корреляционных матриц, то их трудно применить для обеспечения адекватности решения прикладных задач, использующих в качестве исходных данных зашумленные сигналы, поступающие от датчиков, установленных в наиболее уязвимых местах контролируемого объекта.

[1] Работа выполнена при поддержке Азербайджанского Национального Научного Фонда (Azerbaijan National Science Foundation (ANSF)) и Американского Фонда Гражданских Исследований и Развития (the U.S. Civilian Research & Development Foundation (CRDF)), грант № 16089.

В связи с этим возникает проблема исключения погрешностей в оценках нормированных корреляционных матриц и получения матриц с элементами, аналогичными элементам корреляционных матриц полезных сигналов. При этом может появиться возможность более эффективного использования способа выбора предобусловливателя, что обеспечит адекватность решения задач контроля, диагностики, прогноза, идентификации, управления и т.д., когда исходные данные представляют собой зашумленные сигналы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно, что корреляционные матрицы используются при решении многих прикладных задач. Рассмотрим, в частности, корреляционные матрицы, которые используются при решении задач идентификации статики и динамики, и проанализируем влияние помехи на их элементы.

Анализ погрешностей элементов корреляционных матриц, которые используются при решении задач идентификации статики технологических процессов. Известно, что решение многочисленных важнейших прикладных задач статики сводится к численному решению матричных корреляционных уравнений

$$\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)\cdot\vec{B}=\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0), \qquad (1)$$

$\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)$ — матрица оценок автокорреляционных и взаимно корреляционных функций $R_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_i}(0)$, $R_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_j}(0)$, $i,j=\overline{1,n}$, при временно́м сдвиге $\mu=0$ центрированных входных сигналов $\overset{\circ}{X}_i(k\Delta t)=X_i(k\Delta t)-m_{X_i}$; $\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0)$ — матрица-столбец оценок взаимно корреляционных функций $R_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{Y}}$ при временно́м сдвиге $\mu=0$ между центрированными входными $\overset{\circ}{X}_i(k\Delta t)$ и выходным $\overset{\circ}{Y}(k\Delta t)=Y(k\Delta t)-m_Y$ сигналами; m_{X_i} и m_Y — математические ожидания $X_i(k\Delta t)$ и $Y(k\Delta t)$.

Однако анализ измерительной информации, получаемой от датчиков различных технических и биологических объектов, показывает, что реальные сигналы $g_i(t)$, $\eta(t)$ состоят из смеси полезных сигналов $X_i(t)$, $Y(t)$ и случайных помех $\varepsilon_i(t)$, $\varphi(t)$, т.е. $g_i(t)=X_i(t)+\varepsilon_i(t)$, $\eta(t)=Y(t)+\varphi(t)$. В этом случае уравнение (1) приобретает вид

$$\vec{R}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0)\cdot\vec{B}^*=\vec{R}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(0), \qquad (2)$$

$\vec{R}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0)$ — матрица оценок автокорреляционных и взаимно корреляционных функций $R_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{g}_i}(0)$, $R_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{g}_j}(0)$, $i,j=\overline{1,n}$, при временно́м сдвиге $\mu=0$ центрированных входных зашумленных сигналов $\overset{\circ}{g}_i(i\Delta t)=g_i(i\Delta t)-m_{g_i}$; $\vec{R}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(0)$ — матрица-столбец оценок взаимно корреляционных функций $R_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{\eta}}(0)$ при временно́м сдвиге $\mu=0$ между центрированными входными $\overset{\circ}{g}_i(k\Delta t)$ и выходным $\overset{\circ}{\eta}(k\Delta t)=\eta(k\Delta t)-m_\eta$ зашумленными сигналами; m_{g_i} и m_η — математические ожидания соответственно сигналов $g_i(k\Delta t)$ и $\eta(k\Delta t)$.

Проведем анализ влияния помехи на элементы корреляционных матриц, т.е. на оценки автокорреляционных и взаимно корреляционных функций. Известно, что формула для определения оценок автокорреляционных и взаимно корреляционных функций имеет вид:

$$R_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{g}_i}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overset{\circ}{g}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{g}_i((k+\mu)\Delta t), \qquad (3)$$

$$R_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_j}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{g}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{g}_j((k+\mu)\Delta t), \tag{4}$$

$$R_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{\eta}}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{g}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{\eta}((k+\mu)\Delta t). \tag{5}$$

При традиционном подходе к решению перечисленных практических задач статистическими методами предполагается, что выполняются классические ограничения, т.е. исследуемые процессы $g_i(t)$, $\eta(t)$ являются стационарными эргодическими, случайные помехи $\varepsilon_i(t)$, $\varphi(t)$ имеют нулевые математические ожидания $m_{\varepsilon_i} \approx 0$, $m_\varphi \approx 0$, некоррелированные значения отчетов запишем

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{\varepsilon}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{\varepsilon}_i((k+\mu)\Delta t) \approx 0\,, \quad \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{\varphi}(k\Delta t)\,\overset{\circ}{\varphi}((k+\mu)\Delta t) \approx 0 \text{ при } \mu \neq 0, \tag{6}$$

полезные сигналы и помехи подчиняются нормальному закону распределения и между ними отсутствует корреляция [4–11]:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{X}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{\varepsilon}_i((k+\mu)\Delta t) \approx 0, \quad \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{\varepsilon}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{X}_i((k+\mu)\Delta t) \approx 0, \\
\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{X}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{\varepsilon}_j((k+\mu)\Delta t) \approx 0, \quad \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{\varepsilon}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{X}_j((k+\mu)\Delta t) \approx 0, \\
\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{X}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{\varphi}((k+\mu)\Delta t) \approx 0, \quad \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{\varepsilon}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{Y}((k+\mu)\Delta t) \approx 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Кроме того, учитывая, что для реальных технологических параметров

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{\varepsilon}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{\varepsilon}_j((k+\mu)\Delta t) \approx 0, \quad \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{\varepsilon}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{\varphi}((k+\mu)\Delta t) \approx 0, \tag{8}$$

для оценок взаимно корреляционных функций получаем следующие выражения:

$$R_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_j}(\mu) \approx R_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(\mu), \quad R_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{\eta}}(\mu) \approx R_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{Y}}(\mu). \tag{9}$$

Принимая во внимание, что дисперсия $D(\varepsilon_i)$ помехи равна

$$D(\varepsilon_i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{\varepsilon}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{\varepsilon}_i((k)\Delta t), \tag{10}$$

для оценок автокорреляционных функций зашумленных сигналов получаем

$$R_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_i}(\mu) = \begin{cases} R_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_i}(0) + D(\varepsilon_i) & \text{при } \mu = 0, \\ R_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_i}(\mu) & \text{при } \mu \neq 0. \end{cases} \tag{11}$$

