УДК 519.6

О.Н. ЛИТВИН, А.В. ТКАЧЕНКО, О.О. ЛИТВИН

ОБЩИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ В НЕЯВНОЙ ФОРМЕ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРЛИНАЦИИ И ИНТЕРФЛЕТАЦИИ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: *интерлинация, интерфлетация, R-функции, нормальные уравнения, неявные уравнения.*

Введение. В работе [1] рассмотрены методы аппроксимации функций многих переменных с использованием методов интерлинации и интерфлетации функций и некоторые их применения в современных компьютерных технологиях. В настоящей статье исследуются методы аппроксимации функций двух и трех переменных с целью построения уравнений составных линий и поверхностей в неявной форме с использованием функций, принадлежащих к заданному классу дифференцированности. Задачи построения неявных уравнений поверхностей и кривых находят широкое применение на практике (например, при использовании вариационных методов для решения стационарных и нестационарных краевых задач с двумя и тремя пространственными переменными). Построение уравнений поверхностей в неявной форме с возможностью выбора параметров модели поверхности позволяет получить математические модели поверхностей с заведомо заданными свойствами. Например, построение математических моделей аэродинамических поверхностей с учетом не только геометрических свойств (непрерывность производных до некоторого порядка), но и физических свойств поверхностей, таких как теплопроводность, прочность и др. [2, 3]. Поэтому целесообразным является решение этих вопросов с использованием математической модели поверхности посредством выбора ее параметров с помощью некоторых критериев.

Подобный подход является целесообразным при построении математических моделей аэродинамических поверхностей [2, 3].

Актуальность темы. Одним из наиболее сложных этапов при построении математических моделей кривых и поверхностей в неявной форме является обеспечение условия непрерывности производных заданных порядков. Поэтому актуальной является задача построения и исследование математических моделей линий и поверхностей в неявной форме, которые допускают удовлетворение данным требованиям.

Существующие методы решения поставленной задачи. Неявная форма задания линий и поверхностей имеет соответственно вид

$$F(x, y) = 0\,,\ (x, y) \in D_{xy}\,,\ F(x, y, z) = 0\,,\ (x, y, z) \in D_{xyz}\,.$$

Среди аналитических методов описания линий и поверхностей в неявной форме наиболее общим есть метод *R*-функций В.Л. Рвачева [3].

Этот метод с помощью известных уравнений

$$\omega_i(x, y) = 0\,,\ i = \overline{1, N},$$

указанных частей линий и логической функции $F(u_1, u_2, \ldots u_N, \wedge, \vee, \neg)$, которая описывает область, ограниченную данной кривой с помощью логических операций конъюнкции $\wedge$, дизъюнкции $\vee$, отрицания $\neg$ и *R*-функций $u \wedge_\alpha v$, $u \vee_\alpha v$, $-u$, $0 < \alpha \le 1$, разрешает получать необходимое уравнение линии в виде $F(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_N, \wedge_\alpha, \vee_\alpha, -) = 0$. Недостаток этого метода состоит в том, что полученная таким образом функция $F(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_N, \wedge_\alpha, \vee_\alpha, -) = F(x, y)$ в угловых точках является недифференцируемой.

Аналогичная ситуация возникает при построении неявных уравнений поверхностей.

Метод R -функций позволяет с помощью известных уравнений $w_i(x, y, z) = 0$, $i = \overline{1, N}$, частей Γ_k, $k = \overline{1, N}$, поверхности Γ и логической функции $F(u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_N, \wedge, \vee, \neg)$, которая описывает область тела с данной поверхностью Γ, с помощью логических операций конъюнкции, дизъюнкции, отрицания $\wedge, \vee, \neg$ и R-функций $u \wedge_\alpha v$, $u \vee_\alpha v, -u$ получать уравнение поверхности Γ в виде $F(w_1, w_2, \ldots$ $\ldots, w_N, \wedge_\alpha, \vee_\alpha, \neg) = 0$.

