УДК 519.81

В.М. МИХАЛЕВИЧ

К ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ РЕШЕНИЯ С ДЕНЕЖНЫМИ ПОТЕРЯМИ

Ключевые слова: *статистическая закономерность, схема ситуации, модель ситуации.*

Рассматривается система принятия решения, представляющая собой пару: тот, кто принимает решение (ТПР), и ситуация принятия решения (СПР).

Условие, согласно которому параметрическая задача решения (ЗР) будет с денежными потерями, а отображение последствий — функцией потерь, следуя терминологии, введенной в работе [1], означает, что схема ситуации этой задачи решения (ССЗР) $((X,\succcurlyeq),\Theta,U,g)$ принадлежит классу $\mathbb{Z}((\mathbb{R},\leq))$. Здесь $(\mathbb{R},\leq)$ — множество действительных чисел с естественнным порядком $\leq$, причем на множестве Θ значений ненаблюдаемого параметра зафиксирована некоторая алгебра подмножеств Σ, а g: $\Theta\times U\to\mathbb{R}$ — произвольная функция, удовлетворяющая двум условиям:

1) $\inf\{g(\theta,u)\colon \theta\in\Theta, u\in U\}>-\infty$;

2) $\sup\{g(\theta,u)\colon \theta\in\Theta\}<+\infty \ \ \forall u\in U$.

В настоящей статье, употребляя обозначения (Θ,U,g), будем понимать именно указанное соответствие, однако ослабим условие 1, заменив его на условие $\inf\{g(\theta,u)\colon\theta\in\Theta\}>-\infty \ \ \forall u\in U$. Обозначим $\mathbb{Z}(\Theta)$ совокупность всех схем с фиксированным множеством Θ, а $\mathbb{Z}_0(\Theta)$ — подкласс класса $\mathbb{Z}(\Theta)$, для схем которого выполняется условие 1. Следующее определение правила выбора критерия (ПВК) обобщает соответствующее ему определение в [2].

Определение 1. ПВК для ССЗР из класса $\mathbb{Z}'(\Theta)\subseteq\mathbb{Z}(\Theta)$ будем называть любое отображение π, определенное на $\mathbb{Z}'(\Theta)$ и сопоставляющее каждой $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$ некоторую действительную функцию $g_Z^*(\,\cdot\,)$ на множестве решений U.

Класс всех ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$ обозначим через $\Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$, и при этом будем относить к $\Pi_0(\mathbb{Z}'(\Theta))\subset\Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$ все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, удовлетворяющие следующим условиям.

У1. Если $Z_1=(\Theta,U_1,g_1)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$, $Z_2=(\Theta,U_2,g_2)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$, $U_1\subseteq U_2$, $g_1(\theta,u)=g_2(\theta,u) \ \forall\theta\in\Theta, \ \forall u\in U_1$, то

$$g_{Z_1}^*(u)=g_{Z_2}^*(u) \ \ \forall u\in U_1.$$

У2. Если $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i\in U$, $i=\overline{1,2}$, и $g(\theta,u_1)\leq g(\theta,u_2)\ \forall\theta\in\Theta$, то

$$g_Z^*(u_1)\leq g_Z^*(u_2).$$

У3. Если $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i\in U$, $i=\overline{1,2}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\geq 0$ и $g(\theta,u_1)=$ $=ag(\theta,u_2)+b \ \forall\theta\in\Theta$, то

$$g_Z^*(u_1)=ag_Z^*(u_2)+b.$$

У4. Если $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i\in U, i=\overline{1,3}$, и $g(\theta,u_1)+g(\theta,u_2)=2g(\theta,u_3)$ $\forall\theta\in\Theta$, то

$$g_Z^*(u_1)+g_Z^*(u_2)\geq 2g_Z^*(u_3).$$

Определение 2. Моделью ПВК, т.е. МПВК (Ω-параметрической МПВК, т.е. Ω–ПМПВК) в классе ССЗР $\mathbb{Z}'(\Theta)\in\mathbb{Z}(\Theta)$ будем называть конечную совокупность условий (аксиом) **У** на ПВК для класса $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые задают единственное ПВК (с точностью до параметра $\omega\in\Omega$, где Ω — множество значений параметра ω), и обозначать [**У**] в классе $\mathbb{Z}'(\Theta)$ (с параметром $\omega\in\Omega$).

Обозначим $M(\Theta)$ (M в контексте с фиксированым Θ) банахово пространство всех действительных ограниченых функций f на множестве Θ с $||f||=\sup\limits_{\theta\in\Theta}|f(\theta)|$.

Далее, для произвольной алгебры подмножеств множества Θ обозначим $B_\Sigma(\Theta)$, или просто $B(\Theta)$ в контексте с фиксированым Σ (B в контексте с фиксированными Θ и Σ), множество всех Σ-измеримых ограниченных функций на Θ. Очевидно, что $B(\Theta)$ всюду плотно в пространстве $B(\Theta,\Sigma)$ — всех равномерных пределов конечных линейных комбинаций характеристических функций множеств из Σ.

Введем в рассмотрение отображение $\eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}$: $P(\Theta)\to\Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$, где $P(\Theta)$ — семейство всех статистических закономерностей на $(\Theta,\ \Sigma)$. Отображение $\eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}$ определяется следующим образом. Если

$$P\in P(\Theta),\ \pi=\eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(P),\ Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(\Theta)\subseteq\mathbb{Z}(\Theta),\ \pi(Z)=g_Z^*(\,\cdot\,),$$

то

$$g_Z^*(u)=\max_{p\in P}\int_\Theta g(\theta,u)p(d\theta)\quad\forall u\in U,$$

где интеграл понимается в естественном смысле интеграла по конечно-аддитивной мере. При этом существование максимума следует из замкнутости множества $P\in P(\Theta)$.

В принятых обозначениях сформулируем основную теорему, доказанную в работе [2, теорема 3.1, с. 63].