В этом случае матрицы зашумленных сигналов с учетом (6)–(11) приобретают вид

$$\vec{R}_{\overset{\circ}{g} \overset{\circ}{g}}(0) = \begin{bmatrix} R_{\overset{\circ}{X}_1 \overset{\circ}{X}_1}(0) + D(\varepsilon_1) & R_{\overset{\circ}{X}_1 \overset{\circ}{X}_2}(0) & \ldots & R_{\overset{\circ}{X}_1 \overset{\circ}{X}_n}(0) \\ R_{\overset{\circ}{X}_2 \overset{\circ}{X}_1}(0) & R_{\overset{\circ}{X}_2 \overset{\circ}{X}_2}(0) + D(\varepsilon_2) & \ldots & R_{\overset{\circ}{X}_2 \overset{\circ}{X}_n}(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{\overset{\circ}{X}_n \overset{\circ}{X}_1}(0) & R_{\overset{\circ}{X}_n \overset{\circ}{X}_2}(0) & \ldots & R_{\overset{\circ}{X}_n \overset{\circ}{X}_n}(0) + D(\varepsilon_n) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$\vec{R}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(0) = [R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{\eta}}(0)\ R_{\overset{\circ}{g}_2\overset{\circ}{\eta}}(0)\ \ldots\ R_{\overset{\circ}{g}_n\overset{\circ}{\eta}}(0)]^{\mathrm{T}} =$$

$$= [R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{Y}}(0)\ R_{\overset{\circ}{X}_2\overset{\circ}{Y}}(0)\ \ldots\ R_{\overset{\circ}{X}_n\overset{\circ}{Y}}(0)]^{\mathrm{T}}. \qquad (13)$$

Из данных выражений очевидно, что элементы матрицы зашумленных сигналов совпадают с элементами матрицы полезных сигналов, за исключением элементов главной диагонали, которые содержат величины дисперсий помех. Элементы же вектор-столбца зашумленных сигналов совпадают с элементами матрицы полезных сигналов. Поэтому результаты решения матричного уравнения (2), элементы которого содержат погрешности в главной диагонали, будут значительно отличаться от результатов решения матричного уравнения (1), элементы которого не содержат погрешностей.

Считается [4, 12] , что для устранения влияния дисперсий $D(\varepsilon_i)$ помех в диагональных элементах матрицы $\vec{R}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0)$ на ее обусловленность целесообразно перейти к нормированным оценкам корреляционных функций. Для построения нормированных корреляционных матриц используются формулы перевода:

$$r_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_i}(\mu) = R_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_i}(\mu)/D(X_i),\ r_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_j}(\mu) = R_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_j}(\mu)\ /\sqrt{D(X_i)\cdot D(X_j)},$$

$$r_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{Y}}(\mu) = R_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{Y}}(\mu)/\sqrt{D(X_i)\cdot D(Y)},\ r_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{g}_i}(\mu) = R_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{g}_i}(\mu)\ /\ D(g_i),$$

$$r_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{g}_j}(\mu) = R_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{g}_j}(\mu)\ /\sqrt{D(g_i)\cdot D(g_j)},\ r_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{\eta}}(\mu) = R_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{\eta}}(\mu)/\sqrt{D(g_i)\cdot D(\eta)},$$

где дисперсии полезных и зашумленных сигналов имеют вид

$$D(X_i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overset{\circ}{X}_i(k\Delta t)\ \overset{\circ}{X}_i(k\Delta t),\ D(Y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overset{\circ}{Y}(k\Delta t)\overset{\circ}{Y}(k\Delta t),$$

$$D(g_i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overset{\circ}{g}_i(k\Delta t)\ \overset{\circ}{g}_i(k\Delta t) = D(X_i) + D(\varepsilon_i),$$

$$D(\eta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overset{\circ}{\eta}(k\Delta t)\overset{\circ}{\eta}(k\Delta t) = D(Y) + D(\varphi),$$

$$D(\varphi) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overset{\circ}{\varphi}(k\Delta t)\overset{\circ}{\varphi}(k\Delta t) \quad \text{— дисперсия } \varphi(k\Delta t).$$

Тогда нормированные корреляционные матрицы $\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)$, $\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0)$, $\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0)$, $\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(0)$ полезных и зашумленных сигналов, полученные в результате преобразований, приобретают вид

$$\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0) = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(0)}{D_{X_1X_2}} & \ldots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_n}(0)}{D_{X_1X_n}} \\ \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_2\overset{\circ}{X}_1}(0)}{D_{X_2X_1}} & 1 & \ldots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_2\overset{\circ}{X}_n}(0)}{D_{X_2X_n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_n\overset{\circ}{X}_1}(0)}{D_{X_nX_2}} & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_n\overset{\circ}{X}_2}(0)}{D_{X_nX_2}} & \ldots & 1 \end{bmatrix}, \qquad (14)$$

где $D_{X_iX_j} = \sqrt{D(X_i)\cdot D(X_j)}$;

$$\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0) = \begin{bmatrix} \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{Y}}(0)}{D_{X_1Y}} & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_2\overset{\circ}{Y}}(0)}{D_{X_2Y}} & \ldots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_n\overset{\circ}{Y}}(0)}{D_{X_nY}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad (15)$$

где $D_{X_iY} = \sqrt{D(X_i)\cdot D(Y)}$;

$$\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0) \approx \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(0)}{D_{X_1\varepsilon_1}\cdot D_{X_2\varepsilon_2}} & \cdots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_n}(0)}{D_{X_1\varepsilon_1}\cdot D_{X_n\varepsilon_n}} \\ \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_2\overset{\circ}{X}_1}(0)}{D_{X_2\varepsilon_2}\cdot D_{X_1\varepsilon_1}} & 1 & \cdots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_2\overset{\circ}{X}_n}(0)}{D_{X_2\varepsilon_2}\cdot D_{X_n\varepsilon_n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_n\overset{\circ}{X}_1}(0)}{D_{X_n\varepsilon_n}\cdot D_{X_1\varepsilon_1}} & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_n\overset{\circ}{X}_2}(0)}{D_{X_n\varepsilon_n}\cdot D_{X_2\varepsilon_2}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \qquad (16)$$

$$\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(0) \approx \begin{bmatrix} \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{Y}}(0)}{D_{X_1\varepsilon_1}\cdot D_{Y\varphi}} & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_2\overset{\circ}{Y}}(0)}{D_{X_2\varepsilon_2}\cdot D_{Y\varphi}} & \cdots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}_n\overset{\circ}{Y}}(0)}{D_{X_n\varepsilon_n}\cdot D_{Y\varphi}} \end{bmatrix}, \qquad (17)$$

где $D_{X_i\varepsilon_i} = \sqrt{D(X_i) + D(\varepsilon_i)}$, $D_{Y\varphi} = \sqrt{D(Y) + D(\varphi)}$.

Из сравнения матрицы входных полезных сигналов (14) с матрицей входных зашумленных сигналов (16) видно, что диагональные элементы матрицы зашумленных сигналов совпадают с диагональными элементами матрицы полезных сигналов и равны единице. Таким образом, при переходе к нормированным корреляционным матрицам устраняется влияние дисперсии $D(\varepsilon_i)$ помехи на диагональные элементы нормированной матрицы зашумленных сигналов. Однако при этом остальные элементы матрицы зашумленных сигналов содержат в подкоренном выражении знаменателя помимо величин дисперсий $D(X_i)$ полезных сигналов также величины дисперсий $D(\varepsilon_i)$ помех. Причем величины дисперсий помех входят в подкоренные выражения в качестве слагаемых и тем самым уменьшают значения элементов $r_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{g}_j}(0)$ матрицы $\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0)$ по сравнению с элементами $r_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_j}$ матрицы $\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)$ полезных сигналов.