Недостаток этого метода заключается в том, что полученная функция $F(w_1, w_2, \ldots, w_N, \wedge_\alpha, \vee_\alpha, \neg) = 0$ на ребрах поверхности и в ее угловых точках является недифференцированной. Это означает, что важным при использовании таких функций в задачах является условие, чтобы приближающая функция имела непрерывные производные 1-го, 2-го, 3-го порядков и выше. А это требует дополнительных исследований.

Указанные недостатки можно успешно преодолеть с помощью интерлинации и интерфлетации функций [5–7]. При этом математическая модель линий и поверхностей сохраняет непрерывность производных до заданного порядка независимо от выбора достаточного (для нужной точности приближения) количества параметров в формуле интерлинации или интерфлетации.

Цель данной работы — построение уравнения кривой Γ: $f(x, y) = 0$ в неявной форме $F_{ap}(x, y) = 0$ на основе использования интерлинации неизвестной функции двух переменных $f(x, y)$. При этом функция $F_{ap}(x, y)$ имеет наименьшее среднеквадратичное отклонение от нормальной функции $F_n(x, y) = \min\limits_{(\zeta, \eta) \in \Gamma} \sqrt{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2}$ кривой Γ и принадлежит к заданному классу $C^r(D), r = 0,1 \ldots$ Критерий выбора параметров, которые входят в $F_{ap}(x, y)$, может быть другим. Например, можно минимизировать среднеквадратичное отклонение $F_{ap}(x, y)$ от функции $F(x, y)$, построенной с помощью R-функций. Для построения математической модели поверхности трехмерного тела в неявной форме с сохранением нужного класса дифференцируемости используется сплайн-интерфлетация функций трех переменных с минимизацией отклонения искомой функции от заданной (при том или ином критерии оптимизации). Входными данными для описания являются уравнения частей поверхностей, которые принадлежат исследуемой поверхности.

В результате получается математическая модель поверхности в виде $F_{ap}(x, y, z) = 0$, которая является наилучшим среднеквадратичным приближением к функции $f(x, y, z) \in C(\overline{G})$, построенной с помощью R-функций.

Неявные уравнения линий. Будем считать, что $D \subset R^2$ — область на плоскости, граница которой Γ является объединением дуг известных кривых. Для упрощения изложения материала предположим, что область D полностью размещена в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$. Разобьем D на подобласти прямыми

$$x = x_k\,,\; k = \overline{0, M_1}\,,\; y = y_l\,,\; l = \overline{0, M_2}\,,$$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{M_1} = b\,;\; c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{M_2} = d\,.$$

Предположим, что в результате D разобьется на прямоугольники

$$R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset D$$

или четырехугольники

$$R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \subset D\,,\quad R_{i,j}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j(x), y_{j+1}] \subset D\,,$$

$$R_{i,j}^{(3)} = [x_i(y), x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset D\,,\quad R_{i,j}^{(4)} = [x_i, x_{i+1}(y)] \times [y_j, y_{j+1}] \subset D\,,$$

в которых три прямые параллельны осям координат, а одна – криволинейная сторона, которая является частью границы Γ области D. Кроме того, подобласти, на которые разбивается область D, могут быть треугольниками

$$T_{i,j}^{(1)} = \{(x, y) \mid y \ge y_j,\ y \le \eta_{j+1}(x),\ \frac{d\eta_{j+1}(x)}{dx} < 0,\ x_i \le x \le x_{i+1}\},$$

$$T_{i,j}^{(2)} = \{(x, y) \mid y \ge y_j,\ y \le \eta_{j-1}(x),\ \frac{d\eta_{j-1}(x)}{dx} > 0,\ x_i \le x \le x_{i+1}\},$$

$$T_{i,j}^{(3)} = \{(x, y) \mid y \ge y_j,\ y \le \eta_{j+1}(x),\ \frac{d\eta_{j+1}(x)}{dx} > 0,\ x_{i-1} \le x \le x_i\},$$

$$T_{i,j}^{(4)} = \{(x, y) \mid y \le y_j,\ y \ge \eta_{j-1}(x),\ \frac{d\eta_{j-1}(x)}{dx} < 0,\ x_{i-1} \le x \le x_i\},$$

в которых одна из сторон является криволинейной частью границы Γ.