Теорема 1. Если $\Sigma=2^\Theta$, то $\eta_{\mathbb{Z}_0(\Theta)}(P(\Theta))=\Pi_0(\mathbb{Z}_0(\Theta))$.

Этот результат можно проинтерпретировать следующим образом. При $\Sigma=2^\Theta$ в классе ПВК для $\mathbb{Z}_0(\Theta)$, удовлетворяющих условиям **У1**, **У2**, **У3**, **У4**, механизм неопределенности значения ненаблюдаемого параметра из множества Θ является случайным в широком смысле (см. [2]) и при выбранной статистической закономерности $P\in P(\Theta)$, задающей этот механизм неопределенности, имеет место точная математическая постановка ЗР в любой ситуации с ССЗР $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}_0(\Theta)$, в которой критерием является функция $g_Z^*(u)=\max\limits_{p\in P}\int\limits_\Theta g(\theta,u)p(d\theta)$. Иными словами, если помимо ССЗР $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}_0(\Theta)$ зафиксировать некоторую статистическую закономерность P на Θ, то неопределенность касательно выбора отношения предпочтения на возможных решениях в этой ситуации отсутствует, т.е. ТПР, у которых ПВК для $\mathbb{Z}_0(\Theta)$ удовлетворяют условиям **У1**, **У2**, **У3**, **У4**, одинаково решают вторую основную ЗР и при этом соответствующий критерий задается функцией $g_Z^*(\,\cdot\,)$. И наоборот, если для любой ситуации $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}_0(\Theta)$

и любой статистической закономерности $P \in P(\Theta)$ критерий выбирается в виде $g_Z^*(u) = \max_{p \in P} \int_\Theta g(\theta, u) p(d\theta)$, то для соответствующего ПВК для $\mathbb{Z}_0(\Theta)$ выполняются условия **У1**, **У2**, **У3**, **У4**.

Согласно введеной терминологии получим следствия теоремы 1.

Следствие 1. Условия **У1**, **У2**, **У3**, **У4** на ПВК в классе $\mathbb{Z}_0(\Theta)$ представляют собой $P(\Theta)$-ПМПВК в классе $\mathbb{Z}_0(\Theta)$, т.е. [**У1**, **У2**, **У3**, **У4**] в $\mathbb{Z}_0(\Theta)$ с параметром $P \in P(\Theta)$.

Следствие 2. Четверка (Θ, U, g, P) является полным математическим описанием ситуации с ССЗР $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_0(\Theta)$ и закономерностью $P \in P(\Theta)$ для [**У1**, **У2**, **У3**, **У4**] в $\mathbb{Z}_0(\Theta)$ с параметром $P \in P(\Theta)$.

Другими словами, все ТПР с ПВК из класса $\Pi_0(\mathbb{Z}_0(\Theta))$ принимают в описанной таким образом ситуации одинаковое решение.

Это дает основание ввести следующие определения.

Определение 3. Моделью СЗР (МСЗР) для ССЗР $Z \in \mathbb{Z}(\Theta)$ будем называть любую четверку вида $(\Theta, U, g, P) = (Z, P)$, где $P \in P(\Theta)$.

Обозначим $\mathbb{M}$ класс всех упорядоченных четверок вида $\mathrm{M} = (\Theta, U, g, P)$, где $(\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(\Theta)$, а $P \in P(\Theta)$. Класс всех МСЗР вида $(\Theta, \cdot, \cdot, \cdot)$ будем обозначать $\mathbb{M}(\Theta)$ и сопоставлять любой МСЗР $\mathrm{M} = (\Theta, U, g, P)$ функцию $g_\mathrm{M}^*(u) = \max_{p \in P} \int_\Theta g(\theta, u) p(d\theta)$ (критерий для МСЗР М), а также, когда $(\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_0(\Theta)$, число $\rho(\mathrm{M}) = \inf_{u \in U} g_\mathrm{M}^*(u)$ будет обозначать риск для M.

Определение 4. Если $P \in P(\Theta)$, $F \subseteq M$, то будем говорить, что закономерность P является F-стохастической, если существуют такая σ-алгебра $\mathfrak{A} \subseteq 2^\Theta$ и такая вероятностная мера μ на $\mathfrak{A}$, что

$$\int_\Theta f(\theta) p(d\theta) = \int_\Theta f(\theta) \mu(d\theta) \quad \forall p \in P, \ \forall f \in F.$$

Определение 5. МСЗР $\mathrm{M} = (\Theta, U, g, P) \in \mathbb{Z}'$ будем называть байесовской, если существует такое $F \subseteq M$, что $g(\cdot, u) \in F \ \forall u \in U$, и статистическая закономерность P является F-стохастической.

Определение 6. МСЗР $\mathrm{M} = (\Theta, U, g, P) \in \mathbb{Z}'$ будем называть минимаксной, если $P = PF(\Theta)$ [1, формула (1)].

Легко увидеть, что критерии этих МСЗР совпадают соответственно с байесовским и минимаксным критериями в общепринятом смысле.

Далее будем обозначать $x_\Theta(\cdot)$ отображение, тождественно равное $x \in X$ на Θ, т.е. $x_\Theta(\theta) \overset{\text{def}}{=} x \quad \forall \theta \in \Theta$ (если это не приводит к недоразумению, то индекс Θ опускается). Тогда X_Θ будем обозначать все постоянные отображения на Θ:

$$X_\Theta := \{x_\Theta : x \in X\}. \tag{1}$$

Также обозначим $B_0(\Theta)$ (или просто B_0 в контексте Θ) множество всех конечнозначных Σ-измеримых функций на Θ:

$$B_0(\Theta) := \{f \in B(\Theta): \operatorname{Card} f(\Theta) < \infty\},$$

а через $B_0(a,b)$, где $a,b \in \mathbb{R}$, $(-a), b > 0$, — множество всех конечнозначных Σ-измеримых функций на Θ со значениями в интервале $[a,b]$: $B_0(a,b) :=$ $:= \{f \in \mathbb{R}^{\Theta}: f \in B_0,\, f(\Theta) = \operatorname{co}[f(\Theta)],\ \overline{f(\Theta)} = [a,b]\}$.

