УДК 519.85+532.542

С.П. ЕПИФАНОВ, В.И. ЗОРКАЛЬЦЕВ

ЗАДАЧА ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ С НЕФИКСИРОВАННЫМИ РАСХОДАМИ В УЗЛАХ

Ключевые слова: *задача потокораспределения, гидравлические цепи, исходная и двойственная задачи оптимизации.*

В теории гидравлических цепей [1–3] исследуются математические модели функционирования различных гидравлических систем, в том числе систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. В ней традиционно рассматривается следующая задача потокораспределения, которую назовем классической. Заданы расходы транспортируемой среды в узлах, поставляемые извне в систему или вовне из системы (для краткости — расходы в узлах), и приращения давления на дугах графа гидравлической цепи. Переменными (расчетными) величинами являются давление в узлах, потери давления на дугах, потоки среды на дугах (объемы транспортируемой среды в единицу времени, для краткости — расходы среды на дугах).

Наряду с указанной задачей интерес представляют и другие задачи потокораспределения. Основной предмет исследования данной статьи — неклассическая задача потокораспределения, у которой расходы среды в некоторых узлах не фиксированы, а зависят от давления в этих узлах. Главная цель исследований — выяснение вопросов существования и единственности решения у такой неклассической задачи. При этом, как будет показано, данную неклассическую задачу потокораспределения можно представить в виде задач выпуклого программирования, что дает большие возможности выбора эффективных методов ее решения.

Необходимость исследования такой неклассической задачи потокораспределения вызвана тем, что на практике при расчете режимов функционирования трубопроводных систем нередко имеет место ситуация, когда расходы среды вовне или извне трубопроводной системы зависят от давления. Так, в централизованных системах водоснабжения расход воды у потребителей зависит от давления в точках отбора. Согласно [4] каждая атмосфера давления, превышающая нормативное в узле отбора, увеличивает на 5–8 % расход воды в этом узле. Также расход воды, поступающей в резервуары и водонапорные башни, существенно зависит от давления в местах присоединения резервуаров к системе. Если узел представляет источник поступающей в трубопроводную систему жидкости — насосную станцию, то его также можно и следует рассматривать как узел с нефиксированными расходами. В этом узле объем закачиваемой жидкости в единицу времени уменьшается при увеличении давления.

Сначала рассмотрим классическую задачу потокораспределения и ее основные свойства . Затем на базе классической задачи рассмотрим неклассическую задачу с расходами в отдельных узлах, зависящими от давления в них. При этом будем пользоваться обозначениями, введенными для классической задачи. Приводимые факты о свойствах изучаемой неклассической задачи потокораспределения будут рассматриваться как развитие аналогичных фактов о свойствах классической задачи.

Изложение результатов для каждой из двух частей (т.е. для классической и затем неклассической задач потокораспределения) ведется в два этапа. Сначала исследуются задачи поиска решения системы уравнений и неравенств общего вида, не учитывающие специфику моделей потокораспределения. В частности, в этих задачах используется некоторая произвольная матрица A вещественных чисел размера $m \times n$. Затем полученные результаты излагаются применительно к моделям потокораспределения, у которых A — матрица инциденций графа гидравлической цепи. Основным инструментом исследований здесь будет теория симметричной двойственности для задач выпуклого программирования с линейными ограничениями [5], основанная на использовании свойств сопряженных функций Фенхеля [6].

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ, КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В данном разделе приведем систему уравнений и несколько задач оптимизации с одним и тем же составом исходных данных. Хотя все рассматриваемые здесь задачи внешне существенно различаются, они равносильны: либо все не имеют решения, либо все имеют решения, и решение любой из них является решением остальных.

В частном случае при специфической структуре исходных данных приводимые здесь система уравнений и проблемы оптимизации, как будет показано, являются эквивалентными формами записи классической задачи потокораспределения. Разные формы записи этой задачи могут быть полезны для изучения ее свойств и разработки алгоритмов ее решения. Некоторые, приведенные здесь факты о свойствах и взаимосвязях разных формулировок классической задачи потокораспределения и полученные на этой основе новые результаты в теории гидравлических цепей, подробно изложены в работах [5, 7].

Основная цель данного раздела состоит в изложении теоретической базы, используемой при изучении классической задачи потокораспределения, на основе развития которой будет исследоваться задача потокораспределения с нефиксированными расходами.

Исходные данные. Пусть заданы векторы $b \in R^m$, $c \in R^n$, матрица A размера $m \times n$, а также функции вещественного аргумента f_j при $j = 1, \ldots, n$, причем функции f_j возрастающие, непрерывные, принимающие значения от $-\infty$ до $+\infty$ и равны нулю в нуле.

Множество функций, обладающих указанными свойствами, обозначим $\widetilde{Z}$. Итак, $\widetilde{Z}$ состоит из функций w вещественного аргумента таких, что

$$w(\alpha) > w(\beta) \quad \forall\, \alpha, \beta \in R, \alpha > \beta, \tag{1}$$

$$\lim_{\alpha \to \beta} w(\alpha) = w(\beta) \quad \forall\, \beta \in R, \tag{2}$$

$$\lim_{\alpha \to -\infty} w(\alpha) = -\infty, \lim_{\alpha \to +\infty} w(\alpha) = +\infty, \tag{3}$$

$$w(0) = 0. \tag{4}$$

Здесь R — множество вещественных чисел.