Изложим общий алгоритм построения оператора $O_D f(x, y) \in C^r(\overline{D})$, который интерлинирует функцию $f(x, y)$ на линиях ректангуляции $x = x_k,\ k = \overline{1, M}$, $y = y_l$, $l = \overline{1, N}$, и удовлетворяет условию $O_D f(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Gamma$. Сформулируем алгоритм построения оператора $O_D f(x, y)$ по шагам.

Шаг 1. Предположим, что функции одной переменной $\psi_{i,s}(y)$, $\varphi_{j,p}(x)$, $i \in \overline{0, M_1}$, $j \in \overline{0, M_2}$, $s, p \in \overline{0, r}$, являются следами неизвестной функции $f(x, y)$ и ее частных производных на линиях $x = x_i$, $i = \overline{1, M}$, и $y = y_j$, $j = \overline{1, N}$, соответственно и входят в операторы интерлинации $OR_{i,j} f(x, y)$ для функции $f(x, y)$ на прямоугольниках и в операторы интерлинации $OT_{i,j} f(x, y)$ для функции $f(x, y)$ на треугольниках. В результате получим функцию $O_D f(x, y)$, которая будет точно равной нулю на границе Γ области D. Следы неизвестной функции $O_D f(x, y)$ и ее производные $\varphi_{i,s}(y)$, $\psi_{j,p}(x)$ в узловых точках должны удовлетворять условиям

$$\exists f_{i,j,s,p} \in R : \varphi_{i,s}^{(p)}(y_j) = \psi_{j,p}^{(s)}(x_i) = f_{i,j,s,p},\ i = \overline{1, M},\ j = \overline{1, N};\ s, p = \overline{0, r}, \quad (1)$$

$$\varphi_{i,s}(y) = \frac{\partial^s O_D f}{\partial x^s}(x_i, y),\ i = \overline{1, M},$$
$$\psi_{j,p}(x) = \frac{\partial^p O_D f}{\partial y^p}(x, y_j),\ j = \overline{1, N};\ s, p = \overline{0, r}. \quad (2)$$

Шаг 2. Положим

$$O_D f(x, y) = O_D f(x, y, \{f_{i,j,s,p}\}) = \begin{cases} OR_{i,j}\ f(x, y), (x, y) \in \Pi_{i,j}, \\ OT_{i,j}\ f(x, y), (x, y) \in T_{i,j}, \\ 0, (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

Шаг 3. Подставляем в формулу $O_D f(x, y)$ нули вместо следов функции $f(x, y)$ в точках границы $(x, y) \in \Gamma$.

Шаг 4. Неизвестные функции $\varphi_{i,s}(y)$, $\psi_{j,p}(x)$, $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$, $0 \le s,\ p \le n$, заменяем интерполяционными полиномами или сплайнами $s2_{i,s}(y)$, $s1_{j,p}(x)$, $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$, $0 \le s$, $p \le r$, соответствующей степени с обеспечением выполнения условий (1), а также условия

$$O_D f(x, y) \in C^r(D),\ r \ge 1, \quad (3)$$

и условия

$$O_D f(x, y) = 0\,,\ (x, y) \in \Gamma \tag{4}$$

и выбираем неизвестные постоянные $\{f_{k,l,s,\,p}\}$ из условия минимума функционала

$$J(f) = \iint\limits_D (\omega_\Gamma(x, y) - O_D(x, y, \{f_{i,\,j,\,s,\,p}\}))^2 dxdy \to \min_{f_{i,\,j,\,s,\,p}}\,,$$

где $\omega_\Gamma(x, y) = 0$ – нормальное уравнение кривой Γ, или уравнение кривой Γ, построенное с помощью R-функций.