Очевидно, что множество $B_0(a,b)$ является поглощающим (см. [3]) в B_0.

Определение 7. ССЗР $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(\Theta)$ будем называть определяющей, если существуют $a,b \in \mathbb{R}$, $0 \in (a,b)$, когда

$$B_0(a,b) \subseteq g(\,\cdot\,, U) = \operatorname{co}[g(\,\cdot\,, U)] \subseteq B. \tag{2}$$

Далее, для ССЗР класса $\mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$ будем относить к $\overline{\Pi}_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$ все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые принадлежат $\Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$ и для любой определяющей ССЗР $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$ удовлетворяют условиям **У2**, **У4**. Таким образом, ослабленные условия будем обозначать **У2$'$** и **У4$'$** соответственно. Очевидно, что $\overline{\Pi}_0(\mathbb{Z}'(\Theta)) \supseteq \Pi_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$. Обозначим $\Pi_{01}(\mathbb{Z}'(\Theta))$ все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые принадлежат $\overline{\Pi}_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$ и удовлетворяют также следующим условиям.

У1$'$. Если $Z_1 = (\Theta, U_1, g_1) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $Z_2 = (\Theta, U_2, g_2) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, $g_1(\theta, u_1) = g_2(\theta, u_2)$ $\forall \theta \in \Theta$, то

$$g^*_{Z_1}(u_1) = g^*_{Z_2}(u_2).$$

У3$'$. Если $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$ — определяющая, $u_i \in U$, $i = \overline{1,3}$, $\alpha \in [0,1]$, $g(\,\cdot\,, u_3) = c_\Theta$, а $g(\theta, u_1) = \alpha g(\theta, u_2) + (1-\alpha)c$ для любых $\theta \in \Theta$, то

$$g^*_Z(u_1) = \alpha g^*_Z(u_2) + (1-\alpha)c.$$

Замечание. В случае, когда $\Sigma = 2^{\Theta}$ и $\mathbb{Z}'(\Theta)$ совпадает с $\mathbb{Z}(\Theta)$, условие **У1$'$** следует из условий **У1**, **У2**, **У3**, **У4**. Для доказательства этого факта воспользуемся теоремой 1, согласно которой если

$$Z_1 = (\Theta, U_1, g_1) \in \mathbb{Z}(\Theta), Z_2 = (\Theta, U_2, g_2) \in \mathbb{Z}(\Theta),\ u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2$$

$$\text{и } g_1(\theta, u_1) = g_2(\theta, u_2)\ \forall \theta \in \Theta,$$

то $g^*_{Z_1}(u_1) = \max\limits_{p \in P} \int\limits_{\Theta} g_1(\theta, u_1) p(d\theta) = \max\limits_{p \in P} \int\limits_{\Theta} g_2(\theta, u_2) p(d\theta) = g^*_{Z_2}(u_2)$,

т.е. условие **У1$'$** справедливо.

Очевидно также, что из условий **У2**, **У3**, **У4** следуют условия **У2$'$**, **У3$'$**, **У4$'$** соответственно.

Для произвольного векторного пространства V введем отношение эквивалентности $\overset{\text{co}}{\approx}$ на 2^V следующим образом. Для любых $X, Y \subseteq V$

$$X \overset{\text{co}}{\approx} Y \Leftrightarrow \operatorname{co} X = \operatorname{co} Y. \tag{3}$$

Будем обозначать через $\Pi_{02}(\mathbb{Z}'(\Theta))$ класс всех ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые удовлетворяют условию **У1$'$**, а также условиям **У2$'$**, **У3$'$**, **У4$'$**, ослабленными тем, что их требования распространяются лишь на $g \in B_0(\Theta)$. Соответствующие ослабленные условия обозначим **У2$''$**, **У3$''$**, **У4$''$**.

Очевидно, что $\Pi_{01}(\mathbb{Z}'(\Theta)) \subseteq \Pi_{02}(\mathbb{Z}'(\Theta))$.

Введем также в рассмотрение отображение $\eta'_{\mathbb{Z}'(\Theta)}\colon\ P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}\to\Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$ таким образом, что если $\widetilde{P}$ — класс эквивалентности по отношению $(P(\Theta),\overset{\text{co}}{\approx})$ с представителем P, то

$$\eta'_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(\widetilde{P})\overset{\text{def}}{=}\eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(P).$$

Обозначим $P_{\text{co}}(\Theta)$ множество всех выпуклых статистических закономерностей на Θ:

$$P_{\text{co}}(\Theta):=\{P\in P(\Theta)\colon P=\text{co}P\}.$$

Очевидно, что

$$\max_{p\in P}\int\limits_{\Theta} f(\theta)p(d\theta)=\max_{p\in\text{co}P}\int\limits_{\Theta} f(\theta)p(d\theta)\,,\ \text{где}\ \ P\in P(\Theta),$$

в силу афинности интеграла по аддитивной мере. Тогда

$$\eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(P(\Theta))=\eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(P_{\text{co}}(\Theta))=\eta'_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx})\,.$$

Наконец, обозначим $\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ любой подкласс ССЗР класса $\mathbb{Z}(\Theta)$, в котором для любой ССЗР $Z'=(\Theta,U',\,g')\in\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ и любого $u'\in U'$ найдутся такая определяющая ССЗР $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ и такое $u\in U$, что $g'(\theta,u')=g(\theta,u)\quad\forall\theta\in\Theta$, а через $\mathbb{Z}'_0(\Theta)$ будем обозначать такой подкласс $\mathbb{Z}'_1(\Theta)$, у которого для любой определяющей ССЗР $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'_0(\Theta)$ выполняется соотношение $g(\,\cdot\,,U)\subseteq B_0$.

