УДК 519.21, 519.713

А.С. БЫЧКОВ, Е.В. ИВАНОВ

ОПТИМАЛЬНАЯ НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ЗНАЧЕНИЙ ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕРЫ ВОЗМОЖНОСТИ НА БУЛЕАН МНОЖЕСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ

Ключевые слова: *теория возможностей, продолжение меры возможности, сходимость нечетких перцептивных элементов.*

ВВЕДЕНИЕ

Для моделирования неопределенностей в [1–3] предлагается применять теорию возможностей. В этих работах вводится понятие мер возможности, необходимости и основные аксиомы построения пространства возможностей.

Одним из фундаментальных результатов теории возможностей является теорема о продолжении меры возможности из одного класса событий на более широкий класс. Она формулируется в терминах верхней меры возможности, которая дает верхнюю оценку для всех продолжений меры возможности на булеан множества элементарных событий. В литературе по теории возможности обычно не уделяется внимания получению нижних оценок для продолжений мер возможности, хотя они полезны для проверки существования моделей нечетких перцептивных элементов и процессов.

В данной статье введено понятие нижней меры возможности как оптимальной нижней оценки продолжения меры возможности и показано, что оно может быть использовано для того, чтобы в простой форме сформулировать условия существования общего продолжения двух мер возможности.

ОЦЕНКА ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕРЫ ВОЗМОЖНОСТИ

Пусть X — непустое множество (пространство элементарных событий), $\mathbf{A}$ — класс подмножеств X, который содержит $\varnothing$ и X (множество составных событий). Обозначим $L=[0,1]$ возможностную шкалу, $\vee$, $\wedge$ — операции максимума и минимума на ней, N — множество натуральных чисел.

Введем некоторые определения.

Определение 1. Полностью аддитивной мерой возможности на классе множеств $\mathbf{A}$ называется функция $P:\mathbf{A}\to[0,1]$, удовлетворяющая условию

$$P\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)=\sup_{t\in T} P(A_t)$$

для каждого семейства $\{A_t \mid t\in T\}$ множеств из класса $\mathbf{A}$ такого, что $\bigcup\limits_{t\in T} A_t\in\mathbf{A}$.

Далее, если не сказано иначе, меры возможности полагаем полностью аддитивными.

Мера возможности P называется нормированной, если $P(X)=1$ и $P(\varnothing)=0$.

Определение 2. P-моделью теории возможностей называется тройка $(X,\mathbf{A},P)$, где $\{0,X\}\subseteq\mathbf{A}\subseteq 2^X$, P — мера возможности на классе множеств $\mathbf{A}$; P-модель также будем называть пространством возможностей.

Для дальнейшего понадобится техника продолжения меры возможности с одного класса множеств на более широкий класс множеств. Проблема продолжения меры возможности рассматривалась многими авторами [4–7]. Будем использовать следующий вариант теоремы о продолжении [4].

Определение 3. Функция $P^*(A) = \inf \left\{ \sup\limits_{t \in T} P(A_t) \mid \bigcup_{t \in T} A_t \supseteq A \right\}$, где нижняя грань берется по семействам множеств $(A_t)_{t \in T}$ из класса **A**, покрывающих множество A, называется внешней мерой возможности, соответствующей функции $P : \mathbf{A} \to [0, 1]$.

Теорема 1 (о продолжении меры возможности). 1. Функцию P, определенную на классе множеств $\mathbf{A} \subseteq 2^X$, можно продолжить до меры возможности на 2^X тогда и только тогда, когда для произвольного семейства множеств $(A_j)_{j \in J}$, $A_j \in \mathbf{A}$, и множества $A \in \mathbf{A}$ выполняется импликация

$$A \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j \Rightarrow P(A) \le \sup_{j \in J} P(A_j)$$

(данное свойство называется P-совместимостью/P-consistency).

2. Если P имеет некоторое продолжение $\overline{P}$ до меры возможности на 2^X, то P^* — продолжение P до меры возможности на 2^X и $\forall A \subseteq X \ \overline{P}(A) \le P^*(A)$.

Следствие 1. Если класс множеств **A** замкнут относительно конечных пересечений и P — мера возможности на **A**, то P^* является ее (наибольшим) продолжением до меры возможности на 2^X.

Следствие 2. Если класс множеств $\mathbf{A} \subseteq 2^X$ вполне упорядочен отношением $\supseteq$ (т.е. каждое непустое множество элементов **A** содержит наибольший по включению элемент) и P — неубывающая функция на **A** ($P(A) \subseteq P(B)$ при $A \subseteq B$), то P имеет продолжение до меры возможности на 2^X.

Доказательство. Если выполняется включение $A \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$, где $(A_j)_{j \in J}$, $A_j \in \mathbf{A}$, то существует $j_0 \in J$ такой, что $A_{j_0} = \bigcup_{j \in J} A_j$, поэтому $P(A) \le P(A_{j_0}) \le \sup\limits_{j \in J} P(A_j)$.

Следствие доказано.

Пусть $(X, \mathbf{A}, P)$ — пространство возможностей с нормированной мерой возможности такое, что мера возможности P имеет продолжение до меры возможности на 2^X. Предположим также, что P^* — внешняя мера возможности, соответствующая P. Определим функцию $P_* : 2^X \to L$ для каждого $D \subseteq X$ равенством

$$P_*(D) = \sup \{ P(A) \mid A \in \mathbf{A}, P(A) > P^*(A \setminus D) \}$$

(в этой записи предполагается $\sup \varnothing = 0$).