Сравнивая нормированную матрицу зашумленных входных и выходного сигналов (15) с нормированной матрицей полезных сигналов (17), можно отметить, что ее элементы также содержат в подкоренном выражении знаменателя помимо величин дисперсий $D(X_i)$, $D(Y)$ полезных сигналов величины дисперсий $D(\varepsilon_i)$, $D(\varphi)$ помех, которые тоже уменьшают значения самих элементов матрицы $\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(0)$ по сравнению с элементами матрицы $\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0)$ полезных сигналов. Следовательно, несмотря на то, что матрица $\vec{R}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(0)$ входных и выходного зашумленных сигналов практически совпадает с матрицей $\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0)$ полезных сигналов и выполняется равенство (13), процедура нормирования практически искажает значения элементов нормированной матрицы $\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(0)$ и приводит к погрешностям ее элементов.

Таким образом, в отличие от общепринятого мнения, переход к нормированным корреляционным матрицам не дает желаемого эффекта для случая, когда элементы нормированных корреляционных матриц представляют собой оценки зашумленных сигналов. Поэтому для этих случаев очевидна необходимость решения проблемы исключения влияния дисперсий помех и получения нормированных корреляционных матриц, аналогичных нормированным корреляционным матрицам полезных сигналов:

$$\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0) \approx \vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0),\ \vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0) \approx \vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0). \qquad (18)$$

Анализ погрешностей элементов корреляционных матриц, которые используются при решении задач идентификации динамики технологических процессов. Известно, что многие задачи статистической динамики линейных систем управления можно свести к решению системы уравнений, которая в матричной форме имеет вид

$$\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\mu)=\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)\vec{W}(\mu),\ \mu=0,\Delta t,\ 2\Delta t,\ldots,(N-1)\Delta t, \tag{19}$$

где $\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$ — квадратная симметричная матрица автокорреляционных функций размерности $N\times N$ входного сигнала $\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_X$; $\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\mu)$ — вектор-столбец взаимно корреляционных функций между входом $\overset{\circ}{X}(t)$ и выходом $\overset{\circ}{Y}(t)=Y(t)=m_Y$; m_X, m_Y — математические ожидания; $\vec{W}(\mu)$ — вектор-столбец импульсных переходных функций [4], которые имеют вид

$$\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)=\left\|\begin{matrix} R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0) & R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\Delta t) & \ldots & R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-1)\Delta t] \\ R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\Delta t) & R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0) & \ldots & R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-2)\Delta t] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-1)\Delta t] & R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-2)\Delta t] & \ldots & R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0) \end{matrix}\right\|, \tag{20}$$

$$\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\mu)=[R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0)\ \ R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\Delta t)\ \ \ldots\ \ R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}[(N-1)\Delta t]]^{\mathrm{T}}, \tag{21}$$

$$\vec{W}(\mu)=[W(0)\ \ W(\Delta t)\ \ \ldots\ \ W((N-1)\Delta t)]^{\mathrm{T}}. \tag{22}$$

Таким образом, задача определения импульсной переходной функции сводится к решению симметричной системы линейных алгебраических уравнений с доминирующей главной диагональю. Неизвестными являются значения импульсной переходной функции $\vec{W}(\mu)$ в точках $\mu=0,\Delta t,\ 2\Delta t,\ldots,(N-1)\Delta t$.

Однако, когда выполняются условия (6)–(8), матрица (20), (21) преобразовывается к следующему виду:

$$\vec{R}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)\approx\left\|\begin{matrix} R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)+D(\varepsilon) & R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\Delta t) & \ldots & R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-1)\Delta t] \\ R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\Delta t) & R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)+D(\varepsilon) & \ldots & R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-2)\Delta t] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-1)\Delta t] & R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-2)\Delta t] & \ldots & R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)+D(\varepsilon) \end{matrix}\right\|, \tag{23}$$

$$\vec{R}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(\mu)\approx[R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0)\ \ R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\Delta t)\ \ \ldots\ \ R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}[(N-1)\Delta t]]^{\mathrm{T}}=\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\mu). \tag{24}$$

Таким образом, в данном случае, как и при решении задачи статики, матрица $\vec{R}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(\mu)$ взаимно корреляционных функций между зашумленными входным и выходным сигналами совпадает с матрицей $\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\mu)$ полезных сигналов. При этом корреляционная матрица $\vec{R}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ зашумленного входного сигнала отличается от матрицы $\vec{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$ полезного входного сигнала диагональными элементами, которые в качестве слагаемого содержат величину дисперсии помехи $D(\varepsilon)$. Это серьезное препятствие при решении задач идентификации динамики для рассматриваемого случая. Для устранения этой проблемы считается целесообразным переход к нормированным корреляционным матрицам вида [4]:

$$\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)=\left\|\begin{matrix} 1 & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\Delta t)}{D(X)} & \ldots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-1)\Delta t]}{D(X)} \\ \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\Delta t)}{D(X)} & 1 & \ldots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-2)\Delta t]}{D(X)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-1)\Delta t]}{D(X)} & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-2)\Delta t]}{D(X)} & \ldots & 1 \end{matrix}\right\|, \tag{25}$$

$$\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\mu)=\left[\frac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}\ \frac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\Delta t)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}\ \ldots\ \frac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}[(N-1)\Delta t]}{\sqrt{D(X)D(Y)}}\right]^{\mathrm{T}}, \tag{26}$$

$$\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)\approx\left\|\begin{matrix} 1 & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\Delta t)}{D(X)+D(\varepsilon)} & \ldots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-1)\Delta t]}{D(X)+D(\varepsilon)} \\ \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\Delta t)}{D(X)+D(\varepsilon)} & 1 & \ldots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-2)\Delta t]}{D(X)+D(\varepsilon)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-1)\Delta t]}{D(X)+D(\varepsilon)} & \dfrac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}[(N-2)\Delta t]}{D(X)+D(\varepsilon)} & \ldots & 1 \end{matrix}\right\|, \tag{27}$$

$$\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(\mu)\approx\left[\frac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0)}{D_{X\varepsilon}D_{Y\varphi}}\ \frac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\Delta t)}{D_{X\varepsilon}D_{Y\varphi}}\ \ldots\ \frac{R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}[(N-1)\Delta t]}{D_{X\varepsilon}D_{Y\varphi}}\right]^{\mathrm{T}}, \tag{28}$$

где $D_{X\varepsilon}=\sqrt{D(X)+D(\varepsilon)}$, $D_{Y\varphi}=\sqrt{D(Y)+D(\varphi)}$.