Для любого класса $\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ определим соответствующий ему класс $\mathbb{Z}'_0(\Theta)$, который обозначим $\mathbb{Z}'_{01}(\Theta)$:

$$\mathbb{Z}'_{01}(\Theta):=\{(\Theta,\overline{U},\overline{g})\colon\ Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'_1(\Theta),$$
$$\overline{U}=\{\overline{u}\in U\colon g(\,\cdot\,,\overline{u})\in B_0(\Theta)\},\ \ \overline{g}(\,\cdot\,,u)=g(\,\cdot\,,u)\ \ \forall u\in\overline{U}\}.$$

Сформулируем результат, обобщающий теорему 1.

Теорема 2. Для произвольного класса $\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ отображение $\eta'_{\mathbb{Z}'_1(\Theta)}$ является инъекцией и

$$\eta'_{\mathbb{Z}'_1(\Theta)}(P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx})=\Pi_{01}(\mathbb{Z}'_1(\Theta))=\Pi_{02}(\mathbb{Z}'_1(\Theta)).$$

Доказательство. Покажем, что $\Pi_{02}(\mathbb{Z}'_1(\Theta))\subseteq\eta_{\mathbb{Z}'_1(\Theta)}(P(\Theta))$.

Действительно, пусть $\pi\in\Pi_{02}(\mathbb{Z}'_1(\Theta))$. Определим на B_0 функционал $\varphi=\varphi_\pi(\,\cdot\,)$ следующим образом. Пусть ССЗР $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ является определяющей, т.е. для нее выполняется соотношение (2). Следовательно, для любой функции $f\in B_0$ существуют такие $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, и $u\in U$, что $f(\,\cdot\,)=ag(\,\cdot\,,u)$. Тогда значению $\varphi(f)$ функционала φ для f зададим число $ag^*_Z(u)$, т.е. $\varphi(f)=ag^*_Z(u)$. Это определение корректно, так как значение $\varphi(f)$, во-первых, в силу условия **У1′** не зависит от выбора ССЗР Z, а только от элемента f, а во-вторых, не зависит от представления $f(\,\cdot\,)$ в виде $ag(\,\cdot\,,u)$, ибо если $ag(\theta,u)=a'g(\theta,u')$, где $a,\ a'>0$, то

$$\frac{a'}{a+a'}\cdot 0+\frac{a}{a+a'}\cdot g(\theta,u)=\frac{a'}{a+a'}\cdot g(\theta,u')+\frac{a}{a+a'}\cdot 0.$$

В силу условия **У3′** получим, что

$$\frac{a}{a+a'}\cdot g^*_Z(u)+\frac{a'}{a+a'}\cdot 0=\frac{a'}{a+a'}\cdot g^*_Z(u')+\frac{a}{a+a'}\cdot 0.$$

Значит, $ag_Z^*(u)=a'g_Z^*(u')$.

Лемма 1. Функционал $\varphi=\varphi_\pi(\cdot)$ обладает следующими свойствами при $F=B_0$.

S1. Если $f_1,f_2\in F$, $f_1(\theta)\le f_2(\theta)$ при всех $\theta\in\Theta$, то $\varphi(f_1)\le\varphi(f_2)$.

S2. Если $f_1,f_2\in F$, $a,b\in R$, $a\ge 0$, $f_1(\theta)=af_2(\theta)+b$ при всех $\theta\in\Theta$, то $\varphi(f_1)=a\varphi(f_2)+b$.

S3. Если $f_1,f_2\in F$, то $\varphi(f_1+f_2)\le\varphi(f_1)+\varphi(f_2)$.

Доказательство. Пусть $f_1,f_2\in B_0$ и $f_1(\theta)\le f_2(\theta)$ при всех $\theta\in\Theta$. Тогда согласно определению φ существуют такие $a_1,a_2\in\mathbb{R}$, $a_1,a_2>0$, и $u_1,u_2\in U$, что $f_1(\cdot)=a_1g(\cdot,u_1)$, $f_2(\cdot)=a_2g(\cdot,u_2)$. Следовательно, $a_1g(\theta,u_1)\le a_2g(\theta,u_2)$ $\forall\theta\in\Theta$. Предположим, что $a_2\le a_1$, тогда для любых $\theta\in\Theta$ имеем

$$g(\theta,u_1)\le\frac{a_2}{a_1}g(\theta,u_2)+\frac{a_1-a_2}{a_1}\cdot 0.$$

Тогда согласно (2) существует такое $u\in U$, что для любых $\theta\in\Theta$

$$g(\theta,u)=\frac{a_2}{a_1}g(\theta,u_2)+\frac{a_1-a_2}{a_1}\cdot 0.$$

Значит, в силу условия монотонности **У2′** из $g(\theta,u_1)\le g(\theta,u)$ $\forall\theta\in\Theta$ следует, что $g_Z^*(u_1)\le g_Z^*(u)$.

Воспользовавшись условием **У3′**, получим

$$g_Z^*(u)=\frac{a_2}{a_1}g_Z^*(u_2).$$

Отсюда $a_1g_Z^*(u_1)\le a_2g_Z^*(u_2)$, т.е. $\varphi(f_1)\le\varphi(f_2)$. Свойство **S1** доказано.