Назовем P_* нижней мерой возможности, соответствующей P.

Определим функцию $P_0 : 2^X \to L$ для каждого $D \subseteq X$ равенством

$$P_0(D) = \sup \{ P(A) \mid A \in \mathbf{A}, A \subseteq D \}.$$

Назовем P_* внутренней мерой возможности, соответствующей P.

Замечание 1. В теории меры внутренняя мера обычно обозначается символом μ_*, однако удобнее использовать аналогичное обозначение для нижней, а не внутренней меры возможности.

Функцию $F: 2^X \to L$ назовем:

— нормированной, если $F(\varnothing)=0$ и $F(X)=0$;

— изотонной, если из включения $A \subseteq B$ следует неравенство $F(A) \le F(B)$.

Утверждение 1. Выполняются следующие свойства:

1) функции P_0 и P_* нормированные и изотонные;

2) для каждого $D \subseteq X$ имеем $P_0(D) \le P_*(D)$;

3) для каждого $A \in \mathbf{A}$ имеем $P_0(A) = P(A)$.

Доказательство. 1. Функции P_0 и P_* нормированные, поскольку $\{\varnothing, X\} \subseteq \mathbf{A}$.

Пусть $D_1 \subseteq D_2 \subseteq X$ и $A \in \mathbf{A}$. Если $A \in \mathbf{A}$ и $A \subseteq D_1$, то $A \subseteq D_2$, поэтому $P(A) \le P_0(D_2)$. Отсюда $P_0(D_1) \le P_0(D_2)$ и, следовательно, P_0 изотонная. Значит, $A \setminus D_1 \supseteq A \setminus D_2$ и $P^*(A \setminus D_1) \ge P^*(A \setminus D_2)$. Следовательно, $U_1 = \{A \in \mathbf{A} \,|\, P(A) > P^*(A \setminus D_1)\} \subseteq \{A \in \mathbf{A} \,|\, P(A) > P^*(A \setminus D_2)\} = U_2$, откуда $P_*(D_1) = \sup\{P(A) \,|\, A \in U_1\} \le \sup\{P(A) | A \in U_2\} = P_*(D_2)$, поэтому P_* изотонная.

2. Пусть $D \subseteq X$, $A \in \mathbf{A}$ и $A \subseteq D$. Тогда либо $P(A)=0$, либо $P(A) > 0 = P^*(\varnothing) = P^*(A \setminus D)$, поэтому $P(A) \le \sup\{P(A') \,|\, A' \in \mathbf{A}, P(A') > P^*(A' \setminus D)\} = P_*(D)$. Отсюда $P_0(D) \le P_*(D)$.

3. Утверждение следует из монотонности P.

Утверждение доказано.

Замечание 2. Следующий пример показывает, что равенство $P_0(D) = P_*(D)$ не обязательно выполняется для каждого $D \subseteq X$. Положим $X = \{0,1,2\}$, $\mathbf{A} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, X\}$, $P(\varnothing) = P(\{0\}) = P(\{1\}) = 0$, $P(X)=1$. Тогда $P_0(\{2\})=0$ и $P_*(\{2\})=1$.

Лемма 1 (о продолжении меры возможности с условием). Пусть D — подмножество X, $\delta \in L$. Тогда P можно продолжить до меры возможности $\overline{P}$ на 2^X такой, что $\overline{P}(D) = \delta$ тогда и только тогда, когда $\delta \le P^*(D)$ и выполняется хотя бы одно из следующих (эквивалентных) условий:

1) если $A, (B_t)_{t \in T}$ — множества из класса $\mathbf{A}$ такие, что $A \subseteq D \cup \bigcup_{t \in T} B_t$, то $P(A) \le \delta \vee \sup\limits_{t \in T} P(B_t)$;

2) $\forall A \in \mathbf{A}\ P(A) > \delta \Rightarrow P^*(A \setminus D) = P(A)$;

3) $P_*(D) \le \delta$.

Доказательство. Докажем утверждение леммы для условия 1.

Необходимость. Предположим, что продолжение $\overline{P}$ существует. Выберем множества $A, B_t \in \mathbf{A}$ такие, что $A \subseteq D \cup \bigcup_{t \in T} B_t$, тогда $\overline{P}(A) \le \overline{P}(D) \vee \sup\limits_{t \in T} \overline{P}(B_t) \le \delta \vee \sup\limits_{t \in T} P(B_t)$. Следовательно, $\delta = \overline{P}(D) \le P^*(D)$.

Достаточность. Положим $\mathbf{A}^D = \mathbf{A} \cup \{D\}$. Определим функцию P^0 на классе $\mathbf{A}^D$ равенствами $P^0(D) = \delta$ и $P^0(A) = P(A)$ при $A \in \mathbf{A}$. Пусть A^D и $(A_t^D)_{t \in T}$ — элементы $\mathbf{A}^D$. Докажем, что из включения $A^D \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t^D$ следует $P^0(A^D) \le \sup\limits_{t \in T} P^0(A_t^D)$.