В результате нормирования в задачах динамики диагональные элементы нормированной матрицы $\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ зашумленных сигналов так же, как и в задачах статики, совпадают с диагональными элементами нормированной матрицы $\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$ полезных сигналов и равны единице. Однако, как показали исследования и как очевидно из выражений (27), (28), остальные элементы нормированной матрицы $\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ входного сигнала, а также все элементы нормированной взаимно корреляционной матрицы $\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(\mu)$ будут содержать в подкоренном выражении знаменателя помимо величин дисперсий полезных сигналов величины дисперсий помех. Таким образом, переход к нормированным корреляционным матрицам не дает желаемого эффекта для случая, когда элементы нормированных корреляционных матриц представляют собой оценки зашумленных сигналов, и не обеспечивает адекватность идентификации не только при решении задач статики, но и при решении задач динамики. Очевидно, что в этом случае также возникает необходимость исключения влияния дисперсий помех и получения нормированных корреляционных матриц, аналогичных нормированным корреляционным матрицам полезных сигналов:

$$\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)\approx\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu),\ \vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\mu)\approx\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\mu). \tag{29}$$

РОБАСТНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ УЛУЧШЕНИЯ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ НОРМИРОВАННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ

Рассмотрим робастную технологию устранения влияния погрешностей в виде дисперсий $D^*(\varepsilon_i)$, $D^*(\varphi)$ помех на элементы нормированной корреляционной матрицы при решении задач идентификации статики.

1. Для каждого зашумленного входного $g_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, и выходного $\eta(t)$ сигналов определяем оценки автокорреляционных и взаимно корреляционных функций:

$$\begin{gathered} R_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{g}_j}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overset{\circ}{g}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{g}_j((k+\mu)\Delta t), \\ R_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{\eta}}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overset{\circ}{g}_i(k\Delta t)\,\overset{\circ}{\eta}((k+\mu)\Delta t),\ i,j=\overline{1,n}. \end{gathered} \tag{30}$$

2. Для каждого зашумленного входного $\overset{\circ}{g}_i(t)$ и выходного $\overset{\circ}{\eta}(t)$ сигналов определяем оценки дисперсий помех $D^*(\varepsilon_i)$, $D^*(\varphi)$ [8–11]:

$$D^*(\varepsilon_i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[\overset{\circ}{g}_i(k\Delta t)\overset{\circ}{g}_i(k\Delta t) - 2\overset{\circ}{g}_i(k\Delta t)\overset{\circ}{g}_i((k+1)\Delta t) + \overset{\circ}{g}_i(k\Delta t)\overset{\circ}{g}_i((k+2)\Delta t)], \quad (31)$$

$$D^*(\varphi) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[\overset{\circ}{\eta}(k\Delta t)\overset{\circ}{\eta}(k\Delta t) - 2\overset{\circ}{\eta}(k\Delta t)\overset{\circ}{\eta}((k+1)\Delta t) + \overset{\circ}{\eta}(k\Delta t)\overset{\circ}{\eta}((k+2)\Delta t)]. \quad (32)$$

3. Используя вычисленные оценки дисперсий помех $D^*(\varepsilon_i)$, $D^*(\varphi)$, формируем робастные нормированные корреляционные матрицы

$$\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0) = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(0)}{D_{g_1\varepsilon_1}D_{g_2\varepsilon_2}} & \cdots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_n}(0)}{D_{g_1\varepsilon_1}D_{g_n\varepsilon_n}} \\ \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}_2\overset{\circ}{g}_1}(0)}{D_{g_2\varepsilon_2}D_{g_1\varepsilon_1}} & 1 & \cdots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}_2\overset{\circ}{g}_n}(0)}{D_{g_2\varepsilon_2}D_{g_n\varepsilon_n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}_n\overset{\circ}{g}_1}(0)}{D_{g_n\varepsilon_n}D_{g_1\varepsilon_1}} & \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}_n\overset{\circ}{g}_2}(0)}{D_{g_n\varepsilon_n}D_{g_2\varepsilon_2}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \approx \vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0), \quad (33)$$

$D_{g_i\varepsilon_i} = \sqrt{D(g_i) - D^*(\varepsilon_i)}$;

$$\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0) = \begin{bmatrix} \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{\eta}}(0)}{D_{g_1\varepsilon_1}D_{\eta\varphi}} & \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}_2\overset{\circ}{\eta}}(0)}{D_{g_2\varepsilon_2}D_{\eta\varphi}} & \cdots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}_n\overset{\circ}{\eta}}(0)}{D_{g_n\varepsilon_n}D_{\eta\varphi}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \approx \vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0), \quad (34)$$

где $D_{\eta\varphi} = \sqrt{D(\eta) - D^*(\varphi)}$.

Рассмотрим робастную технологию устранения влияния погрешностей в виде дисперсий $D^*(\varepsilon)$, $D^*(\varphi)$ помех на элементы нормированной корреляционной матрицы при решении задач идентификации динамики.

1. Для зашумленного входного $g(t)$ и выходного $\overset{\circ}{\eta}(t)$ сигналов определяются оценки автокорреляционных и взаимно корреляционных функций:

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overset{\circ}{g}(k\Delta t)\,\overset{\circ}{g}((k+\mu)\Delta t),\ \ R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overset{\circ}{g}(k\Delta t)\,\overset{\circ}{\eta}((k+\mu)\Delta t). \quad (35)$$

2. Для зашумленного входного $\overset{\circ}{g}(t)$ и выходного $\overset{\circ}{\eta}(t)$ сигналов определяются оценки дисперсий помех $D^*(\varepsilon)$, $D^*(\varphi)$ [8–11]:

$$D^*(\varepsilon) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[\overset{\circ}{g}(k\Delta t)\,\overset{\circ}{g}(k\Delta t) - 2\,\overset{\circ}{g}(k\Delta t)\,\overset{\circ}{g}((k+1)\Delta t) + \overset{\circ}{g}(k\Delta t)\,\overset{\circ}{g}((k+2)\Delta t)], \quad (36)$$

$$D^*(\varphi) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[\overset{\circ}{\eta}(k\Delta t)\overset{\circ}{\eta}(k\Delta t) - 2\,\overset{\circ}{\eta}(k\Delta t)\overset{\circ}{\eta}((k+1)\Delta t) + \overset{\circ}{\eta}(k\Delta t)\overset{\circ}{\eta}((k+2)\Delta t)]. \quad (37)$$

3. Формируются робастные нормированные корреляционные матрицы, в ко-

торых исключено влияние помехи на обусловленность матрицы, т.е.

$$\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\Delta t)}{D(g)-D^*(\varepsilon)} & \cdots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}[(N-1)\Delta t]}{D(g)-D^*(\varepsilon)} \\ R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\Delta t) & 1 & \cdots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}[(N-2)\Delta t]}{D(g)-D^*(\varepsilon)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}[(N-1)\Delta t]}{D(g)-D^*(\varepsilon)} & \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}[(N-2)\Delta t]}{D(g)-D^*(\varepsilon)} & \cdots & 1 \end{bmatrix}\approx \vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu), \quad (38)$$

$$\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\mu)=\begin{bmatrix} \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(0)}{D_{g\varepsilon}D_{\eta\varphi}} & \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(\Delta t)}{D_{g\varepsilon}D_{\eta\varphi}} & \cdots & \dfrac{R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}[(N-1)\Delta t]}{D_{g\varepsilon}D_{\eta\varphi}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\approx \vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(\mu). \quad (39)$$

где $D_{g\varepsilon}=\sqrt{D(g)-D^*(\varepsilon)}$.