Далее, если $f_1,f_2\in B_0$, $a_1,b_1\in\mathbb{R}$, $a_1\ge 0$, $f_1(\theta)=a_1f_2(\theta)+b_1$ при всех $\theta\in\Theta$, то запишем последнее равенство в виде

$$\frac{1}{a_1+1}f_1(\theta)=\frac{a_1}{a_1+1}f_2(\theta)+\frac{b_1}{a_1+1}\qquad\forall\theta\in\Theta.\tag{4}$$

Так как функции $\frac{1}{a_1+1}f_1(\cdot)$, $\frac{a_1}{a_1+1}f_2(\cdot)$, $(\frac{b_1}{a_1+1})_\Theta$ принадлежат B_0, то в силу того, что множество $B_0(a,b)$ поглощающее, существует такое число $c\in\mathbb{R}$, $c>0$, и такие $u_1,u_2\in U$, что

$$\frac{f_1(\theta)}{c(a_1+1)}=g(\theta,u_1),\ \frac{2a_1f_2(\theta)}{c(a_1+1)}=g(\theta,u_2)\qquad\forall\theta\in\Theta,$$

$$a<\frac{2b_1}{c(a_1+1)}<b.\tag{5}$$

В силу соотношения (4) имеем

$$g(\theta,u_1)=\frac{1}{2}\cdot g(\theta,u_2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2b_1}{c(a_1+1)}\qquad\forall\theta\in\Theta.$$

Поскольку выполняется соотношение (5), то найдется такое $u_3 \in U$, что

$$g(\theta, u_3) = \frac{2b_1}{c(a_1+1)} \qquad \forall \theta \in \Theta.$$

Следовательно, воспользовавшись условием **У3′**, получим

$$g_Z^*(u_1) = \frac{1}{2} \cdot g_Z^*(u_2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2b_1}{c(a_1+1)}.$$

Отсюда в силу определения функционала φ

$$\frac{1}{c(a_1+1)} \cdot \varphi(f_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a_1}{c(a_1+1)} \cdot \varphi(f_2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2b_1}{c(a_1+1)}$$

или $\varphi(f_1) = a_1 \varphi(f_2) + b_1$. Таким образом, свойство **S2** также доказано.

Наконец, если $f_1, f_2 \in B_0$, то в силу (2) найдутся такие $a' \in \mathbb{R}$, $a' > 0$, и $u_1, u_2, u_3 \in U$, что

$$f_1(\cdot) = a' g(\cdot, u_1), \; f_2(\cdot) = a' g(\cdot, u_2), \quad \frac{f_1(\cdot) + f_2(\cdot)}{2} = a' g(\cdot, u_3).$$

Тогда имеем

$$g(\cdot, u_3) = \frac{f_1(\cdot) + f_2(\cdot)}{2a'} = \frac{1}{2}(g(\cdot, u_1) + g(\cdot, u_2)).$$

Воспользовавшись условием **У4′**, получим

$$g_Z^*(u_1) + g_Z^*(u_2) \geq 2g^*(u_3).$$

Поскольку $g_Z^*(u_1) = \varphi\left(\frac{f_1}{a'}\right)$, $g_Z^*(u_2) = \varphi\left(\frac{f_2}{a'}\right)$, $g_Z^*(u_3) = \varphi\left(\frac{f_1+f_2}{2a'}\right)$, то ввиду доказанного свойства **S2** из последнего неравенства имеем $\varphi(f_1) + \varphi(f_2) \geq$ $\geq \varphi(f_1 + f_2)$. Свойство **S3** и, следовательно, лемма 1 полностью доказаны.

Лемма 2. Функционал $\varphi = \varphi_\pi(\cdot)$ допускает единственное непрерывное продолжение на B, причем это продолжение функционала φ удовлетворяет свойствам **S1**, **S2**, **S3** при $F = B$.

Доказательство. Покажем, что для любых $f_1, f_2 \in B_0$

$$|\varphi(f_1) - \varphi(f_2)| \leq || f_1 - f_2 ||.$$

Действительно, имеем

$$f_2(\theta) + || f_1 - f_2 || \geq f_2(\theta) + f_1(\theta) - f_2(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Тогда согласно свойству **S1**

$$\varphi(f_2 + || f_1 - f_2 ||_\Theta) \geq \varphi(f_1).$$

Но в силу свойства **S2**

$$\varphi(f_2 + || f_1 - f_2 ||_\Theta) = \varphi(f_2) + || f_1 - f_2 ||.$$

Следовательно, $\varphi(f_2) + || f_1 - f_2 || \geq \varphi(f_1)$ или $\varphi(f_1) - \varphi(f_2) \leq || f_1 - f_2 ||$ и в силу симметрии $\varphi(f_2) - \varphi(f_1) \leq || f_2 - f_1 ||$. Таким образом, $|\varphi(f_1) - \varphi(f_2)| \leq || f_1 - f_2 ||$.

Отсюда в силу того, что пространство B_0 всюду плотно в пространстве B, следует существование единственного непрерывного продолжения φ на B. Очевидно, что оно удовлетворяет свойствам **S1**, **S2**, **S3** для $F = B$.

Лемма доказана.

Обозначим Φ множество всех ограниченных линейных функционалов ψ на B, удовлетворяющих двум условиям:

1) $\psi(1_\Theta) = 1$;

2) $\psi(f) \ge 0$, если $f(\theta) \ge 0 \ \ \forall \theta \in \Theta$.

Очевидно, что если $p \in PF(\Theta)$,

$$\psi: B \to R, \ \psi(f) = \int_\Theta f(\theta) p(d\theta), \tag{6}$$

то $\psi \in \Phi$. Докажем обратное: для любого $\psi \in \Phi$ можно определить такое $p \in PF(\Theta)$, для которого справедливо (6). Для этого положим $p(C) = \psi(1_C)$ при всех $C \subseteq \Theta$. Очевидно, что $p(\Theta) = 1$, $p(C) \ge 0$ и $p(C \cup D) = p(C) + p(D \setminus C)$ при всех $C, D \subseteq \Theta$. Значит, $p \in PF(\Theta)$. Покажем, что для такого p справедливо условие (6).