Рассмотрим четыре случая:

1) элементы A^D и $(A_t^D)_{t \in T}$ принадлежат $\mathbf{A}$, тогда $A^D = \bigcup_{t \in T} (A_t^D \cap A^D)$ и $P^0(A^D) \le \sup\limits_{t \in T} P^0(A_t^D)$;

2) $A^D = D$, элементы $(A_t^D)_{t \in T}$ принадлежат **A**, тогда множества A_t^D образуют покрытие множества D, поэтому $P^0(A^D) = \delta \le P^*(D) \le \sup_{t \in T} P^0(A_t^D)$;

3) $A^D \in \mathbf{A}$ и среди элементов $(A_t^D)_{t \in T}$ есть множество D; пусть $T^0 \subseteq T$ — множество индексов t таких, что $A_t^D \in \mathbf{A}$ (возможно, пустое), тогда по условию леммы $P(A^D) = P^0(A^D) \le \delta \vee \sup_{t \in T^0} P(A_t^D) = \sup_{t \in T} P^0(A_t^D)$;

4) $A^D = D$ и среди элементов $(A_t^D)_{t \in T}$ есть множество D, тогда $P^0(A^D) \le$ $\le \sup_{t \in T} P^0(A_t^D)$.

Таким образом, выполняются условия теоремы 1 для функции P^0 на классе $\mathbf{A}^D$, поэтому существует продолжение P^0 до меры возможности $\overline{P}$ на 2^X. Мера возможности $\overline{P}$ является продолжением P и удовлетворяет условию $\overline{P}(D) = \delta$.

Докажем, что из условия 1 следует условие 2.

Пусть $A \in \mathbf{A}$ и $P(A) > \delta$, а $(B_t)_{t \in T}$ — произвольное покрытие множества $A \setminus D$ элементами класса **A**. Тогда $A \setminus D \subseteq \bigcup_{t \in T} B_t$, $A \subseteq D \cup \bigcup_{t \in T} B_t$ и по условию 1 $P(A) \le \delta \vee \sup_{t \in T} P(B_t)$. Учитывая $P(A) > \delta$, получаем $P(A) \le \sup_{t \in T} P(B_t)$. Таким образом, $P(A) \le P^*(A \setminus D)$, откуда $P^*(A \setminus D) = P(A)$.

Докажем, что из условия 2 следует условие 3.

Из условия 2 вытекает, что для любого множества $A \in \mathbf{A}$ такого, что $P(A) > P^*(A \setminus D)$, выполняется неравенство $P(A) \le \delta$. Тогда $P_*(D) = \sup\{P(A) \mid A \in \mathbf{A}$, $P(A) > P^*(A \setminus D)\} \le \delta$.

Докажем, что из условия 3 следует условие 1.

Пусть $P_*(D) \le \delta$ и A, $(B_t)_{t \in T}$ — множества из класса **A** такие, что $A \subseteq D \cup \bigcup_{t \in T} B_t$. Тогда $A \setminus D \subseteq \bigcup_{t \in T} B_t$, т.е. множества $(B_t)_{t \in T}$ образуют покрытие множества $A \setminus D$, поэтому $P^*(A \setminus D) \le \sup_{t \in T} P(B_t)$. Если $P(A) \le P^*(A \setminus D)$, то $P(A) \le \sup_{t \in T} P(B_t)$. Если $P(A) > P^*(A \setminus D)$, то по условию 3 $P(A) \le \delta$. В обоих случаях выполняется неравенство $P(A) \le \delta \vee \sup_{t \in T} P(B_t)$.

Лемма доказана.

Следствие 1. Для каждого $D \subseteq X$ имеем $P_*(D) \le P^*(D)$.

Доказательство следует из того, что P^* является мерой возможности.

Следствие 2. Для каждого $A \in \mathbf{A}$ имеем $P_*(A) = P(A)$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathbf{A}$. Поскольку для произвольного продолжения $\overline{P}$ функции P до меры возможности на 2^X выполняется $\overline{P}(A) = P(A)$, имеем $P_*(A) = P(A)$.

Замечание 3. Функция P_* может не быть мерой возможности, как показывает следующий пример. Положим $X = \{0, 1\}$, $\mathbf{A} = \{\varnothing, X\}$, $P(\varnothing) = 0$, $P(X) = 1$. Тогда $P^*(\{0\}) = P^*(\{1\}) = 1$ и $P_*(\{0\}) = P_*(\{1\}) = 0$, но $P_*(\{0,1\}) = 1$.

Замечание 4. Если P и Q — P-совместимые меры возможности на $\mathbf{A} \subseteq 2^X$ и

$P(A) \le Q(A)$ для каждого $A \in \mathbf{A}$, то не обязательно $P_*(Y) \le Q_*(Y)$ для каждого $Y \subseteq X$. В качестве примера положим $X = \{0, 1\}$, $\mathbf{A} = \{\varnothing, \{0\}, X\}$, P и Q — нормированные меры возможности на $\mathbf{A}$ такие, что $P(\{0\}) = 0$, $Q(\{0\}) = 1$. Тогда $P_*(\{0\}) = 1$ и $Q_*(\{0\}) = 0$.

Теорема 2 (о существовании общего продолжения мер возможности). Пусть $(X, \mathbf{A}, P)$ и $(X, \mathbf{B}, Q)$ — пространства возможностей с нормированными мерами возможности. Предположим, что меры возможности P и Q имеют продолжения до мер возможности на 2^X. Тогда P и Q имеют общее продолжение до меры возможности на 2^X тогда и только тогда, когда $P_*(A) \vee Q_*(A) \le P^*(A) \wedge Q^*(A)$ для каждого $A \subseteq X$.