Из (1)–(4) следует, что для любой функции из $\widetilde{Z}$ существует обратная ей функция, также принадлежащая $\widetilde{Z}$. Обозначим φ_j функцию, обратную f_j. Итак, $\varphi_j \in \widetilde{Z}$ и

$$\varphi_j(f_j(\alpha)) = \alpha, \;\; f_j(\varphi_j(\alpha)) = \alpha \quad \forall \alpha \in R, \;\; j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Каждой функции из $\widetilde{Z}$ соответствует единственная первообразная функция, равная нулю в нуле. Множество таких первообразных функций обозначим Z. В частности, множеству Z принадлежат функции

$$F_j(\beta) = \int_0^\beta f_j(\alpha) d\alpha, \;\; \Phi_j(\beta) = \int_0^\beta \varphi_j(\alpha) d\alpha \;\; \forall\, \beta \in R$$

при $j = 1, \ldots, n$. Отметим, что функции из Z строго выпуклые, имеющие абсолютный минимум, который достигается в нуле и равен нулю.

Две функции из Z, являющиеся первообразными для взаимно обратных функций из $\widetilde{Z}$, называются сопряженными. Это частный случай сопряженных функций Фенхеля [6]. В частности, сопряженными являются пары функций F_j и Φ_j для всех $j = 1, \dots, n$. Для сопряженных функций из Z выполняются следующие условия [5–7]:

$$\text{если } y_j = f_j(x_j), \text{ то } F_j(x_j) + \Phi_j(y_j) = x_j y_j, \; j = 1, \dots, n, \tag{6}$$

$$\text{если } y_j \neq f_j(x_j), \text{ то } F_j(x_j) + \Phi_j(y_j) > x_j y_j, \; j = 1, \dots, n. \tag{7}$$

Введем функции от векторов $x, y \in R^n$:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x_j), \quad \Phi(y) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(y_j).$$

Пусть

$$f(x) = \nabla F(x), \; \varphi(y) = \nabla \Phi(y)$$

— вектор-функции от векторов $x, y \in R^n$ с компонентами $f_j(x_j)$ и $\varphi_j(y_j)$, $j = 1, \dots, n$.

Система уравнений. Рассмотрим задачу определения векторов $x \in R^n$, $y \in R^n$, $u \in R^m$, удовлетворяющих условиям

$$Ax = b, \tag{8}$$

$$y - A^T u = c, \tag{9}$$

$$y = f(x). \tag{10}$$

У этой системы условия (8), (9) линейные, условие (10) состоит из n нелинейных, в общем случае, ограничений.

Отметим, что для любых векторов x, y, u, удовлетворяющих условиям (8), (9), выполняется равенство

$$(c, x) + (b, u) = (x, y), \tag{11}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов. Действительно,

$$c^T x + b^T u = (y - A^T u)^T x + b^T u = y^T x - u^T Ax + b^T u = y^T x + u^T (b - Ax) = y^T x.$$

Замечание. Наличие нелинейных ограничений в системе (8)–(10) осложняет изучение вопросов существования и единственности решения непосредственно из анализа этой системы. Исследование этих вопросов облегчается при использовании представления системы в виде экстремальных проблем.

Исходная задача оптимизации: найти вектор $x \in R^n$, являющийся решением экстремальной проблемы

$$F(x) - (c, x) \to \min \tag{12}$$

при условии (8).

Для того чтобы вектор x был решением задачи (12), необходимо и достаточно, чтобы существовали векторы $y \in R^n$, $u \in R^m$, которые вместе с данным вектором x составляют решение системы (8)–(10). Это вытекает из условий оптимальности Лагранжа для задачи (12) [5, 6]. Отметим, что хотя задача (12) не содержит в явном виде вектора переменных u, он присутствует в ней неявно — это вектор множителей Лагранжа ограничений данной задачи. Располагая вектором x, по условию (10) можно определить вектор y.

Из свойств (1)–(4) производных функций F_j, $j = 1, \dots, n$, следует, что функция $F(x) - (c, x)$ при любом заданном $c \in R^n$ строго выпукла, и для любого α множество векторов x, удовлетворяющих неравенству

$$F(x) - (c, x) \le \alpha,$$

будет ограниченным или пустым. Поэтому если задача (12) имеет допустимое по условию (8) решение, то она имеет и оптимальное решение, причем это решение единственно.

Итак, необходимым и достаточным условием существования решения задачи (12) является совместность системы линейных уравнений (8). Конструктивный критерий для выявления случая несовместности ограничений (8) дает альтернатива Фредгольма [5]: эта система не будет иметь решений в том и только том случае, если найдется такой вектор $v \in R^m$, при котором

$$A^T v = 0, \ b^T v \neq 0. \tag{13}$$

Двойственная задача оптимизации: найти векторы $u \in R^m$, $y \in R^n$, являющиеся решениями экстремальной проблемы

$$\Phi(y) - (b, u) \to \min \tag{14}$$

при условии (9).