Зададим произвольные $f \in B$ и $\varepsilon \in (0,1)$. Для них построим разбиение $E = \{e_i, \ i = \overline{1, n}\}$ множества Θ на конечное число непересекающихся подмножеств, удовлетворяющее условию

$$\sup f(e_i) - \inf \ (e_i) < \varepsilon \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Пусть $\overline{f}_i = \sup f(e_i)$, $i = \overline{1, n}$, $\overline{f} = \sum_{i=1}^n \overline{f}_i \cdot 1_{e_i}$. Тогда $0 \le \overline{f} - f \le \varepsilon \ \ \forall \theta \in \Theta$. Отсюда $0 \le \varepsilon \cdot 1_\Theta - (\overline{f} - f) \le \varepsilon \ \ \forall \theta \in \Theta$ и, следовательно, в силу линейности φ и свойства (2)

$$0 \le \varphi(\overline{f} - f) = \varphi(\varepsilon 1_\Theta) - \varphi(\varepsilon \cdot 1_\Theta - \overline{f} + f) = \varepsilon - \varphi(\varepsilon \cdot 1_\Theta - (\overline{f} - f)) \le \varepsilon.$$

Однако

$$\varphi(\overline{f}) = \sum_{i=1}^n \varphi(\overline{f}_i \cdot 1_{e_i}) = \sum_{i=1}^n \overline{f}_i \, p(e_i) = \int_\Theta \overline{f}(\theta) p(d\theta),$$

а также

$$0 \le \int_\Theta (\overline{f}(\theta) - f(\theta)) p(d\theta) = \int_\Theta \overline{f}(\theta) p(d\theta) - \int_\Theta f(\theta) p(d\theta) =$$

$$= \int_\Theta (\overline{f}(\theta) - f(\theta)) p(d\theta) \le \int_\Theta \varepsilon p(d\theta) = \varepsilon.$$

Поэтому $|\varphi(f) - \varphi(\overline{f})| \le \varepsilon$ и $|\varphi(\overline{f}) - \int_\Theta f(\theta) p(d\theta)| \le \varepsilon$. Отсюда

$$|\varphi(f) - \int_\Theta f(\theta) p(d\theta)| \le 2\varepsilon,$$

и в силу произвольности выбора f и ε справедливо представление (6).

Лемма 3. Для того чтобы функционал $\varphi: B \to \mathbb{R}$ обладал свойствами **S1–S3**, необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде

$$\varphi(f) = \sup_{\psi \in \Phi_\varphi} \psi(f) \quad \forall f \in B,$$

где Φ_φ — некоторое непустое подмножество множества Φ.

Доказательство. Необходимость. Для произвольной функции $f_0 \in B$ обозначим L двумерное линейное подпространство пространства B, порожденное функциями f_0 и 1_Θ:

$$L = \{f \in B\colon \exists\ a, b \in \mathbb{R},\quad f = af_0 + b1_\Theta\}.$$

Определим на L ограниченный линейный функционал

$$\varphi_0 \colon L \to \mathbb{R},\quad \varphi_0(af_0 + b1_\Theta) = a\varphi(f_0) + b.$$

Легко увидеть, что $\varphi_0(f) \le \varphi(f)$ при всех $f \in L$. Действительно, если $a \ge 0$, $f = af_0 + b1_\Theta$, то согласно свойству **S2** $\varphi_0(f) = a\varphi(f_0) + b = \varphi(f)$. Если $a < 0$, то в силу свойства **S3** $\varphi(f) + \varphi(-f) \ge 2\varphi(f - f) = 2\varphi(0 \cdot 1_\Theta)$. Следовательно, воспользовавшись свойством **S2**, получим $\varphi(f) + \varphi(-f) \ge 0$ или $\varphi(-f) \ge -\varphi(f)$. Отсюда, поскольку $f = af_0 + b1_\Theta$, получаем

$$\varphi(f) \ge -\varphi(-f) = -[(-a)\varphi(f_0) - b] = a\varphi(f_0) + b = \varphi_0(f).$$

Таким образом, вследствие свойств **S2** и **S3** φ есть калибровочная функция на пространстве B и $\varphi_0(f) \le \varphi(f)$ при $f \in L$. Значит, согласно теореме Хана–Банаха в аналитической форме [3, с. 84] существует такой ограниченный линейный функционал φ_1 на B, что $\varphi_1(f) = \varphi_0(f)$ для всех $f \in L$ и $\varphi_1(f) \le \varphi(f)$ для всех $f \in B$.

Покажем, что $\varphi_1 \in \Phi$. Поскольку функционал φ_1 ограничен, линеен и очевидно, что $\varphi_1(1_\Theta) = 1$ (так как $1_\Theta \in L$), то остается лишь убедиться, что $\varphi_1(f) \ge 0$ при $f \ge 0$. Действительно, если $f \ge 0$, то $-f \le 0$, а значит, в силу свойства **S1** $\varphi(-f) \le \varphi(0 \cdot 1_\Theta) = 0$. Поэтому $\varphi_1(f) = -\varphi_1(-f) \ge -\varphi(-f) \ge 0$. Следовательно, $\varphi_1 \in \Phi$. Более того,

$$\varphi_1 \in \{\psi \in \Phi\colon \psi(f) \le \varphi(f)\quad \forall f \in B\} \overset{\text{def}}{=} \Phi_\varphi.$$

Однако, с одной стороны, $\varphi(f) \ge \sup\limits_{\psi \in \Phi_\varphi} \psi(f)$, поскольку $\varphi(f) \ge \psi(f)$ при всех $\psi \in \Phi_\varphi$, $f \in B$ согласно определению Φ_φ, а с другой стороны, $\varphi(f) \le \sup\limits_{\psi \in \Phi_\varphi} \psi(f)$, поскольку для любой функции $f \in B$, обозначив ее через f_0, можно построить (как это было сделано выше) такой функционал $\varphi_1 \in \Phi_\varphi$, чтобы выполнялось равенство $\varphi(f_0) = \varphi_1(f_0)$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\Phi_0 \subseteq \Phi$, $\varphi\colon B \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = \sup\limits_{\psi \in \Phi_0} \psi(f)$. Если $f_1, f_2 \in B$ и $f_1(\theta) \le f_2(\theta)$ для всех $\theta \in \Theta$, то согласно условию 2 для Φ имеем $\psi(f_2 - f_1) \ge 0$ для всех $\psi \in \Phi$. Отсюда и ввиду линейности всех $\psi \in \Phi$

$$\varphi(f_1) = \sup_{\psi \in \Phi_0} \psi(f_1) \le \sup_{\psi \in \Phi_0} \psi(f_2) = \varphi(f_2).$$