Доказательство. Необходимость следует из леммы о продолжении меры возможности с условием.

Достаточность. Положим $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. Для каждого $C \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ имеем $P(A) \vee Q(A) \le P(A) \wedge Q(A)$, поэтому $P(A) = Q(A)$. На основании этого определим функцию $R(C) = \begin{cases} P(C), & C \in \mathbf{A}, \\ Q(C), & C \in \mathbf{B}, \end{cases}$ $C \in \mathbf{C}$. Пусть $A, (A_t)_{t \in T}$ — элементы $\mathbf{A}$, $(B_t)_{t \in T'}$ — элементы $\mathbf{B}$ такие, что $A \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \cup \bigcup_{t \in T'} B_t$. Из последнего включения вытекает $A \setminus \bigcup_{t \in T} A_t \subseteq \bigcup_{t \in T'} B_t$. Обозначим $D = A \setminus \bigcup_{t \in T} A_t$. Из неравенства $P_*(D) \vee Q_*(D) \le P^*(D) \wedge Q^*(D)$ и леммы о продолжении меры возможности с условием следует, что существуют меры возможности $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ на 2^X, которые являются продолжениями соответственно P и Q и удовлетворяют условию $\overline{P}(D) = \overline{Q}(D) = P_*(D) \vee Q_*(D)$. Тогда $\overline{P}(D) = \overline{Q}(D) \le \overline{Q}(\bigcup_{t \in T'} B_t) = \sup\limits_{t \in T'} Q(B_t)$, откуда

$$P(A) \le \overline{P}(A) \vee \overline{P}\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) = \overline{P}(D) \vee \overline{P}\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) \le \sup_{t \in T} P(A_t) \vee \sup_{t \in T'} Q(B_t).$$

Переставляя местами классы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, получаем, что если $(A_t)_{t \in T}$ — элементы $\mathbf{A}$, B, $(B_t)_{t \in T'}$ — элементы $\mathbf{B}$ и $B \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \cup \bigcup_{t \in T'} B_t$, то $Q(B) \le \sup\limits_{t \in T} P(A_t) \vee$ $\vee \sup\limits_{t \in T'} Q(B_t)$. Таким образом, если C, $(C_t)_{t \in T}$ — элементы $\mathbf{C}$ такие, что $C \subseteq \bigcup_{t \in T} C_t$, то $R(C) \le \sup\limits_{t \in T} R(C_t)$. Тогда согласно теореме о продолжении меры возможности функция R имеет продолжение до меры возможности на 2^X, которое одновременно является общим продолжением P и Q.

Теорема доказана.

Заметим, что условие $P_*(A) \vee Q_*(A) \vee R_*(A) \le P^*(A) \wedge Q^*(A) \wedge R^*(A)$, $A \subseteq X$, не является достаточным для существования общего продолжения трех мер возможности P, Q, R.

Лемма 2. Пусть P — нормированная мера возможности на классе множеств $\mathbf{A} \subseteq 2^X$, $\{\varnothing, X\} \subseteq \mathbf{A}$, удовлетворяющая условию P-совместимости. Пусть $\mathbf{G} \subseteq 2^X$ — класс множеств, вполне упорядоченный отношением $\supseteq$, который содержит $\varnothing$ и X, а $Q: \mathbf{G} \to L$ — тотальная изотонная функция. Тогда P и Q имеют общее продолжение до меры возможности на 2^X тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $P_*(G) \le Q(G)$ для каждого $G \in \mathbf{G}$;

2) из неравенства $Q(G') < Q(G)$, где $G, G' \in \mathbf{G}$, следует $Q(G) \le P^*(G \setminus G')$.

Доказательство. Необходимость. По теореме о существовании общего продолжения мер возможности $P_*(A) \vee Q_*(A) \le P^*(A) \wedge Q^*(A)$ для всех $A \subseteq X$. В частности, $P_*(G) \le Q^*(G) = Q(G)$ для каждого $G \in \mathbf{G}$.

Пусть для множеств $G, G' \in \mathbf{G}$ выполняется неравенство $Q(G') < Q(G)$. Тогда $Q(G) > Q(G \setminus (G \setminus G')) = Q^*(G \setminus (G \setminus G'))$, откуда $Q(G) \le Q_*(G \setminus G') \le P^*(G \setminus G')$.

Достаточность. Согласно следствию 2 из теоремы о продолжении меры возможности функция Q имеет продолжение до (нормированной) меры возможности на 2^X. Выберем произвольное подмножество $Y \subseteq X$. Из монотонности P_* следует

$$P_*(Y) \le \inf \{P_*(G) \,|\, G \in \mathbf{G}, G \supseteq Y\} \le \inf \{Q(G) \,|\, G \in \mathbf{G}, G \supseteq Y\} =$$

$$= \inf \left\{ \sup_{t \in T} Q(G_t) \,|\, G_t \in \mathbf{G}, \bigcup_{t \in T} G_t \supseteq Y \right\} = Q^*(Y).$$

Пусть $G \in \mathbf{G}$ и $Q(G) > Q^*(G \setminus Y)$. Тогда существует множество $G' \in \mathbf{G}$ такое, что $G \setminus Y \subseteq G' \subset G$ и $Q(G') < Q(G)$. По условию 2 $Q(G) \le P^*(G \setminus G') \le P^*(G \cap Y) \le P^*(Y)$. Отсюда $Q_*(Y) = \sup \{ Q(G) \,|\, G \in \mathbf{G}, Q(G) > Q^*(G \setminus Y)\} \le P^*(Y)$.