Теорема 1. Существуют функции $\varphi_{i,s}(y), \psi_{j,\,p}(x)$, $i = \overline{1, M_1}$, $j = \overline{1, M_2}$, $0 \le s$, $p \le r$, постоянные $f_{i,\,j,s,\,p}$, которые удовлетворяют условиям (1), (2), а также оператор $O_D f(x, y)$, определенный выше, удовлетворяющий условиям

$$\left.\frac{\partial^s O_D(x, y)}{\partial x^s}\right|_{x = x_i} = \varphi_{i,s}(y)\,,\ i = \overline{1, M_1}\,;\ s = \overline{0, r}\,,$$

$$\left.\frac{\partial^p O_D(x, y)}{\partial y^p}\right|_{y = y_j} = \psi_{j,\,p}(x)\,,\ j = \overline{1, M_2}\,;\ p = \overline{0, r},$$

и условиям (3), (4) независимо от выбора постоянных $f_{i,\,j,s,\,p}$ и функций $\varphi_{i,s}(y)$, $\psi_{j,\,p}(x)$ в других точках.

Доказательство выполнения условия (3) следует из того, что в каждом элементе разбивки $\mathbf{\Pi}_{i,j}$, $\mathbf{T}_{i,j}$ функция $O_D f(x, y)$ равна функции, построенной с помощью интерлинации, которая имеет на границе с соседними элементами одинаковые следы и одинаковые следы производных до порядка r включительно.

Доказательство выполнения условия (4) следует из того, что в приграничных элементах разбивки в соответствующих формулах интерлинации положены следы функции, равные нулю.

Неявные уравнения поверхностей. В работах О.Н. Литвина и Л.И. Гулик (например, [8]) предложен метод точного удовлетворения граничным условиям (вообще говоря, неоднородным) на границах трехмерных областей составной формы, ограниченных частями известных поверхностей. Этот метод применим при построении неявных уравнений поверхностей составной формы.

Опишем алгоритм построения функции $O_G(x, y, z) \in C^r(\overline{G})$, которая входит в уравнение $O_G(x, y, z) = 0$ — границы ∂G трехмерной области $G \subset R^3$, ограниченной частями известных поверхностей. Алгоритм целесообразно разбить на шаги. Не уменьшая общности, будем считать, что $G \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

Шаг 1. Разобьем область G на подобласти плоскостями $x = x_i, i = \overline{0, m_1}$; $y = y_j$, $j = \overline{0, m_2}$; $z = z_k$, $k = 0, m_3$, параллельными координатным,

$$a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m_1} = b_1;\ a_2 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m_2} = b_2;$$

$$a_3 = z_0 < z_1 < \ldots < z_{m_3} = b_3\,.$$

Исследуем подобласти следующих типов:

— параллелепипеды $\Pi_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$;

— параллелепипеды $\widetilde{\Pi}_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}(x, y)]$ с одной криволинейной гранью, которая является частью границы ∂G области G; таких параллелепипедов для каждой точки $A_{i,j,k}(x_i, y_j, z_k)$ может быть шесть (при определенном размещении криволинейной грани);

— пирамиды (симплексы) T_{ijk} с одной криволинейной гранью, которая является частью границы ∂G области G; таких пирамид для каждой приграничной точки $A_{i,j,k}$ может быть восемь (при определенном размещении криволинейной грани), например,

$$T_{i,j,k}^{(1)} = \{(x, y) \mid x_i \le x \le x_{i+1},\ y_j \le y \le \eta_{j+1}(x),\ \eta'_{j+1}(x) < 0,\ z_k \le z \le z_{k+1}(x, y)\},$$

$$T_{i,j,k}^{(2)} = \{(x, y) \mid x_i \le x \le x_{i+1},\ y_j \le y \le \eta_{j+1}(x),\ \eta'_{j+1}(x) < 0,\ z_k(x, y) \le z \le z_{k+1}\};$$