По условиям оптимальности Лагранжа для того, чтобы векторы u, y составляли оптимальное решение задачи (14), необходимо и достаточно, чтобы при некотором $x \in R^n$ данные векторы составляли решение системы (8)–(10) [5, 7]. Этот вектор x состоит из множителей Лагранжа ограничений (9) задачи (14).

Задача (14) всегда имеет допустимое решение. Например, условию (9) удовлетворяют векторы $u = 0$, $y = c$. Задача (14) может не иметь решения в том и только том случае, если целевая функция не ограничена снизу на множестве допустимых решений. А это имеет место тогда и только тогда, когда при некотором v выполняются условия (13) [5, 7].

В силу строгой выпуклости функции Φ, если задача (14) имеет решение, то для любого решения вектор y будет единственным. Если rank $A = m$, то вектор u из решения задачи (14) единственный. Вектор u из решения задачи (14) будет неединственным, если rank $A < m$.

В [5] доказана теорема, обобщающая приведенные выше утверждения о взаимосвязях системы уравнений (8)–(10), исходной (12) и двойственной (14) задач оптимизации.

Теорема 1. Для рассматриваемых трех задач (системы уравнений (8)–(10), исходной задачи оптимизации (12) и двойственной задачи оптимизации (14)) возможны только два случая.

1. Все они не имеют решения. В этом случае ограничения (8) исходной задачи оптимизации (12) несовместны, целевая функция двойственной задачи оптимизации (14) не ограничена снизу на множестве допустимых по всем ограничениям этой задачи решений.

2. Все три задачи имеют решение. Если векторы x, y, u составляют решение системы уравнений (8)–(10), то вектор x — оптимальное решение задачи оптимизации (12), u — вектор множителей Лагранжа ограничений этой задачи; векторы y, u — оптимальное решение двойственной задачи (14), при этом x — вектор множителей Лагранжа этой задачи.

Для решений рассматриваемых трех задач векторы x, y единственны, вектор u может быть неединственным в том и только том случае, если rank $A < m$.

Отметим, что из условий (6), (7) и равенства (11) вытекают следующие утверждения. Если векторы x, y, u удовлетворяют линейным ограничениям (8), (9), то

$$F(x) + \Phi(y) - (c, x) - (b, u) \geq 0, \quad F(x) + \Phi(y) - (x, y) \geq 0.$$

Такие векторы будут удовлетворять условию (10) в том и только том случае, если

$$F(x) + \Phi(y) - (c, x) - (b, u) = 0, \quad F(x) + \Phi(y) - (x, y) = 0.$$

Поэтому в системе (8)–(10) условия (10) можно заменить на любое из этих равенств.

Классическая задача потокораспределения. В частном случае при матрице A специального вида представленные выше система уравнений и задачи оптимизации являются разными эквивалентными формами записи классической задачи потокораспределения.

Структура моделируемой гидравлической системы может быть описана ориентированным графом. Пусть m — число узлов, n — число дуг этого графа, тогда A — матрица инцидентности размера $m \times n$ с элементами: $a_{ij} = 1$, если дуга j выходит из узла i; $a_{ij} = -1$, если дуга j входит в узел i; $a_{ij} = 0$, если дуга j не инцидентна узлу i. В каждом столбце такой матрицы только два ненулевых элемента: один равен +1, другой равен –1. Следовательно, сумма всех строк матрицы A будет нулевой строкой, т.е. эта матрица имеет ранг, меньший m. Далее будем считать, что рассматриваемый граф связный. Тогда $\operatorname{rank} A = m - 1$.

Компоненты вектора b — заданные для узлов $i = 1, \dots, m$ расходы среды, поставляемые извне (если $b_i > 0$) в систему или вовне (если $b_i < 0$) из системы. Компоненты c_j, $j = 1, \dots, n$, вектора c — заданные приращения давления на отдельных дугах. Если $c_j > 0$, то происходит приращение давления на дуге j, если $c_j < 0$ — дросселирование давления на дуге j. Компоненты векторов переменных x и y — величины расходов и потерь давления на отдельных дугах.

Компоненты вектора переменных u характеризуют давление в узлах $i = 1, \dots, m$.

Уравнение (8) выражает баланс расходов во всех узлах. Покомпонентные равенства (8) в этом случае еще называются уравнениями неразрывности потока.

Уравнение (9) определяет баланс между перепадом давления $(A^T u)_j$ и алгебраической суммой потери y_j и приращения c_j давления на каждой дуге j.

Соотношение (10) выражает зависимости между расходом x_j и потерей давления y_j по всем дугам $j = 1, \dots, n$.

Необходимым условием существования решения классической задачи потокораспределения является выполнение равенства

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = 0. \tag{15}$$

Иначе для вектора v, состоящего из единиц, справедливо (13). В случае если граф гидравлической цепи является связным, условие (15) является достаточным для существования решения, если функции f_j удовлетворяют условиям (1)–(4).