Из выражений (33), (34), (38), (39) очевидно, что применение робастной технологии устранения влияния дисперсий помех позволяет получить нормированные корреляционные матрицы зашумленных сигналов, аналогичные матрицам, элементы которых не содержат погрешностей от помех.

ТЕХНОЛОГИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Получение робастных нормированных корреляционных матриц при решении задач идентификации статики. Вычислительные эксперименты проводились с помощью MATLAB. Формировались полезные сигналы $X_i(k\Delta t)$, помехи $\varepsilon_i(k\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$, с заданными характеристиками и зашумленные сигналы $g_i(k\Delta t)=X_i(k\Delta t)+\varepsilon_i(k\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$. Затем формировались полезный $Y(k\Delta t)$ и зашумленный $\eta(k\Delta t)$ выходные сигналы: $Y(k\Delta t)=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_iX_i(k\Delta t)$, $\eta(k\Delta t)=Y(k\Delta t)+\varphi(k\Delta t)$, где $\varphi(k\Delta t)$ — помеха с заданными характеристиками. Для каждого полезного сигнала $X_i(t)$ проверялось условие постоянства математического ожидания на различных временны́х интервалах $T_1, T_2, \ldots, T_n$, т.е. выполнение равенства

$$m_{X_k}(T_1)\approx m_{X_k}(T_2)\approx \ldots \approx m_{X_k}(T_n)\approx m_{X_k} \quad (40)$$

или неравенства

$$m_{X_k}(T_1)\neq m_{X_k}(T_2)\neq \ldots \neq m_{X_k}(T_n)\neq m_{X_k}. \quad (41)$$

Затем по выражениям (14)–(17), (33), (34) вычислялись элементы, определители $\Delta_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0), \Delta_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0), \Delta\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)$ и числа обусловленности $H(\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0))$, $H(\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0))$, $H(\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0))$ нормированных корреляционных матриц $\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)$, $\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0)$, $\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0)$, $\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(0)$ полезных и зашумленных сигналов, а также робастных матриц $\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)$, $\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0)$. После этого проводился сравнительный анализ и были определены:

1) величины относительных погрешностей оценок элементов нормированных зашумленной и робастной матриц:

$$\Delta r_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_j}(0) = | r_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_j}(0) - r_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(0) | / | r_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(0) | \cdot 100\ \%,$$
$$\Delta r_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{\eta}}(0) = | r_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{\eta}}(0) - r_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{Y}}(0) | / | r_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{Y}}(0) | \cdot 100\ \%,$$
$$\Delta r^R_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(0) = | r^R_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(0) - r_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(0) | / | r_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(0) | \cdot 100\ \%,$$
$$\Delta r^R_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{Y}}(0) = | r^R_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{Y}}(0) - r_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{Y}}(0) | / | r_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{Y}}(0) | \cdot 100\ \%;$$

2) составлялись матрицы относительных погрешностей элементов нормированных зашумленной и робастной матриц:

$$\Delta \vec{r}_{\overset{\circ}{g} \overset{\circ}{g}}(0) = \| \Delta \vec{r}_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_j}(0) \|,\ \Delta \vec{r}_{\overset{\circ}{g} \overset{\circ}{\eta}}(0) = \| \Delta \vec{r}_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{\eta}}(0) \|,$$
$$\Delta \vec{r}^R_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(0) = \| \Delta \vec{r}^R_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(0) \|,\ \Delta \vec{r}^R_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{Y}}(0) = \| \Delta \vec{r}^R_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{Y}}(0) \|,\ i, j = \overline{1, n};$$

3) вычислялась относительная величина погрешностей значений определителей зашумленной и робастной матриц:

$$p\Delta_{\overset{\circ}{g} \overset{\circ}{g}}(0) = [\Delta_{\overset{\circ}{g} \overset{\circ}{g}}(0) - \Delta_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(0)] / \Delta_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(0) \cdot 100\%,$$
$$p\Delta^R_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(0) = [\Delta^R_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(0) - \Delta_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(0)] / \Delta_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(0) \cdot 100\ \%.$$

Технология проведения вычислительных экспериментов для получения робастных нормированных корреляционных матриц при решении задач идентификации динамики. Формировались полезный сигнал $X(k\Delta t)$ и помеха $\varepsilon(k\Delta t)$ с заданными характеристиками и зашумленный сигнал $g(k\Delta t) = X(k\Delta t) + \varepsilon(k\Delta t)$. Затем по выражениям (20), (21), (23), (24), (38), (39) вычислялись элементы, определители $\Delta_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(\mu)$, $\Delta_{\overset{\circ}{g} \overset{\circ}{g}}(\mu)$, $\Delta^R_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(\mu)$ и числа обусловленности $H(\vec{r}_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(\mu))$, $H(\vec{r}_{\overset{\circ}{g} \overset{\circ}{g}}(\mu))$, $H(\vec{r}^R_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(\mu))$ нормированных матриц $\vec{r}_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(\mu)$, $\vec{r}_{\overset{\circ}{g} \overset{\circ}{g}}(\mu)$ полезного и зашумленного сигналов и робастной матрицы $\Delta \vec{r}^R_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(\mu)$. После этого проводился сравнительный анализ и были вычислены величины относительных погрешностей оценок элементов нормированных зашумленной и робастной матриц:

$$\Delta r_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_j}(\mu) = | r_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_j}(\mu) - r_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(\mu) | / | r_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(\mu) | \cdot 100\ \%,$$
$$\Delta r^R_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(\mu) = | r^R_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(\mu) - r_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(\mu) | / | r_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(\mu) | \cdot 100\ \%;$$

а также составлялись матрицы относительных погрешностей элементов нормированных зашумленной и робастной матриц:

$$\Delta \vec{r}_{\overset{\circ}{g} \overset{\circ}{g}}(\mu) = \| \Delta \vec{r}_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_j}(\mu) \|,\ \Delta \vec{r}^R_{\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}}(\mu) = \| \Delta \vec{r}^R_{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j}(\mu) \|,\ i, j = \overline{1, N}.$$

ТИПЫ ПРОВОДИМЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Вычислительные эксперименты для получения робастных нормированных корреляционных матриц при решении задач идентификации статики. Эксперимент 1. Сформировано три полезных входных сигнала: $X_1(i\Delta t) = 40 \sin(i\Delta t) + 282$, $X_2(i\Delta t) = 50 \sin(i\Delta t - 0.4) + 125$, $X_3(i\Delta t) = 73 \sin(i\Delta t + 039) + 155$ и выходной сигнал $Y(i\Delta t) = 100 + 3x_1(i\Delta t) + 8x_2(i\Delta t) - 5x_3(i\Delta t)$. Помехи $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$, $\varphi(t)$ подчиняются нормальному закону распределения с математическими ожиданиями $m_{\varepsilon_1} \approx m_{\varepsilon_2} \approx m_{\varepsilon_3} \approx m_y \approx 0$ и средними квадратичными отклонениями $\sigma_{\varepsilon_1} \approx 12$,

$\sigma_{\varepsilon_2} \approx 15$, $\sigma_{\varepsilon_3} \approx 13$, $\sigma_y \approx 18$. Для полезных сигналов и помех выполняются классические условия.