— цилиндрическая область $C_{i,j,k}$, боковая поверхность которой состоит из двух граней: перпендикулярных плоскостей, параллельных соответствующим двум координатным плоскостям, и одной криволинейной грани, являющейся частью границы. Две основы задаются плоскостями, параллельными третьей координатной плоскости. Таких цилиндров для каждой приграничной точки $A_{i,j,k}$ может быть восемь, и отличаются они размещением криволинейной грани. Например,

$$C_{i,j,k}^{(1)} = \{(x, y, z):\ x_i \le x \le x_{i+1};\ y_j \le y \le y_{j+1}(x),\ y_{j+1}(x_i) = y_{j+1},$$
$$y_{j+1}(x_{j+1}) = y_{j+1};\ z_k \le z \le z_{k+1}\};$$

$$C_{i,j,k}^{(2)} = \{(x, y, z):\ x_i \le x \le x_{i+1};\ y_j(x) \le y \le y_{j+1},$$
$$y_j(x_i) = y_j,\ y_j(x_{i+1}) = y_j,\ z_k \le z \le z_{k+1}\}.$$

Допустим, что $u(x, y, z) \in C^{r,r,r}(\overline{G})$ — некоторая неизвестная функция и $u(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in \partial G$, $grad u(x, y, z) \ne 0$, $(x, y, z) \in \partial G$.

Пусть $u_{i,s}(y, z) = u^{(s,0,0)}(x_i, y, z)$, $v_{j,p}(x, z) = u^{(0,p,0)}(x, y_j, z)$, $w_{k,q}(x, y) = = u^{(0,0,q)}(x, y, z_k)$, $i = \overline{0, M_1}$, $j = \overline{0, M_2}$, $k = \overline{0, M_3}$; $0 \le s, p, q \le r$, — следы функции на плоскостях $x = x_i$, $y = y_j$, $z = z_k$ соответственно. Эти следы (неизвестные) должны удовлетворять в точках пересечения трех плоскостей (x_i, y_j, z_k) либо на линиях пересечения двух из указанных плоскостей условиям С.М. Никольского. Эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы написанные выше следы обеспечивали включение $u(x, y, z) \in C^{r,r,r}(\overline{G})$.

Шаг 2. Строим интерфлетанты четырех типов:

$$O\Pi_{ijk}(x, y, z),\ (x, y, z) \in \Pi_{ijk},\ O\widetilde{\Pi}_{ijk}(x, y, z),\ (x, y, z) \in \widetilde{\Pi}_{ijk},$$

OT_{ijk}, $(x, y, z) \in T_{ijk}$, $OC_{ijk}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in C_{ijk}$ со свойствами

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p} O\Pi_{ijk}(x, y, z) = \frac{\partial^p}{\partial t^p} u(x, y, z),\ (x, y, z) \in \partial\Pi_{ijk},\ t \in \{x, y, z\},$$

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p} O\widetilde{\Pi}_{ijk}(x, y, z) = \frac{\partial^p}{\partial t^p} u(x, y, z),\ (x, y, z) \in \partial\widetilde{\Pi}_{ijk},\ t \in \{x, y, z\},$$

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p} OT_{ijk}(x, y, z) = \frac{\partial^p}{\partial t^p} u(x, y, z),\ (x, y, z) \in \partial T_{ijk},\ t \in \{x, y, z\},$$

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p} OC_{ijk}(x, y, z) = \frac{\partial^p}{\partial t^p} u(x, y, z),\ (x, y, z) \in \partial C_{ijk},\ t \in \{x, y, z\},$$

$$0 \le p \le r.$$

Шаг 3. Строим оператор Ou в виде

$$O_G u(x,y,z)=\begin{cases} O\Pi_{ijk}(x,y,z),(x,y,z)\in\Pi_{ijk},\\ O\widetilde{\Pi}_{ijk}(x,y,z),(x,y,z)\in\widetilde{\Pi}_{ijk},\\ OT_{ijk}(x,y,z),(x,y,z)\in T_{ijk},\\ OC_{ijk}(x,y,z),(x,y,z)\in C_{ijk}.\end{cases}$$