Разные равносильные формы записи классической задачи потокораспределения, в том числе приведенные здесь, могут быть полезны для конструирования алгоритмов решения задачи. В частности, большое количество различных методов выпуклого программирования может использоваться для решения исходной (12) и двойственной (14) задач оптимизации.

Замыкающие соотношения. В теории гидравлических цепей [1, 2] зависимости между расходами среды x_j на ветви j и перепадом давления y_j принято называть «замыкающими соотношениями». Их выражают функции f_j и φ_j. В работах по гидравлическим цепям часто рассматривается степенная функция

$$f_j(x_j) = r_j |x_j|^t \operatorname{sign} x_j,\ j = 1, \dots, n,$$

при заданных $r_j > 0, t > 0$. Обратной ей будет также степенная функция

$$\varphi_j(y_j) = \pi_j |y_j|^q \operatorname{sign} y_j,\ j = 1, \dots, n,$$

при заданных $\pi_j > 0, q > 0$, причем должны выполняться соотношения

$$tq = 1, \pi_j^t r_j = 1, \pi_j r_j^q = 1, j = 1, \ldots, n,$$

гарантирующие, что функции f_j и φ_j взаимно обратные. При расчетах обычно рассматривается случай $t = 2$. Тогда $q = 1/2$. Данные степенные функции удовлетворяют условиям (1)–(4).

А.П. Меренков в [1] для степенной функции с $t \in [1, 2]$ сформулировал и доказал утверждение о единственности решения (если существует, то единственное) классической задачи потокораспределения. Под единственностью решения здесь понимается только единственность векторов x и y. Вектор u неединственный в решении, поскольку в классической задаче потокораспределения rank $A < m$.

Практический интерес могут представлять не только степенные зависимости. Например, в [1] особо выделялась как потенциально полезная функция

$$f_j(x_j) = \alpha_j x_j + \beta_j x_j^2 \operatorname{sign} x_j$$

при заданных $\alpha_j > 0$, β_j. Возможности использования такой функции, вероятно, связаны с тем, что при малом по абсолютной величине расходе x_j будет превалировать линейная зависимость, что соответствует трению при ламинарном режиме течения среды. При увеличении абсолютного значения x_j превалирующей становится квадратичная зависимость, отражающая трение при потоках с турбулентностями. Данная функция, как и обратная ей, также удовлетворяет условиям (1)–(4).

Для задания вида возможных замыкающих соотношений использовался и аксиоматический подход путем введения набора требований к функциям f_j. В [4] предложена следующая система требований. Функции f_j должны быть: 1) непрерывно дифференцируемыми, 2) нечетными, 3) монотонно возрастающими, 4) равными нулю в нуле. В этом наборе последнее требование избыточное, поскольку равенство значения функции нулю в нуле следует из нечетности функции.

Б.Н. Пшеничный для пассивной гидравлической цепи, т.е. когда $c = 0$, при указанных выше требованиях к функциям f_j, доказал еще в 1962 г. утверждение о существовании и единственности решения классической задачи потокораспределения (при этом четвертое требование он не вводил).

Рассматриваемые в данной статье условия (1), (2), (4) ослабляют первые три требования из [1]. Нет необходимости в непрерывной дифференцируемости — достаточно только непрерывности функций f_j. Не требуется и нечетности этих функций — достаточно, чтобы они были возрастающими, принимающими нулевые значения в нуле. Это, в частности, позволяет рассматривать возможные случаи разных гидравлических сопротивлений на одной и той же дуге, в зависимости от направления потока среды в ней. Можно отметить, что выполнение требований (1), (2), (4) достаточно для доказательства утверждения Б.Н. Пшеничного: существования и единственности решения задачи потокораспределения при $c = 0$ и непротиворечивости условия (8).

Исходя только из требований (1), (2), (4), нельзя доказать существование решения задачи потокораспределения при любом $c \in R^n$. Вместе с тем требование (3) можно ослабить. Например, вместо (3) достаточно, чтобы при данном $c \in R^n$ выполнялись условия: $f_j(x_j) > c_j$ при некотором $x_j > 0$ и $f_j(x_j) < c_j$ при некотором $x_j < 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Этого условия достаточно, чтобы множество допустимых решений задачи (12) со значением целевой функции, не превосходящем любой данный уровень, было ограниченным. Это вместе со строгой выпуклостью F дает существование и единственность решения задачи (12). Отсюда, в частности, следует, что условие (3) может не вводиться для функций f_j при $c_j = 0$ для данной ветви j.

ЗАДАЧА ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ С РАСХОДАМИ В УЗЛАХ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ДАВЛЕНИЯ

Пусть в некоторых узлах расходы являются функциями от давления в них, т.е.