Эксперимент 2. Сформировано три полезных входных сигнала: $X_1(i\Delta t) = 40\sin(i\Delta t) + 101$, $X_2(i\Delta t) = 50\sin(i\Delta t - 0.49) + 24\cos(0.78 \cdot i\Delta t) + 119$, $X_3(i\Delta t) = 71\sin(i\Delta t + 0.28) - 44\cos(0.37 \cdot i\Delta t) + 177$ и выходной сигнал $Y(i\Delta t) = 101 + 11x_1(i\Delta t) - 7x_2(i\Delta t) + 6x_3(i\Delta t)$. Помехи подчиняются нормальному закону распределения с $m_{\varepsilon_1} \approx m_{\varepsilon_2} \approx m_{\varepsilon_3} \approx m_y \approx 0$ и $\sigma_{\varepsilon_1} \approx 9$, $\sigma_{\varepsilon_2} \approx 14$, $\sigma_{\varepsilon_3} \approx 23$, $\sigma_y \approx 100$. Для второго и третьего полезных сигналов нарушено условие постоянства математического ожидания (40).

Эксперимент 3. Сформировано три полезных входных сигнала: $X_1(i\Delta t) = 30\sin(i\Delta t) + 12\cos(1.1 \cdot i\Delta t - 1/2) - 34\sin(1.2 \cdot i\Delta t) + 100$, $X_2(i\Delta t) = 51\sin(i\Delta t - 0.5) + 121$, $X_3(i\Delta t) = 70\sin(i\Delta t + 1.3) - 46\cos(0.4 \cdot i\Delta t) + 152$ и выходной сигнал $y(i\Delta t) = 7.5x_1(i\Delta t) - 6x_2(i\Delta t) + 16x_3(i\Delta t)$. Помеха $\varepsilon_1(t)$ подчиняется экспоненциальному закону распределения с $m_{\varepsilon_1} \approx 6.1$ и $\sigma_{\varepsilon_1} \approx 6.4$; $\varepsilon_2(t)$ — гамма-распределению с $m_{\varepsilon_2} \approx 10.5$ и $\sigma_{\varepsilon_2} \approx 5.9$; $\varepsilon_3(t)$ — экспоненциальному закону распределения с $m_{\varepsilon_3} \approx 11.2$ и $\sigma_{\varepsilon_3} \approx 11.7$; $\varphi(t)$ — нормальному закону распределения с $m_\varphi \approx 0$ и $\sigma_\varphi \approx 100$. Для первого и третьего полезных сигналов нарушено условие постоянства математического ожидания (40), для первой, второй и третьей помех нарушены классические условия.

Результаты вычислений для эксперимента 2 представлены в табл. 1. Аналогичные результаты получены и для экспериментов 1, 3.

Таблица 1

Оценки полезного сигнала	Оценки зашумленного сигнала	Робастные оценки
$\vec{r}_{\mathring{X}\mathring{X}}(0) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.8411 & 0.8015 \\ 0.8411 & 1.0000 & 0.5420 \\ 0.8015 & 0.5420 & 1.0000 \end{bmatrix}$	$\Delta\vec{r}_{\mathring{g}\mathring{g}}(0) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.7708 & 0.7137 \\ 0.7708 & 1.0000 & 0.4654 \\ 0.7137 & 0.4654 & 1.0000 \end{bmatrix}$	$\vec{r}^{\,R}_{\mathring{X}\mathring{X}}(0) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.8357 & 0.7842 \\ 0.8357 & 1.0000 & 0.5134 \\ 0.7842 & 0.5134 & 1.0000 \end{bmatrix}$
—	$\Delta\vec{r}_{\mathring{g}\mathring{g}}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 8.37 & 10.96 \\ 8.37 & 0 & 14.12 \\ 10.96 & 14.12 & 0 \end{bmatrix}$	$\vec{r}^{\,R}_{\mathring{X}\mathring{X}}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0.65 & 2.16 \\ 0.65 & 0 & 5.28 \\ 2.16 & 5.28 & 0 \end{bmatrix}$
$\vec{r}_{\mathring{X}\mathring{Y}}(0) = [0.7118\ \ 0.2945\ \ 0.9376]^{\mathrm{T}}$	$\vec{r}_{\mathring{g}\mathring{\eta}}(0) = [0.6584\ \ 0.2608\ \ 0.8505]^{\mathrm{T}}$	$\vec{r}^{\,R}_{\mathring{X}\mathring{Y}}(0) = [0.7011\ \ 0.2788\ \ 0.9213]^{\mathrm{T}}$
—	$\Delta\vec{r}_{\mathring{g}\mathring{\eta}}(0) = [7.4987\ \ 11.4237\ \ 23.8796]^{\mathrm{T}}$	$\Delta\vec{r}^{\,R}_{\mathring{X}\mathring{Y}}(0) = [1.4999\ 5.3250\ 1.7330]^{\mathrm{T}}$
$H(\vec{r}_{\mathring{X}\mathring{X}}(0)) = 32.0105$	$H(\vec{r}_{\mathring{g}\mathring{g}}(0)) = 14.8950$	$H(\vec{r}^{\,R}_{\mathring{X}\mathring{X}}(\mu)) = 30.0786$
$\Delta_{\mathring{X}\mathring{X}}(0) = 0.0871$	$\Delta_{\mathring{g}\mathring{g}}(0) = 0.1920$	$\Delta^{R}_{\mathring{X}\mathring{X}}(0) = 0.096$
—	$p\Delta_{\mathring{g}\mathring{g}}(0) = 120.52\,\%$	$p\Delta^{R}_{\mathring{X}\mathring{X}}(0) = 10.18\,\%$

Вычислительные эксперименты для получения робастных нормированных корреляционных матриц при решении задач идентификации динамики. Входной полезный сигнал $X(t) = 40\sin(0.2\Delta t + 3) + 100$ сформирован в виде суммы гармонических колебаний. Помеха $\varepsilon(t)$ подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием $m_\varepsilon \approx 0$ и средним квадратичным отклонением $\sigma_\varepsilon \approx 12$. Таким образом, для полезного сигнала и помехи выполняются классические условия. Нормированные корреляционные матрицы построены для значений $\mu = 0, 1, \ldots, 8$. В результате вычислений получены следующие матрицы:

$$\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9877 & 0.9511 & 0.8910 & 0.8090 & 0.7071 & 0.5878 & 0.4540 & 0.3090 \\ 0.9877 & 1.0000 & 0.9877 & 0.9511 & 0.8910 & 0.8090 & 0.7071 & 0.5878 & 0.4540 \\ 0.9511 & 0.9877 & 1.0000 & 0.9877 & 0.9511 & 0.8910 & 0.8090 & 0.7071 & 0.5878 \\ 0.8910 & 0.9511 & 0.9877 & 1.0000 & 0.9877 & 0.9511 & 0.8910 & 0.8090 & 0.7071 \\ 0.8090 & 0.8910 & 0.9511 & 0.9877 & 1.0000 & 0.9877 & 0.9511 & 0.8910 & 0.8090 \\ 0.7071 & 0.8090 & 0.8910 & 0.9511 & 0.9877 & 1.0000 & 0.9877 & 0.9511 & 0.8910 \\ 0.5878 & 0.7071 & 0.8090 & 0.8910 & 0.9511 & 0.9877 & 1.0000 & 0.9877 & 0.9511 \\ 0.4540 & 0.5878 & 0.7071 & 0.8090 & 0.8910 & 0.9511 & 0.9877 & 1.0000 & 0.9877 \\ 0.3090 & 0.4540 & 0.5878 & 0.7071 & 0.8090 & 0.8910 & 0.9511 & 0.9877 & 1.0000 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