Таким образом, для каждого $Y \subseteq X$ $P_*(Y) \vee Q_*(Y) \le P^*(Y) \wedge Q^*(Y)$ и согласно теореме о существовании общего продолжения мер возможности P и Q имеют общее продолжение до меры возможности на 2^X.

Лемма доказана.

Утверждение 2. Пусть $A \subseteq B \subseteq X$. Тогда $P_*(B) \le P^*(B \setminus A) \Leftrightarrow P_*(A) \le$ $\le P^*(B \setminus A)$.

Доказательство. Необходимость следует из того, что $P_*(A) \le P_*(B)$.

Достаточность. Пусть $P_*(A) \le P^*(B \setminus A)$. Тогда существует мера возможности $\overline{P}$ на 2^X, которая является продолжением меры возможности P на 2^X и удовлетворяет условию $\overline{P}(A) = P_*(A)$. Следовательно, $P_*(B) \le \overline{P}(B) =$ $= \overline{P}(B \setminus A) \vee \overline{P}(A) = \overline{P}(B \setminus A) \vee P_*(A) \le P^*(B \setminus A)$.

Утверждение доказано.

Следствие. Пусть $(G_n)_{n \ge 1}$ — последовательность множеств такая, что $X \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$ Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $P_*(G_n) \le P^*(G_n \setminus G)$ для всех $n \ge 1$;

2) $P_*(G) \le P^*(G_n \setminus G)$ для всех $n \ge 1$, где $G = \bigcap_{s \ge 1} G_s$.

Для доказательства достаточно положить $A = G$ и $B = G_n$.

Утверждение 3. Пусть $(G_n)_{n \ge 1}$ — последовательность множеств такая, что $X \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$ Обозначим $G = \bigcap_{s \ge 1} G_s$. Пусть $P_*(G_n) \le P^*(G_n \setminus G)$ для всех $n \ge 1$ и $\lim\limits_{n \to \infty} P_*(G_n) = 0$. Тогда существует подпоследовательность множеств $(G_{n_k})_{k \ge 1}$ такая, что $P_*(G_{n_k}) \le P^*(G_{n_k} \setminus G_{n_{k+1}})$ для всех $k \ge 1$.

Доказательство. Для каждого $n \ge 1$ имеем $P_*(G_n) \le P^*(G_n \setminus G) =$ $= \sup\limits_{s \ge n} P^*(G_s \setminus G_{s+1})$.

Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что для некоторого $n_0 \ge 1$ имеем $P^*(G_i \setminus G_{i+1}) < \sup\limits_{s \ge n_0} P^*(G_s \setminus G_{s+1})$ для всех $i \ge n_0$. Обозначим $p = \sup\limits_{s \ge n_0} P^*(G_s \setminus G_{s+1}) > 0$. Тогда $P^*(G_n \setminus G) = \sup\limits_{s \ge n} P^*(G_s \setminus G_{s+1}) = p > p/2$ для всех $n \ge n_0$. Поэтому существует возрастающая последовательность индексов $(n_k)_{k \ge 1}$ такая, что $P^*(G_{n_k} \setminus G_{n_{k+1}}) \ge P^*(G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}) > p/2$ для всех $k \ge 1$. Кроме того, существует $k_0 \in N$ такое, что для всех $k \ge k_0$ имеем $P_*(G_{n_k}) < p/2$. Следовательно, $P_*(G_{n_k}) \le P^*(G_{n_k} \setminus G_{n_{k+1}})$ для всех $k \ge k_0$.

2. Предположим, что для каждого $n \ge 1$ существует индекс $i_n \ge n$ такой, что $P^*(G_{i_n} \setminus G_{i_n+1}) = \sup\limits_{s \ge n} P^*(G_s \setminus G_{s+1})$. Тогда $P_*(G_n) \le P^*(G_n \setminus G) = P^*(G_{i_n} \setminus G_{i_n+1}) \le \le P^*(G_n \setminus G_{i_n+1})$ для всех $n \ge 1$. Построим (возрастающую) последовательность индексов $(m_k)_{k \ge 1}$ таким образом: $m_1 = 1$, $m_{k+1} = i_{m_k} + 1$. Тогда для каждого $k \ge 1$ имеем $P_*(G_{m_k}) \le P^*(G_{m_k} \setminus G_{i_{m_k}+1}) = P^*(G_{m_k} \setminus G_{m_{k+1}})$.

Утверждение доказано.

Следствие. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} P_*(G_n) = 0$. Тогда существует возрастающая последовательность индексов $(n_k)_{k \ge 1}$ такая, что $P_*(G_{n_k}) \le P^*(G_{n_k} \setminus G_{n_{k+1}})$ для всех $k \in N$ и $P^*(X \setminus G_{n_1}) = 1$.