Следовательно, справедливо свойство **S1**. Свойство **S2** очевидно, а свойство **S3** следует из того, что

$$\varphi(f_1 + f_2) = \sup_{\psi \in \Phi_0} \psi(f_1 + f_2) =$$

$$= \sup_{\psi\in\Phi_0} [\psi(f_1)+\psi(f_2)] \le \sup_{\psi\in\Phi_0} \psi(f_1) + \sup_{\psi\in\Phi_0} \psi(f_2) = \varphi(f_1)+\varphi(f_2).$$

Лемма 3 полностью доказана.

Итак, если $\pi \in \Pi_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$, то сопоставим ПВК π функционал $\varphi = \varphi_\pi(\,\cdot\,)$ согласно лемме 2. Далее найдем соответствующее ему подмножество $\Phi_\varphi \subseteq \Phi$, воспользовавшись леммой 3. Затем, определив для каждого $\psi \in \Phi_\varphi$ соответствующее ему согласно (6) распределение $p = p_\psi \in PF(\Theta)$, введем обозначение

$$P_\varphi := \{p_\psi, \psi \in \Phi_\varphi\}.$$

Очевидно, что множество P_φ замкнуто, т.е. $P_\varphi = \overline{P}_\varphi$ в топологии $\tau(\Theta)$. Тогда для любых $f \in B$

$$\varphi_\pi(f) = \sup_{\psi\in\Phi_\varphi} \psi(f) = \sup_{p\in P_\varphi} \int_\Theta f(\theta)p(d\theta) = \max_{p\in P_\varphi} \int_\Theta f(\theta)p(d\theta)$$

согласно определению топологии $\tau(\Theta)$.

Тем самым в силу условия **У1′** доказано, что каковы бы ни были ССЗР $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(\Theta)$, а также $u \in U$ и $\pi \in \Pi_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$ для $g_Z^* = \pi(Z)$, справедливо равенство

$$g_Z^*(u) = \varphi_\pi(g(\,\cdot\,, u)) = \max_{p\in P_\varphi} \int_\Theta g(\theta, u)p(d\theta).$$

Поэтому $\Pi_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)) \subseteq \Pi_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)) \subseteq \eta_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta))$.

Для доказательства обратного включения заметим, что при $P \in P(\Theta)$ по любому распределению $p \in P$ можно определить функционал $\varphi = \varphi_p$ согласно формуле (6). Затем, обозначив $\{\varphi_p, p \in P\}$ через Φ_0, получим, что в соответствии с леммой 3 функционал

$$\psi: B \to \mathbb{R},\ \ \psi(f) = \sup_{\varphi\in\Phi_0} \varphi(f)$$

обладает всеми свойствами **S1**, **S2**, **S3**. Таким образом, определив для любой ССЗР $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(\Theta)$ критерий g_Z^* вида

$$g_Z^*: U \to \mathbb{R},\ \ g_Z^*(u) = \psi(g(\,\cdot\,, u)),$$

получим ПВК для $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ из класса $\Pi_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$, определяемое критерием g_Z^*, т.е. $\eta_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta)) \subseteq \Pi_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)) \subseteq \Pi_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$. Тогда

$$\Pi_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)) = \Pi_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)) = \eta_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta)) = \eta_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P_{\mathrm{co}}(\Theta)) = \eta'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta)/\overset{\mathrm{co}}{\approx}).$$

Наконец, перейдем к доказательству инъективности отображения $\eta'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}$.

Предположим противное. Тогда найдутся две несовпадающие выпуклые статистические закономерности $P_1, P_2 \in P(\Theta)$, что для любой ССЗР $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(\Theta)$ имеем

$$(g(\,\cdot\,, U), \max_{p\in P_1} \int_\Theta g(\theta, u)p(d\theta)) = (g(\,\cdot\,, U), \max_{p\in P_2} \int_\Theta g(\theta, u)p(d\theta)).$$

В силу симметрии без уменьшения общности можно считать, что $p_1 \in P_1 \setminus P_2$. Тогда согласно теореме отделимости [4, V. 2.12] и теореме о представлении элементов пространства $B^*(\Theta, \Sigma)$ [4, IV. 5.1] существует такой элемент

$f \in B$, что

$$\int\limits_{\Theta} f(\theta) p_1(d\theta) > \max_{p \in P_2} \int\limits_{\Theta} f(\theta) p(d\theta).$$

Не уменьшая общности, можно также считать, что $f \in B_0(a,b)$. Отсюда следует, что существует такой $f \in B_0(a,b)$, для которого

$$\max_{p \in P_1} \int\limits_{\Theta} f(\theta) p(d\theta) > \max_{p \in P_2} \int\limits_{\Theta} f(\theta) p(d\theta).$$

Если ССЗР $Z = (\Theta, U, g)$ — определяющая, то существует такое $u \in U$, что $g(\cdot, u) = f$. Выберем c_Θ такое, что $c \in \mathbb{R}$, а $c_\Theta \sim u$. Тогда получим

$$c = \max_{p \in P_1} \int\limits_{\Theta} c_\Theta(\theta) p(d\theta) = \max_{p \in P_1} \int\limits_{\Theta} f(\theta) p(d\theta) > \max_{p \in P_2} \int\limits_{\Theta} f(\theta) p(d\theta) = \max_{p \in P_2} \int\limits_{\Theta} c_\Theta(\theta) p(d\theta) = c$$

,

что противоречит предположению.