в условии (8) вместо заданных величин b_i используются функции $\widetilde{b}_i(u_i)$. Будем считать таковыми первые m_1 узлов. В остальных узлах расходы — по-прежнему фиксированные величины. Обозначим m_2 число этих узлов, $m_2 = m - m_1$. Итак, в системе (8)–(10) условие (8) заменяется на условия

$$A_1 x = \widetilde{b}(u), \; A_2 x = b^2,$$

где A_1, A_2 — матрицы размеров $m_1 \times n$ и $m_2 \times n$, составляющие исходную матрицу A,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}.$$

Вектор b^2 из R^{m_2} состоит из последних m_2 компонент вектора b в условии (8). Вектор-функция $\widetilde{b}(u)$ состоит из функций $\widetilde{b}_i(u_i), i = 1, \ldots, m_1$.

Будем считать, что $\widetilde{b}_i(u_i) = b_i^1 - g_i(u_i)$, где b_i^1 — заданная величина расхода в узле i при нулевом давлении, g_i — непрерывная, возрастающая функция, равная нулю в нуле, т.е. функции g_i удовлетворяют условиям (1), (2), (4). Из этих условий следует, что существуют величины

$$p_i = \lim_{\alpha \to -\infty} g_i(\alpha), r_i = \lim_{\alpha \to \infty} g_i(\alpha)$$

такие, что $p_i < 0 < r_i$. Если $p_i = -\infty$, $r_i = \infty$, то функция g_i принадлежит введенному в начале статьи классу функций $\widetilde{Z}$. Далее будем считать, что p_i и r_i могут принимать и конечные значения, т.е. условия (3) для функций g_i могут не выполняться, и поэтому эти функции принадлежат более широкому, чем $\widetilde{Z}$, классу функций.

Из (1), (2) следует, что существует обратная g_i функция, заданная на открытом интервале (p_i, r_i). Обозначим ее d_i. Итак, при любом вещественном α

$$d_i(g_i(\alpha)) = \alpha,$$

причем d_i будет возрастающей, непрерывной и равной нулю в нуле. Для функций g_i, d_i ведем первообразные функции, равные нулю в нуле. Пусть

$$G_i(\alpha) = \int_0^\alpha g_i(\beta) d\beta \;\; \forall \, \alpha \in R, \;\; D_i(\alpha) = \int_0^\alpha d_i(\beta) d\beta \;\; \forall \, \alpha \in (p_i, r_i).$$

Отметим, что функции D_i, как и их производные d_i, определены только на открытом интервале (p_i, r_i). Функции G_i и D_i удовлетворяют условию сопряженности Фенхеля. При любых $i = 1, \ldots, m_1$, $u_i \in (-\infty, \infty), z_i \in (p_i, r_i)$:

$$\text{если } z_i = g_i(u_i), \text{ то } D_i(z_i) + G_i(u_i) = z_i u_i, \tag{16}$$

$$\text{если } z_i \neq g_i(u_i), \text{ то } D_i(z_i) + G_i(u_i) > z_i u_i. \tag{17}$$

Рассмотрим систему уравнений и неравенств относительно векторов переменных $x \in R^n, z \in R^{m_1}, u^1 \in R^{m_1}, u^2 \in R^{m_2}$:

$$A_1 x + z = b^1, \tag{18}$$

$$A_2 x = b^2, \tag{19}$$

$$y - A_1^T u^1 - A_2^T u^2 = c, \tag{20}$$

$$x_j = \varphi_j(y_j), \; j = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

$$z_i = g_i(u_i), i = 1, \ldots, m_1, \tag{22}$$

$$p_i < z_i < r_i, i = 1, \ldots, m_1. \tag{23}$$

Отметим, что система (18)–(22) имеет почти такой же вид, как и система (8)–(10), только применительно к расширенному набору переменных и матрице

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & I \\ A_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица размера $m_1 \times m_1$, 0 — матрица размера $m_2 \times m_1$, состоящая из нулей. Набор переменных расширяется за счет добавления к вектору x вектора переменных $z \in R^{m_1}$. Для этих дополнительных переменных аналог компонент вектора c считаем равным нулю. Обозначим v вектор R^{m_2}, являющийся аналогом вектора y для дополнительных переменных. С учетом особенностей матрицы $\overline{A}$ аналог уравнения (9) имеет вид

$$v_i - u_i = 0, i = 1, \ldots, m_1,$$

т.е.

$$v_i = u_i, i = 1, \ldots, m_1,$$

что и учтено в выражении (22), являющимся аналогом (10).

Если бы $d_i \in \widetilde{Z}$ для всех $i = 1, \ldots, m_1$, то условие (23) было бы излишним, поскольку $p_i = -\infty, r_i = \infty$ для всех $i = 1, \ldots, m_1$. В этом случае на систему (18)–(23) можно непосредственно перенести все факты, установленные ранее для системы (8)–(10). Докажем, что свойства системы (8)–(10) можно перенести на систему (18)–(23) и в случае, когда $d_i \notin \widetilde{Z}$, т.е. когда все или некоторые из величин p_i, r_i конечные, в силу чего неравенства (23) становятся существенными.