$$\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.8718 & 0.8357 & 0.7983 & 0.6924 & 0.5925 & 0.5144 & 0.4038 & 0.2841 \\ 0.8718 & 1.0000 & 0.8718 & 0.8357 & 0.7983 & 0.6924 & 0.5925 & 0.5144 & 0.4038 \\ 0.8357 & 0.8718 & 1.0000 & 0.8718 & 0.8357 & 0.7983 & 0.6924 & 0.5925 & 0.5144 \\ 0.7983 & 0.8357 & 0.8718 & 1.0000 & 0.8718 & 0.8357 & 0.7983 & 0.6924 & 0.5925 \\ 0.6924 & 0.7983 & 0.8357 & 0.8718 & 1.0000 & 0.8718 & 0.8357 & 0.7983 & 0.6924 \\ 0.5925 & 0.6924 & 0.7983 & 0.8357 & 0.8718 & 1.0000 & 0.8718 & 0.8357 & 0.7983 \\ 0.5144 & 0.5925 & 0.6924 & 0.7983 & 0.8357 & 0.8718 & 1.0000 & 0.8718 & 0.8357 \\ 0.4048 & 0.5144 & 0.5925 & 0.6924 & 0.7983 & 0.8357 & 0.8718 & 1.0000 & 0.8718 \\ 0.2841 & 0.4048 & 0.5144 & 0.5925 & 0.6924 & 0.7983 & 0.8357 & 0.8718 & 1.0000 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9602 & 0.9205 & 0.8793 & 0.7626 & 0.6526 & 0.5666 & 0.4448 & 0.3128 \\ 0.9602 & 1.0000 & 0.9602 & 0.9205 & 0.8793 & 0.7626 & 0.6526 & 0.5666 & 0.4448 \\ 0.9205 & 0.9602 & 1.0000 & 0.9602 & 0.9205 & 0.8793 & 0.7626 & 0.6526 & 0.5666 \\ 0.8793 & 0.9205 & 0.9602 & 1.0000 & 0.9602 & 0.9205 & 0.8793 & 0.7626 & 0.6526 \\ 0.7626 & 0.8793 & 0.9205 & 0.9602 & 1.0000 & 0.9602 & 0.9205 & 0.8793 & 0.7626 \\ 0.6526 & 0.7626 & 0.8793 & 0.9205 & 0.9602 & 1.0000 & 0.9602 & 0.9205 & 0.8793 \\ 0.5666 & 0.6526 & 0.7626 & 0.8793 & 0.9205 & 0.9602 & 1.0000 & 0.9602 & 0.9205 \\ 0.4448 & 0.5666 & 0.6526 & 0.7626 & 0.8793 & 0.9205 & 0.9602 & 1.0000 & 0.9602 \\ 0.3128 & 0.4448 & 0.5666 & 0.6526 & 0.7626 & 0.8793 & 0.9205 & 0.9602 & 1.0000 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$\Delta\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)=\begin{bmatrix} 0 & 11.7329 & 12.1279 & 10.4079 & 14.4165 & 16.2117 & 12.4847 & 11.0460 & 8.0710 \\ 11.7329 & 0 & 11.7329 & 12.1279 & 10.4079 & 14.4165 & 16.2117 & 12.4847 & 11.0460 \\ 12.1279 & 11.7329 & 0 & 11.7329 & 12.1279 & 10.4079 & 14.4165 & 16.2117 & 12.4847 \\ 10.4079 & 12.1279 & 11.7329 & 0 & 11.7329 & 12.1279 & 10.4079 & 14.4165 & 16.2117 \\ 14.4165 & 10.4079 & 12.1279 & 11.7329 & 0 & 11.7329 & 12.1279 & 10.4079 & 14.4165 \\ 16.2117 & 14.4165 & 10.4079 & 12.1279 & 11.7329 & 0 & 11.7329 & 12.1279 & 10.4079 \\ 12.4847 & 16.2117 & 14.4165 & 10.4079 & 12.1279 & 11.7329 & 0 & 11.7329 & 12.1279 \\ 11.0460 & 12.4847 & 16.2117 & 14.4165 & 10.4079 & 12.1279 & 11.7329 & 0 & 11.7329 \\ 8.0710 & 11.0460 & 12.4847 & 16.2117 & 14.4165 & 10.4079 & 12.1279 & 11.7329 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\Delta \vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)=\begin{bmatrix} 0 & 2.7782 & 3.2133 & 1.3189 & 5.7341 & 7.7115 & 3.6063 & 2.0217 & 1.2551 \\ 2.7782 & 0 & 2.7782 & 3.2133 & 1.3189 & 5.7341 & 7.7115 & 3.6063 & 2.0217 \\ 3.2133 & 2.7782 & 0 & 2.7782 & 3.2133 & 1.3189 & 5.7341 & 7.7115 & 3.6063 \\ 1.3189 & 3.2133 & 2.7782 & 0 & 2.7782 & 3.2133 & 1.3189 & 5.7341 & 7.7115 \\ 5.7341 & 1.3189 & 3.2133 & 2.7782 & 0 & 2.7782 & 3.2133 & 1.3189 & 5.7341 \\ 7.7115 & 5.7341 & 1.3189 & 3.2133 & 2.7782 & 0 & 2.7782 & 3.2133 & 1.3189 \\ 3.6063 & 7.7115 & 5.7341 & 1.3189 & 3.2133 & 2.7782 & 0 & 2.7782 & 3.2133 \\ 2.0217 & 3.6063 & 7.7115 & 5.7341 & 1.3189 & 3.2133 & 2.7782 & 0 & 2.7782 \\ 1.2551 & 2.0217 & 3.6063 & 7.7115 & 5.7341 & 1.3189 & 3.2133 & 2.7782 & 0 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Значения чисел обусловленности, а также определителей нормированных матриц $\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$, $\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ полезного и зашумленного сигналов и робастной матрицы $\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$ следующие:

$$H(\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)) = 2.363\,\mathrm{e}+017,\ H(\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)) = 113.7091,\ H(\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)) = 1.0025\,\mathrm{e}+004, \quad (47)$$

$$\Delta_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu) = 2.2451\,\mathrm{e}-118,\ \Delta_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu) = 3.7163\,\mathrm{e}-007,\ \Delta^{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu) = 1.1350\,\mathrm{e}-012. \quad (48)$$