Теорема 2. Для каждой функции $u(x,y,z)\in C^{r,r,r}(\overline{G})$, $r=0,1,\dots$, оператор $Ou(x,y,z)$ имеет свойства

$$Ou(x,y,z)\in C^{r,r,r}(\overline{G})\ \forall u(x,y,z)\in C^{r,r,r}(\overline{G}),$$

$$Ou(x,y,z)=u(x,y,z),\ (x,y,z)\in\partial G,$$

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p}Ou(x,y,z)=\frac{\partial^p}{\partial t^p}u(x,y,z),\ (x,y,z)\in GXYZ,\ t\in\{x,y,z\},\ p=\overline{0,r},$$

$$GXYZ=\{(x,y,z): x=x_i,\ i=\overline{0,M_1};\ y=y_j,\ j=\overline{0,M_2};\ z=z_k,\ k=\overline{0,M_3}\}.$$

Таким образом, операторы $Ou(x,y,z)$ и их несмешанные производные до порядка r совпадают с функцией $u(x,y,z)$ и ее несмешанными производными до порядка r на плоскостях $x=x_i$, $i=0\dots M_1$; $y=y_j$, $j=0\dots M_2$; $z=z_k$, $k=0\dots M_3$, и на границе ∂G трехмерной области G. Если строим уравнение поверхности ∂G в виде $O_G f(x,y,z)=0$, то в формуле $O_G f(x,y,z)$ следы функции $O_G f(x,y,z)$ на границе ∂G следует положить равными нулю. В результате получим формулу $O_G u(x,y,z)$, которая точно удовлетворяет условию $O_G u(x,y,z)=0$, $(x,y,z)\in\partial G$ независимо от выбора следов, которые должны удовлетворять условиям

$$u_{i,s}(y,z)=\left.\frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right|_{x=x_i},\ v_{j,p}(x,z)=\left.\frac{\partial^q f}{\partial y^q}\right|_{y=y_i},\ w_{k,q}(x,y)=\left.\frac{\partial^s f}{\partial z^s}\right|_{z=z_k},$$

$$\left.\frac{\partial^p u_{i,s}(y,z)}{\partial y^p}\right|_{y=y_j}=\left.\frac{\partial^s v_{j,p}(x,z)}{\partial x^s}\right|_{x=x_i},\ \left.\frac{\partial^q u_{i,s}(y,z)}{\partial z^q}\right|_{z=z_k}=\left.\frac{\partial^s w_{k,q}(x,y)}{\partial x^s}\right|_{x=x_i},$$

$$\left.\frac{\partial^q v_{i,p}(x,z)}{\partial z^q}\right|_{z=z_k}=\left.\frac{\partial^p w_{k,q}(x,y)}{\partial y^p}\right|_{y=y_j},$$

$$\left.\frac{\partial^{q+s}u_{i,s}(y,z)}{\partial y^q\partial z^s}\right|_{y=y_j,\,z=z_k}=\left.\frac{\partial^{p+s}v_{jq}(x,z)}{\partial x^p\partial z^s}\right|_{x=x_i,\,z=z_k},$$

$$0\le s,p,q\le r;$$

$$u_{i,s}(y,z)=0,\ ((x_i,y,z)\in\partial G);\ v_{j,p}(x,z)=0,\ ((x,y_j,z)\in\partial G);$$

$$w_{k,q}(x,y)=0,\ ((x,y,z_k)\in\partial G).$$

Следы $u_{i,s}$, $v_{j,p}$, $w_{k,q}$ являются неизвестными. Их выбор может быть подчинен некоторому критерию. Будем требовать, чтобы этот выбор удовлетворял условию

$$\iiint_G(\omega(x,y,z)-O_G u(x,y,z))^2dxdydz\to\min_{u_{i,s},v_{j,p},w_{k,q}},$$

где $\omega(x, y, z) = 0$ — нормальное уравнение границы области G, или уравнение границы ∂G области G, построенное с помощью R-функций.

Пример 1. Применим рассмотренную выше теорию для построения функции $f(x, y, z)$, которая в точках границы квадрата $[x0, x1] \times [y0, y1]$ равна нулю и является дифференцируемой во всех точках функцией двух переменных. Функция является среднеквадратичным приближением к функции $\omega(x, y)$, при этом $\omega(x, y) = 0$ — уравнение границы квадрата, построенной с помощью R-функций. Построение границы квадрата проводилось в среде программы MathCAD.