Введем функции от векторов R^{m_1}:

$$D(z) = \sum_{i=1}^{m_1} D_i(z_i) \text{ при } p \le z \le r,$$

$$G(u^1) = \sum_{i=1}^{m_1} G_i(u_i^1) \text{ при } u^1 \in R^{m_1},$$

где p, r — векторы R^{m_1}, составленные из величин p_i и $r_i, i = 1, \ldots, m_1$. Поскольку все функции D_i, G_i строго выпуклые, имеющие абсолютный минимум в нуле, то функции $D(z)$ и $G(u^1)$ также будут строго выпуклыми, абсолютный минимум у них будет достигаться при нулевом значении векторов переменных. Отметим, что если некоторые компоненты вектора переменных достигают границ интервала определения функции D, т.е. $z_i = p_i$ или $z_i = r_i$ при некоторых $i \in \{1, \ldots, m_1\}$, то считаем $D_i(z_i) = \infty$ и, следовательно, $D(z) = \infty$.

Исходная задача оптимизации: найти векторы $x \in R^n$, $z \in R^{m_1}$, являющиеся решением экстремальной проблемы

$$R(x, z) \equiv F(x) + D(z) - (c, x) \to \min \tag{24}$$

при условиях (18), (19) и ограничении

$$p_i \le z_i \le r_i, i = 1, \ldots, m_1. \tag{25}$$

Здесь ограничения (25) являются расширением условий (23), обеспечивающих замкнутость множества допустимых решений задачи (24).

Возможны три случая. Задача (24) не имеет допустимых решений: ее ограничения несовместны. Тогда она не имеет и оптимальных решений.

Второй случай — для любых допустимых решений некоторые компоненты вектора z принимают граничные по условиям (25) значения. Следовательно, при любом допустимом решении значение целевой функции равно ∞. Следовательно, и для «оптимального» решения (оно нуждается здесь в доопределении, связанным со сравнением бесконечных чисел) в этом случае целевая функция будет иметь значение, равное бесконечности. Будем считать, что и в этом случае в силу бесконечности «оптимального» значения целевой функции задача (24) не имеет решения.

Наконец, третий возможный случай — задача (24), (18), (19), (25) имеет допустимое решение, составляющее векторы $\bar{x}, \bar{z}$, при котором неравенства (25) выполняются в строгой форме. Значение $R(\bar{x}, \bar{z})$ будет конечным. Множество Лебега

$$\{(x, z): R(x, z) \le R(\tilde{x}, \tilde{z}),\ x \in R^n,\ z \in R^{m_1}\}$$

будет непустым, выпуклым и компактным. Следовательно, в этом случае существует и, в силу строгой выпуклости функций F и D, единственное оптимальное решение задачи (24). Пусть это оптимальное решение составляют векторы $\bar{x} \in R^n, \bar{z} \in R^{m_1}$. Поскольку значение $R(x, z)$ конечное, то вектор $\bar{z}$ удовлетворяет условию (25) в строгой форме, т.е. для него выполняются неравенства (23). В силу условий оптимальности Лагранжа для того, чтобы данные векторы $\bar{x}, \bar{z}$ при $\bar{z}$, удовлетворяющем (23), были оптимальным решением задачи (24), необходимо и достаточно, чтобы при некоторых векторах $u^1 \in R^{m_1}, \bar{u}^2 \in \bar{R}^{m_2}$ выполнялись равенства (18)–(22). Здесь векторы $\bar{u}^1$ и $\bar{u}^2$ состоят из множителей Лагранжа ограничений (18) и (19) для задачи оптимизации (24).

Двойственная задача оптимизации: найти векторы $y \in R^n$, $u^1 \in R^{m_1}$, $u^2 \in R^{m_2}$, являющиеся решениями экстремальной проблемы

$$\Phi(y) + G(u^1) - (b^1, u^1) - (b^2, u^2) \to \min \tag{26}$$

при условии (20). Целевая функция данной задачи строго выпукла по переменным, составляющим векторы y и u^1, линейна по переменным, составляющим вектор u^2. Поэтому если задача (26) имеет оптимальное решение, то это решение будет единственным по переменным y и u^1. По переменным u^2, если $\operatorname{rank} A_2 < m_2$, может быть неединственное решение.

Задача (26) всегда имеет допустимое решение. В частности, его составляют векторы $u^1 = 0, u^2 = 0, y = c$. Возможны три случая.

1. Целевая функция может быть не ограничена снизу на множестве допустимых решений задачи (26). В этом случае задача не имеет решения, что соответствует первому случаю для исходной задачи оптимизации — несовместности ограничений задачи (24).

2. Инфимум целевой функции задачи (26) достигается при бесконечных значениях некоторых переменных. В этом случае таковыми будут переменные, являющиеся компонентами вектора u^1. Это имеет место при реализации второго случая для задачи (24), т.е. когда оптимальное решение задачи (24) достигается при бесконечном значении ее целевой функции. Будем считать, что в этом случае задача (26) не имеет оптимального решения.