Теорема полностью доказана.

Сформулируем несколько следствий теоремы 2.

Следствие 1. Для любого класса $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ условия **У1′**, **У2″**, **У3″**, У**4″** на ПВК в классе $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$, т.е. [**У1′**, **У2″**, **У3″**, **У4″**] в классе $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ с параметром $P \in P(\Theta)$, представляют собой $P(\Theta)$-ПМПВК в классе $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$.

Следствие 2. При $\Sigma = 2^\Theta$ и $\mathbb{Z}_1'(\Theta) = \mathbb{Z}(\Theta)$ получаем теорему 1.

Следствие 3. Для любой определяющей ССЗР $Z' \in \mathbb{Z}(\Theta)$ имеет место

$$\eta_{\{Z'\}}(P(\Theta)) = \overline{\Pi}_0(\{Z'\}).$$

Действительно, это следует из того, что класс ПВК $\Pi_{01}(\{Z\})$ совпадает с классом ПВК $\overline{\Pi}_0(\{Z\})$ $\forall Z \in \mathbb{Z}(\Theta)$.

Из следствия 1 теоремы 2 при $\mathbb{Z}_1'(\Theta) = \mathbb{Z}(\Theta)$ получаем, что более слабые условия на ПВК также позволяют ввести модель ситуации согласно определению 3. Уточним это следствие.

Следствие 4. Четверка (Θ, U, g, P) является полным математическим описанием ситуации с ССЗР $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(\Theta)$ и закономерностью $P \in P(\Theta)$ для [**У 1′**, **У2″**, **У3″**, **У4″**] в $\mathbb{Z}(\Theta)$ с параметром $P \in P(\Theta)$.

Другими словами, все ТПР с ПВК из класса $\Pi_{02}(\mathbb{Z}(\Theta))$ принимают в заданной таким образом модели ситуации одинаковое решение.

Теорема 3. Для произвольного класса ССЗР $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ любое ПВК $\overline{g}^* \in \Pi_{01}(\mathbb{Z}_{01}'(\Theta))$ можно, и при этом единственным образом, продолжить до ПВК $g^* \in \Pi_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$.

Доказательство следует из самого доказательства теоремы 2, но его можно получить и непосредственно, а именно в силу теоремы 2 для любой ССЗР $\overline{Z} = (\Theta, \overline{U}, \overline{g}) \in \mathbb{Z}_{01}'(\Theta)$ имеем, что для $\overline{g}^* \in \Pi_{01}(\mathbb{Z}_{01}'(\Theta))$ найдется единственная выпуклая статистическая закономерность $P \in P(\Theta)$, для которой

$$\overline{g}^*_{\overline{Z}}(u) = \max_{p \in P} \int\limits_{\Theta} \overline{g}(\theta, u) p(d\theta) \quad \forall u \in \overline{U}.$$

Рассмотрим ПВК g^* такое, что для любой ССЗР $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(\Theta)$

$$g_Z^*(u) = \max_{p \in P} \int_{\Theta} g(\theta, u) p(d\theta) \quad \forall u \in U.$$

Так как согласно условиям, определяющим класс $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$, имеем $g(\cdot, u) = \overline{g}(\cdot, u) \;\; \forall u \in \overline{U}$, то g_Z^* будет продолжением $\overline{g}_{\overline{Z}}^*$. А в силу теоремы 2

$$\eta'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx}) = \Pi_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)),$$

тогда ПВК $g^* \in \Pi_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$. При этом оно единственно для найденной статистической закономерности P.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого класса $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ условия **У1′, У2′, У3′, У4′** для ПВК в классе $\mathbb{Z}_{01}'(\Theta)$, т.е. [**У1′, У2′, У3′, У4′**] в классе $\mathbb{Z}_{01}'(\Theta)$ с параметром $P \in P(\Theta)$, представляют собой $P(\Theta)$-ПМПВК в классе $\mathbb{Z}_{01}'(\Theta)$.

В частности, при $\mathbb{Z}_1'(\Theta) = \mathbb{Z}(\Theta)$ получим следующее.

Следствие 2. Четверка (Θ, U, g, P) является полным математическим описанием ситуации с ССЗР $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(\Theta)$ и закономерностью $P \in P(\Theta)$ для [**У1′, У2′, У3′, У4′**] в $\mathbb{Z}'_{01}(\Theta)$ с параметром $P \in P(\Theta)$.

Другими словами, все ТПР с ПВК из класса $\Pi_{01}(\mathbb{Z}_{01}'(\Theta))$ принимают в заданной таким образом модели ситуации одинаковое решение.

Полученные результаты можно проинтерпретировать, в частности, таким образом: условия **У1′**, **У2′′**, **У3′′**, **У4′′** являются необходиыми и достаточными для точной математической постановки задачи решения с любой моделью ситуации $M = (Z, P)$, где $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(\Theta)$, а $P \in P(\Theta)$. При этом критерий в ЗР задается функцией $g_Z^*(u) = \max_{p \in P} \int_{\Theta} g(\theta, u) p(d\theta) \; \forall \, u \in U$. Более того, оказывается, что ТПР, которые согласны с указанными условиями для схем из класса $\mathbb{Z}'_{01}(\Theta)$, будут требовать эти условия и для схем класса $\mathbb{Z}'_1(\Theta)$. Иными словами, их предпочтения на множестве решений в рассматриваемом случае определяют предпочтения на всех решениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михалевич В.М. О некоторых классах правил выбора предпочтений в задачах принятия решения // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 6. — С. 140–154.
2. Иваненко В.И., Лабковский В.А. Проблема неопределенности в задачах принятия решений. — К.: Наук. думка, 1990. — 135 с.
3. Эдвардс Р.Э. Функциональный анализ. Теория и приложения / Пер. с англ. — М.: Мир, 1969. — 1071 с.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1962. — 895 с.

Поступила 15.12.2009