Доказательство. Поскольку $P_*(G) \le P_*(G_n)$, имеем $P_*(G) = 0$ и, следовательно, $P^*(G_n \setminus G) \ge P_*(G)$ для каждого $n \in N$. Отсюда согласно следствию из утверждения 2 $P^*(G_n \setminus G) \ge P_*(G_n)$ для каждого $n \in N$. Тогда на основании утверждения 3 существует подпоследовательность множеств $(G_{n_k})_{k \ge 1}$ такая, что $P_*(G_{n_k}) \le P^*(G_{n_k} \setminus G_{n_{k+1}})$ для всех $k \ge 1$.

Предположим, что для всех $k \ge 1$ имеем $P^*(X \setminus G_{n_k}) < 1 = P(X)$. Поскольку $P_*(G_{n_k}) = \sup\{P(A) \mid A \in \mathbf{A}, P(A) > P^*(A \setminus G_{n_k})\}$ и $\lim\limits_{k \to \infty} P_*(G_{n_k}) = 0$, начиная с некоторого индекса k_0 выполняется равенство $1 = P(X) = P^*(X \setminus G_{n_k})$. Тогда последовательность индексов n_{k+k_0} будет искомой.

Следствие доказано.

Теорема 3. Пусть P — нормированная мера возможности на классе множества $\mathbf{A} \subseteq 2^X$, $\{\varnothing, X\} \subseteq \mathbf{A}$, удовлетворяющая условию P-совместимости. Пусть $(D_n)_{n \ge 1}$ — последовательность множеств такая, что $X \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \ldots$ Тогда мера возможности $\overline{P}$ на 2^X, которая является продолжением P и удовлетворяет условию $\lim\limits_{n \to \infty} \overline{P}(G_n) = 0$, существует тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n \to \infty} P_*(G_n) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть мера возможности $\overline{P}$ — продолжение P на 2^X и $\lim\limits_{n \to \infty} \overline{P}(G_n) = 0$. Из неравенства $P_*(G_n) \le \overline{P}(G_n)$ следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} P_*(G_n) = 0$, т.е. условие теоремы выполняется.

Достаточность. Согласно следствию из утверждения 3 существует подпоследовательность множеств $(G_{n_k})_{k\ge 1}$ такая, что $P_*(G_{n_k}) \le P^*(G_{n_k} \setminus G_{n_{k+1}})$ для всех $k \ge 1$ и $P^*(X \setminus G_{n_1}) = 1$.

Положим $\mathbf{G} = \{\varnothing, X\} \cup \{G_{n_k} \mid k \ge 1\}$. Очевидно, что класс $\mathbf{G}$ вполне упорядочен отношением $\supseteq$. Определим функцию $Q: \mathbf{G} \to L$ как сужение $Q = P_*|_{\mathbf{G}}$. Функция Q изотонная и удовлетворяет условию $P_*(G) \le Q(G)$ для всех $G \in \mathbf{G}$.

Пусть $G, G' \in \mathbf{G}$ — множества такие, что $Q(G') < Q(G)$. Возможны следующие варианты:

1) $G' = \varnothing$, тогда неравенство $Q(G) \le P^*(G \setminus G')$ выполняется;

2) $G = X$, для всех $k \in N$ $P^*(X \setminus G_{n_k}) \ge P^*(X \setminus G_{n_1}) = 1$, поэтому $Q(G) \le P^*(G \setminus G')$;

3) существуют индексы k, l такие, что $G = G_{n_k}$ и $G' = G_{n_l}$, тогда $l \ge k+1$ и $Q(G) = P_*(G_{n_k}) \le P^*(G_{n_k} \setminus G_{n_{k+1}}) \le P^*(G_{n_k} \setminus G_{n_l}) = P^*(G \setminus G')$.

Во всех случаях выполняется неравенство $Q(G) \le P^*(G \setminus G')$. Тогда из леммы 2 следует, что существует мера возможности $\overline{P}$ на 2^X, которая является общим продолжением P и Q. Поскольку $\overline{P}|_{\mathbf{G}} = P_*|_{\mathbf{G}}$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{P}(G_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P_*(G_n) = 0$.

Теорема доказана.

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НЕЧЕТКИХ ПЕРСЕПТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Применим данные результаты для получения критерия существования модели сходимости по возможности для последовательности распределений нечетких персептивных элементов. Основные определения, касающиеся нечетких персептивных элементов и последовательностей нечетких персептивных элементов, можно найти в [8].

Пусть M — полное метрическое пространство с метрикой d. Будем полагать, что нуль является граничной точкой области значений d.

Обозначим r_n некоторую убывающую последовательность чисел, принадлежащих области значений метрики d, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ и $\forall n \in N$ $r_n > 0$.

Введем следующие обозначения :

$$D_n^k = \{ y_{(\cdot)} \in M^{\omega} \mid \exists i, j \ge n: d(y_i, y_j) \ge r_k \},\ n, k \in N,$$

$$E_n^y = \{ y_{(\cdot)} \in M^{\omega} \mid y_n = y \},\ n \in N,\ y \in M,$$

$$\mathbf{E} = \{\varnothing, X\} \cup \{ E_n^y \mid n \in N, y \in M \},$$

где M^{ω} — пространство последовательностей над M.

Пусть $f_n: M \to L$, $n \in N$, — последовательность распределений нечетких персептивных элементов, принимающих значения в пространстве M.

Определение 4. Моделью сходимости по возможности последовательности распределений нечетких персептивных элементов называется пара $(PS, \xi_{(\cdot)})$, где PS — пространство возможностей с нормированной мерой возможности, $\xi_{(\cdot)}$ — последовательность нечетких персептивных элементов на пространстве PS такая, что для каждого $n \in N$ элемент f_n является распределением ξ_n и последовательность $\xi_{(\cdot)}$ сходится по возможности.