3. Задача (26) имеет оптимальное решение. Пусть это решение составляют векторы $\bar{y}, \bar{u}^1, \bar{u}^2$. Тогда согласно необходимым и достаточным условиям оптимальности Лагранжа при некотором $\bar{x} \in R^n$ будут выполняться для данных $\bar{y}, \bar{u}^1, \bar{u}^2$ равенства (18)–(22). Вектор $\bar{x}$ будет состоять из множителей Лагранжа ограничений (20) для задачи (26). В этом случае по выражению (22) из вектора $\bar{u}^1$ можно получить вектор $\bar{z}$, име-

ющий компоненты $\bar{z}_i = q_i(\bar{u}_i^1), i = 1, \ldots, m_1$. Вектор $\bar{z}$ в силу свойств функций g_i будет удовлетворять неравенствам (23). Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Для системы уравнений и неравенств (18)–(23) исходной (24) и двойственной (26) задач оптимизации возможны только два случая.

1. Все они не имеют решения. В этом и только в этом случае условия (18), (19), (23) не совместны, т.е. не существует векторов $x \in R^n$, $z \in R^{m_1}$, удовлетворяющих им всем.

2. Все три задачи имеют решения. Если векторы x, z, y, u^1, u^2 составляют решение системы уравнений (18)–(23), то векторы x, z составляют оптимальное решение задачи (24), векторы u^1, u^2 состоят из множителей Лагранжа задачи (24), векторы y, u^1, u^2 являются оптимальными решениями задачи (26), вектор x состоит из множителей Лагранжа ограничений задачи (26).

Для решений рассматриваемых трех задач векторы x, y, z, u^1 имеют единственные значения, вектор u^2 может быть неединственным в том случае, если $\operatorname{rank} A_2 < m_2$.

Задача потокораспределения. Пусть A — матрица инциденций узлов и дуг графа гидравлической цепи. Будем считать, что граф является связным. Иначе из несвязных подграфов следует формировать отдельные, не связанные между собой задачи потокораспределения. Из связности графа следует, что $\operatorname{rank} A = m-1$. Считаем, что имеются узлы, в которых расходы зависят от давления, т.е. $m_1 \geq 1$. Следовательно, $\operatorname{rank} A_2 = m_2$, т.е. A_2 — матрица, состоящая из линейно независимых строк. Отсюда следует, что у матрицы $\overline{A}$ любые из последних m_2 строк не выражаются в виде линейных комбинаций остальных строк этой матрицы. Первые любые из m_1 строк этой матрицы также не могут быть выражены в виде линейных комбинаций остальных строк $\overline{A}$, поскольку строки диагональной подматрицы линейно независимы. Итак, $\operatorname{rank} \overline{A} = m$.

Совместность системы (18)–(23) означает, что при некотором $z \in R^{m_1}$, удовлетворяющем (23), должны выполняться равенства

$$A_1 x = b^1 - z, \ \ A_2 x = b^2.$$

Если подматрицы A_1, A_2 образуют матрицу инцидентности связного графа, то приведенные равенства будут выполняться в том и только том случае, если

$$\sum_{i=1}^{m_1} (b_i^1 - z_i) + \sum_{i=1}^{m_2} b_i^2 = 0$$

при некотором z, удовлетворяющем (23).

Итак, если A — матрица инциденций связного графа, то для совместности ограничений (18), (19), (23) необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$\sum_{i=1}^{m_1} p_i < \sum_{i=1}^{m_1} b_i^1 + \sum_{i=1}^{m_2} b_i^2 < \sum_{i=1}^{m_1} r_i. \tag{27}$$

Если граф связный, $m_1 \geq 1$, неравенства (27) выполняются, то неклассическая задача потокораспределения имеет решение, и это решение единственно по всем переменным, составляющим векторы x, z, y, u^1, u^2. Для поиска решения можно использовать любой из алгоритмов выпуклой оптимизации применительно к исходной (24) или двойственной (26) задачам оптимизации.

Наряду с системой уравнений и неравенств (18)–(23) и задачами выпуклого программирования (24), (26) интерес представляют и другие формы записи исследуемой задачи потокораспределения с расходами в узлах, зависящими от давления в них.

Заметим, что у задач оптимизации (24), (26) совершенно разный (не пересекающийся) состав переменных. Приводимую ниже задачу оптимизации можно получить простым сложением целевых функций задач (24), (26) и объединением их ограничений. Эта задача обладает двумя особыми свойствам. Во-первых, двойственная к ней будет она сама, из-за чего и названа «самосопряженной» — двойственной самой себе. Это означает, что множители ограничений Лагранжа будут совпадать с оптимальными значениями переменных.

Второе полезное свойство состоит в том, что при любом допустимом решении значение целевой функции данной задачи будет неотрицательным. Для оптимального решения, и только для него (из допустимых решений), значение целевой функции будет нулевым. Априорная информация об оптимальном значении целевой функции может использоваться в алгоритмах поиска решения такой задачи выпуклого программирования.

Самосопряженная задача оптимизации: найти векторы $x \in R^n, z \in R^{m_1}$, $y \in R^n, u^1 \in R^{m_1}, u^2 \in R^{m_2}$, являющиеся решениями экстремальной проблемы

$$F(x) + D(z) + \Phi(y) + G(u^1) - (c, x) - (b^1, u^1) - (b^2, u^2) \to \min \qquad (28)$$

при ограничениях (18)–(20), (23).