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Анализ результатов вычислительных экспериментов для получения робастных нормированных корреляционных матриц при решении задач идентификации статики. 1. Элементы нормированной матрицы зашумленных сигналов сильно отличаются от элементов матрицы полезных сигналов (см. табл. 1, строки 1, 3 столбцы 1, 2):

$$r_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{g}_j}(0) \neq r_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_j}(0),\ r_{\overset{\circ}{g}_i\overset{\circ}{\eta}}(0) \neq r_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{Y}}(0),\quad i, j = \overline{1, n}.$$

Однако робастные элементы матрицы зашумленных сигналов соизмеримы с элементами матрицы полезных сигналов (табл. 1, строки 1, 3 столбцы 1, 3):

$$r^{R}_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_j}(0) \approx r_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_j}(0),\ r^{R}_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{Y}}(0) \approx r_{\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{Y}}(0),\ i, j = \overline{1, n}.$$

2. Элементы матрицы $\Delta\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0)$ относительных погрешностей зашумленных входных сигналов варьируют от 0 % до 14.12 %, а элементы вектор-столбца $\Delta\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{\eta}}(0)$ относительных погрешностей — от 7.5 % до 23.9 % (табл. 1, строки 2, 4, столбец 2). Элементы же матрицы $\Delta\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)$ относительных погрешностей матрицы $\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)$ входных сигналов колеблются всего лишь в пределах от 0 % до 5.28 %, а элементы вектор-столбца $\Delta\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}(0)$ — от 1.5 % до 5.3 % (табл. 1, строки 2, 4, столбец 3).

3. Значение числа обусловленности матрицы зашумленных сигналов значительно отличается от значения числа обусловленности матрицы полезных сигналов, т.е. $H(\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0)) \neq H(\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0))$. Значение числа обусловленности робастной нормированной матрицы практически совпадает со значением числа обусловленности матрицы полезных сигналов (см. табл. 1, строка 5, столбцы 1–3), т.е. $H(\vec{r}^{\,R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)) \approx H(\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0))$.

4. Значение определителя нормированной матрицы зашумленных сигналов сильно отличается от значения определителя матрицы полезных сигналов (см. табл. 1, строка 6, столбцы 1, 2), т.е. $\Delta_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0) \neq \Delta_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)$. Значение же определителя робастной матрицы практически совпадает со значением определителя матрицы полезных сигналов (см. табл. 1, строка 6, столбцы 1, 3), т.е. $\Delta^{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0) \approx \Delta_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)$. Значение относительной погрешности определителя нормированной корреляционной матрицы зашумленных сигналов намного превосходит значение относительной погрешности определителя робастной матрицы (см. табл. 1, строка 7, столбцы 2, 3), т.е. $p\Delta_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0) >> p\Delta^{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(0)$.

Таким образом, применение разработанной робастной технологии при решении задачи идентификации статики для случая, когда элементы нормированных корреляционных матриц представляют собой оценки зашумленных сигналов, позволяет получить нормированные корреляционные матрицы, для которых выполняются равенства (18).

Анализ вычислительных экспериментов для получения робастных нормированных корреляционных матриц при решении задач идентификации динамики. 1. Элементы нормированной матрицы зашумленных сигналов (43) сильно отличаются от элементов матрицы полезных сигналов (42), т.е. $\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu) \neq \vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$. Но при этом робастные оценки элементов нормированной корреляционной матрицы зашумленных сигналов (44) соизмеримы с оценками элементов матрицы полезных сигналов (42): $\vec{r}^{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu) \approx \vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$.

2. Элементы матрицы относительных погрешностей матрицы зашумленного входного сигнала (45) варьируют от 0 % до 16.21 %. Элементы же матрицы относительных погрешностей робастной матрицы входного сигнала (46) варьируют всего лишь в пределах от 0 % до 7.7 %.

3. Значение числа обусловленности нормированной корреляционной матрицы зашумленного сигнала значительно отличается от значения числа обусловленности матрицы полезного сигнала (см. формулу (47)), т.е. $H(\vec{r}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)) \neq H(\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu))$.

Значение числа обусловленности робастной нормированной матрицы практически совпадает со значением числа обусловленности матрицы полезных сигналов (см. формулу (47)), т.е. $H(\vec{r}^{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)) \approx H(\vec{r}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu))$.

4. Значение определителя $\Delta_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ нормированной матрицы зашумленных сигналов сильно отличается от значения определителя $\Delta_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$ матрицы полезных сигналов (см. формулу (48)). Значение определителя $\Delta^{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$ робастной нормированной матрицы ближе к значению определителя матрицы полезных сигналов (см. формулу (48)), даже несмотря на то, что значение определителя практически равно нулю.

Таким образом, применение разработанной робастной технологии при решении задачи идентификации динамики для случая, когда элементы нормированных корреляционных матриц представляют собой оценки зашумленных сигналов, позволяет получить нормированные корреляционные матрицы, для которых выполняются равенства (29).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования показали, что широко применяемая в настоящее время технология устранения влияния помехи на элементы корреляционных матриц путем нормирования оценок ее элементов не всегда дает желаемые результаты. При решении реальных прикладных задач, в частности статики и динамики, для случая, когда исходные данные представляют собой зашумленные сигналы, не удается получить адекватные результаты. В настоящей работе предложенная технология позволяет в процессе формирования элементов нормированных корреляционных матриц устранить влияние помех путем вычитания значений их дисперсий из подкоренных значений знаменателей. Многочисленные вычислительные эксперименты, часть которых приведена в работе, подтверждают возможность получения корреляционных матриц зашумленных сигналов, аналогичных корреляционным матрицам полезных сигналов. Это открывает более широкие возможности для эффективного использования технологии предобусловливания для последующего решения как задач статики, так и динамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aliev T.A., Musaeva N.F., Sattarova U.E. Robust technologies for calculating normalized correlation functions // Cybernetics and Systems Analysis. — 2010. — **46**, N 1. — P. 153–166.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974. — 288 с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
4. Солодовников В.В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. — М.: Физматгиз, 1960. — 665 с.
5. Aliev T. Digital noise monitoring of defect origin. — London: Springer-Verlag, 2007. — 235 p.
6. Aliev T. Robust technology with analysis of interference in signal processing. — New York: Kluwer Academ./Plenum Publ., 2003. — 199 p.
7. Алиев Т.А., Амиров З.А. Алгоритм выбора параметров регуляризации при статистической идентификации // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 6. — С. 130–139.
8. Алиев Т.А., Мусаева Н.Ф. Алгоритмы определения дисперсии и погрешностей, вызываемых помехами случайных сигналов // Автометрия. — 1997. — № 3. — С. 80–92.
9. Aliev T.A., Musaeva N.F. An algorithm for eliminating microerrors of noise in the solution of statistical dynamics problems // Automation and Remote Contr. — 1998. — **59**, N 5. — P. 679–688.
10. Musaeva N.F. Methodology of calculating robustness as an estimator of the statistical characteristics of a noisy signal // Automatic Contr. and Comput. Sci. — 2005. — **39**, N 5. — P. 53–62.
11. Musaeva N.F. Robust correlation coefficients as initial data for solving a problem of confluent analysis // Ibid. — 2007. — **41**, N 2. — P. 76–87.
12. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. — Л.: Энергия, 1967. — 431 с.

Поступила 25.06.2009
После доработки 17.05.2010