Лемма 3. Последовательность распределений $(f_n)_{n\ge 1}$ имеет модель независимости.

Доказательство. Обозначим $X = M^{\omega}$ и определим тотальную функцию

$F: 2^X \to L$ равенством $F(Y) = \sup\left\{\inf_{n\ge 1} f_n(y_n) \mid y_{(\cdot)} \in Y\right\}$. Тогда для каждой системы $(Y_t)_{t\in T}$ элементов 2^X выполняется равенство $F(\bigcup_{t\in T} Y_t) = \sup_{t\in T} F(Y_t)$. Кроме того, $F(\varnothing) = 0$.

Для каждого $n \in N$ имеем $\sup_{n\ge 1} f_n(y) = 1$, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $\nu_{(\cdot)}^{\varepsilon} \in M^{\omega}$ такой, что $\inf_{n\ge 1} f_n(\nu_n^{\varepsilon}) > 1 - \varepsilon$, откуда $F(\{\nu_{(\cdot)}^{\varepsilon} | \varepsilon > 0\}) = 1$.

Таким образом, F — нормированная мера возможности на 2^X.

Используя определенные ранее элементы $\nu_{(\cdot)}^{\varepsilon}$, для каждого $\varepsilon > 0$ получаем неравенство $f_n(y) \wedge \inf_{k\ge 1} f_k(\nu_k^{\varepsilon}) \le F(E_n^y) \le f_n(y)$, откуда $F(E_n^y) = f_n(y)$ для всех $n \in N, y \in M$.

Пусть $PS = (X, 2^X, F)$ — пространство возможностей. Определим на нем последовательность нечетких персептивных элементов ξ_n равенством $\xi_n(y_{(\cdot)}) = y_n$. Тогда $F\{\xi_n = y\} = F(E_n^y) = f_n(y)$ и $F\{\forall k \in N \;\; \xi_k = y_k\} = F(\{y_{(\cdot)}\}) = \inf_{n\ge 1} f_n(y_n)$, поэтому пара $(PS, \xi_{(\cdot)})$ является моделью независимости последовательности распределений $(f_n)_{n\ge 1}$.

Лемма доказана.

Из доказательства леммы 3 следует, что бинарное отношение $\Gamma_f = \{(\varnothing, 0), (M^{\omega}, 1)\} \cup \{(E_n^y, f_n(y)) \mid n \in N, y \in M\} \subseteq \mathbf{E} \times L$ является функциональным. Соответствующую ему функцию обозначим как $Q_f : \mathbf{E} \to L$.

По определению $Q_f(E_n^y) = f_n(y)$ при $n \in N, y \in M$ и $Q_f(\varnothing) = 0$, $Q_f(M^{\omega}) = 1$.

Из доказательства леммы 3 также вытекает, что Q_f — нормированная мера возможности и имеет продолжение до меры возможности на $2^{M^{\omega}}$ (т.е. функции F).

Лемма 4. Последовательность распределений $(f_n)_{n\ge 1}$ имеет модель сходимости по возможности тогда и только тогда, когда существует система последовательностей натуральных чисел $((n_k^s)_{k\ge 1})_{s\ge 1}$ и мера возможности $\overline{Q}_f$ на $2^{M^{\omega}}$, которая является продолжением меры возможности Q_f, такая, что $\lim_{s\to\infty} \overline{Q}_f(G_s) = 0$, где $G_s = \bigcup_{k\ge 1} D_{n_k^s}^k$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $PS = (X, 2^X, P)$ и $(PS, \xi_{(\cdot)})$ — модель сходимости по возможности последовательности распределений $(f_n)_{n\ge 1}$.

Положим $\overline{Q}_f(Y) = P\{\exists y_{(\cdot)} \in Y \; \forall n \in N : \xi_n = y_n\}$, $Y \subseteq M^{\omega}$. Очевидно, что $\overline{Q}_f$ является мерой возможности на $2^{M^{\omega}}$. Из равенства $\overline{Q}_f(E_n^y) = Q_f(E_n^y)$ следует, что $\overline{Q}_f$ — продолжение Q_f. Из критерия Коши сходимости последовательности нечетких персептивных элементов вытекает, что для каждого $k \in N$ $\lim_{n\to\infty} P\{\exists i, j \ge n : d(\xi_i, \xi_j) \ge r_k\} = 0$, поэтому $\lim_{n\to\infty} \overline{Q}_f\{y_{(\cdot)} \mid \exists i, j \ge n : d(y_i, y_j) \ge r_k\} = \lim_{n\to\infty} \overline{Q}_f(D_n^k) = 0$.

Последнее равенство можно записать в виде $\forall s \in N$, $\forall k \in N$ $\exists n \in N$: $\overline{Q}_f(D_n^k) < s^{-1}$, откуда получаем, что существует система последовательностей

$((n_k^s)_{k\geq 1})_{s\geq 1}$ такая, что $\overline{Q}_f(D_{n_k^s}^k) < s^{-1}$ для каждых $s, k \in N$. Тогда $\overline{Q}_f(G_s) =$ $= \sup\limits_{k\geq 1} \overline{Q}_f(D_{n_k^s}^k) < s^{-1}$ и, переходя к пределу по s, получаем $\lim\limits_{s\to\infty} \overline{Q}_f(G_s) = 0$.