На рис. 1, *а* изображен график функции $F_{ap}(x, y, d)$, которая имеет непрерывные частные производные первого порядка и в которой вектор параметров d найден из условия наилучшего среднеквадратичного приближения к функции $\omega(x, y)$, построенной с помощью R-функций.

На рис. 1, *б* изображен график функции $\omega(x, y)$, построенной с помощью R-функций. Функция $\omega(x, y)$ не имеет непрерывных частных производных первого порядка в угловых точках.

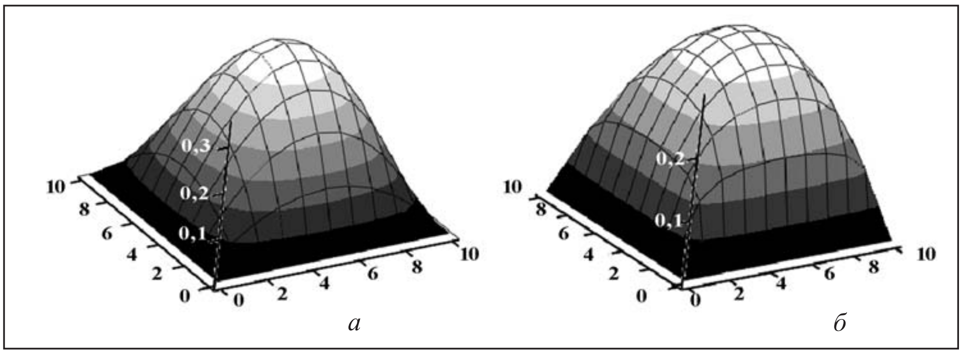

Рис. 1. Графики функции $F_{ap}(x, y, d) \in C^1(\overline{G})$ (*а*) и функции $\omega(x, y) \in C(\overline{D})$ (*б*)

Заключение. Рассмотрен общий метод построения уравнений кривых составной формы в неявном виде $\Gamma : O_D(x, y) = 0$, который использует интерлинацию функций. При этом $O_D(x, y) > 0$, $(x, y) \in D$; $O_D(x, y) \in C^r(\overline{D})$, $r = 1,2, \ldots$ Функция $O_D(x, y)$ является наилучшим среднеквадратичным приближением к функции $\omega(x, y) \in C(\overline{D})$, которая входит в нормальное уравнение этой кривой Γ или в уравнение, построенное с помощью R-функций.

Предложен общий метод построения неявных уравнений $O_G(x, y, z) = 0$ поверхностей составной формы с использованием интерфлетации функций. Функция $O_G(x, y, z) \in C^r(\overline{G})$, $r \geq 1$, является наилучшим среднеквадратичным приближением к функции $f(x, y, z) \in C(\overline{G})$, которая входит в нормальное уравнение ∂G, или к функции $f(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in \partial G$, построенной с помощью R-функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Литвин О.Н. Методы вычислений, ориентированные на современные компьютерные технологии // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 1. — С. 56–72.
2. Снигирев В.Ф. К задаче аналитического построения поверхностей летательных аппаратов // Изв. вузов. Авиационная техника. — 1983. — № 4. — С. 100–102.
3. Снигирев В.Ф. Применение функциональных сплайнов для построения поверхностей летательных аппаратов // Там же. — 1984. — № 4. — С. 77–80.
4. Рвачев В.Л. Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. — К.: Научная мысль, 1986. — 555 с.
5. Литвин О.М. Інтерлінація функцій і деякі її застосування. — Харків: Основа, 2002. — 544 с.
6. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи. — К.: Наук. думка, 2005. — 333 с.
7. Литвин О.М. Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В.Л. Рвачова // Математичні методи і фізико-механічні поля. — 2007. — **50**, № 4. — С. 25–35.
8. Гулик Л.И., Литвин О.Н. Интерфлетация функций трех переменных на пирамиде с одной криволинейной гранью // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 6. — С. 32–49.

Поступила 10.09.2010