Теорема 3. Задача (28) имеет оптимальное решение в том и только том случае, если условия (18), (19), (23) совместные.

Если векторы x, z, y, u^1, u^2, составляют допустимое, но не оптимальное решение задачи (28), то значение целевой функции этой задачи будет положительным.

Если допустимые по условиям задачи векторы $\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}, \bar{u}^1, \bar{u}^2$ составляют оптимальное решение задачи (28), то множители Лагранжа ограничений (18) составляют вектор $\bar{u}^1$, ограничений (19) — вектор $\bar{u}^2$, ограничений (20) — вектор $\bar{x}$, значение целевой функции будет равно нулю.

Доказательство. Тот факт, что векторы оптимального решения $\bar{x}, \bar{u}^1, \bar{u}^2$ составляют множители Лагранжа самосопряженной задачи, следует из теоремы 2. Из теоремы 2 также следует, что для существования оптимального решения у задачи (28) необходимо и достаточно совместности условий (18)–(20), (23).

Пусть векторы x, z, y, u^1, u^2 составляют допустимое решение задачи (28), т.е. векторы x, z составляют допустимое решение задачи, (24) при условии (23), векторы y, u^1, u^2 составляют допустимое решение задачи (26). Для этих векторов выполняется равенство, являющееся аналогом (11):

$$(c, x) + (b^1, u^1) + (b^2, u^2) = (x, y) + (z, u^1)\,. \qquad (29)$$

Действительно, последовательно используя (20), затем (18), (19), имеем

$$(c, x) + (b^1, u^1) + (b^2, u^2) = (y - A_1^T u^1 - A_2^T u^2)^T x + (b^1)^T u^1 + (b^2)^T u^2 =$$
$$= y^T x + (u^1)^T (b^1 - A_1 x) + (u^2)^T (b^2 - A_2 x) = y^T x + (u^1)^T z.$$

Если рассматриваемые векторы выступают оптимальным решением задачи (28), то для них выполняются условия (21), (22), из которых следуют равенства (6), (16). Из (6), (16) имеем, что

$$F(x) + D(z) + G(u^1) - (x, y) - (z, u^1) = 0\,.$$

В силу (29) в этом случае целевая функция задачи (28) равна нулю.

Если рассматриваемые векторы не составляют оптимальное решение задачи (28), т.е. или для некоторых $j \in \{1, \dots, n\}$ не выполняется условие (21), или для некоторых $i \in \{1, \dots, m_1\}$ не выполняется условие (22), то или для некоторых j справедливо неравенство (7), или для некоторых i справедливо неравенство (17). При этом не исключается возможность обеих ситуаций. Из (6), (7), (16), (17) получаем неравенство

$$F(x) + D(z) + G(u^1) - (x, y) - (z, u^1) > 0 .$$

В силу (29) в этом случае целевая функция задачи (28) имеет положительное значение.

Теорема 3 доказана.

Симметричная задача оптимизации: найти векторы $x \in R^n, z \in R^{m_1}, y \in R^n$, $u^1 \in R^{m_1}$, $u^2 \in R^{m_2}$, являющиеся решением экстремальной проблемы

$$F(x) + D(z) + G(u^1) - (x, y) - (z, u^1) \to \min \tag{30}$$

при ограничениях (18)–(20), (23).

Данная задача получена из задачи (28) путем преобразования целевой функции на основе равенства (29). Из теоремы 3 и условия оптимальности Лагранжа получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Задача (30) имеет оптимальное решение в том и только том случае, если условия (18), (19), (23) совместные.

Если векторы x, z, y, u^1, u^2 составляют допустимое, но не оптимальное решение задачи (30), то значение целевой функции этой задачи будет положительным.

Для оптимального решения значение целевой функции задачи (30) равно нулю, множители Лагранжа ограничений (18)–(20) все равны нулю.

Замечание. Информация о значении множителей Лагранжа ограничений задачи (30) может эффективно использоваться в алгоритмах поиска решений этой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. — М.: Наука, 1985. — 294 с.
2. Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В., Новицкий Н.Н. и др. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. — Новосибирск: Наука, 1992. — 407 с.
3. Пшеничный Б.Н. Расчет энергетических сетей на ЭВМ // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1962. — № 5. — С. 942–947.
4. Кожинов И.В., Колесов В.В., Майзельс М.П. и др. Наладка и интенсификация работы городских систем подачи и распределения воды. — М.: Стройиздат, 1978. — 111 с.
5. Зоркальцев В.И., Хамисов О.В. Равновесные модели в экономике и энергетике. — Новосибирск: Наука, 2006. — 221 с.
6. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 469 с.
7. Епифанов С.П., Зоркальцев В.И. Приложение теории двойственности к моделям потокораспределения // Вычислительные технологии. — 2009. — **14**, № 1. — С. 67–80.

Поступила 18.02.2009