Достаточность. Пусть $X = M^\omega$, $PS = (X, 2^X, \overline{Q}_f)$ — пространство возможностей и $\xi_n(y_{(\cdot)}) = y_n$ — последовательность нечетких персептивных элементов на PS. Пусть также $((n_k^s)_{k\geq 1})_{s\geq 1}$ — система последовательностей такая, что $\lim\limits_{s\to\infty} \overline{Q}_f(G_s) = 0$, $G_s = \bigcup_{k\geq 1} D_{n_k^s}^k$. Тогда существует последовательность $(s_l)_{l\geq 1}$ такая, что $\overline{Q}_f(G_{s_l}) \leq l^{-1}$ для всех $l \in N$. Обозначим $m_k^i = n_k^{s_i}$. Тогда $\forall l, k \in N$ $\overline{Q}_f(D_{m_k^l}^k) \leq l^{-1}$, откуда

$$\forall l, k \in N \;\; \overline{Q}_f\{y_{(\cdot)} \in M^\omega \mid \exists i, j \geq m_k^l : d(y_i, y_j) \geq r_k\} \leq l^{-1}$$

и выполняется неравенство $\forall l, k \in N$ $P\{\exists i, j \geq m_k^l : d(\xi_i, \xi_j) \geq r_k\} \leq l^{-1}$. Отсюда $\forall c > 0$, $\varepsilon > 0$ $\exists m \in N$: $P\{\exists i, j \geq m : d(\xi_i, \xi_j) > c\} < \varepsilon$ и получаем неравенство $\forall c > 0 \lim\limits_{m\to\infty} P\{\exists i, j \geq m : d(\xi_\iota, \xi_j) > c\} = 0$.

Таким образом, из критерия Коши сходимости последовательности нечетких персептивных элементов и полноты пространства M вытекает, что последовательность ξ_n сходится по возможности.

Поскольку $\overline{Q}_f$ является продолжением Q_f, имеем $P\{\xi_n = y\} = \overline{Q}_f(E_n^y) =$ $= Q_f(E_n^y) = f_n(y)$ для всех $n \in N$, $y \in M$. Следовательно, пара $(PS, \xi_{(\cdot)})$ — модель сходимости по возможности системы распределений $(f_n)_{n\geq 1}$.

Лемма доказана.

Теорема 4. Последовательность распределений $(f_n)_{n\geq 1}$ имеет модель сходимости по возможности тогда и только тогда, когда существует система последовательностей натуральных чисел $((n_k^s)_{k\geq 1})_{s\geq 1}$ такая, что выполняются следующие условия:

1) $n_k^s \leq n_k^{s+1}$ для всех $k, s \in N$;

2) $\lim\limits_{s\to\infty} (Q_f)_*(G_s) = 0$, где $G_s = \bigcup_{k\geq 1} D_{n_k^s}^k$.

Доказательство. Необходимость. Согласно лемме 4 существует система последовательностей натуральных чисел $((n_k^s)_{k\geq 1})_{s\geq 1}$ и мера возможности $\overline{Q}_f$ на 2^{M^ω}, которая является продолжением меры возможности Q_f, такая, что $\lim\limits_{s\to\infty} \overline{Q}_f(G_s) = 0$, где $G_s = \bigcup_{k\geq 1} D_{n_k^s}^k$. Положим $m_k^s = \max\limits_{i=\overline{1,s}} n_k^i$ для $s, k \in N$ и $G'_s = \bigcup_{k\geq 1} D_{m_k^s}^k$. Поскольку из неравенства $n' \geq n$ следует включение $D_{n'}^k \subseteq D_n^k$, имеем $G'_s \subseteq G_s$ при $s \in N$, $G'_1 \supseteq G'_2 \supseteq \ldots$ Кроме того, $(Q_f)_*(G'_s) \leq (Q_f)_*(G_s)$, откуда $\lim\limits_{s\to\infty} \overline{Q}_f(G'_s) = 0$.

Применим теорему 3 (необходимость) к мере возможности Q_f на **E** и последовательности вложенных множеств $(G'_s)_{s\geq 1}$ и получим $\lim\limits_{s\to\infty} (Q_f)_*(G'_s) = 0$.

Достаточность. Пусть $((n_k^s)_{k\geq 1})_{s\geq 1}$ — система последовательностей такая, что выполняются условия 1, 2. Поскольку из неравенства $n' \geq n$ следует включение $D_{n'}^k \subseteq D_n^k$, имеем $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$ Применив теорему 3 (достаточность) к мере возможности Q_f на **E** и последовательности вложенных множеств $(G_s)_{s\geq 1}$, приходим к выводу, что существует мера возможности $\overline{Q}_f$ на $2^{M^{\omega}}$, которая является продолжением меры возможности Q_f и удовлетворяет условию $\lim\limits_{s\to\infty} \overline{Q}_f(G_s)=0$. Тогда согласно лемме 4 последовательность распределений $(f_n)_{n\geq 1}$ имеет модель сходимости по возможности.

Теорема доказана.

Следствие. Представляя выражения для верхних и нижних мер возможности с помощью функций f_n, легко получить, что условия теоремы 4 эквивалентны следующим:

1) $n_k^s \leq n_k^{s+1}$ для всех $k, s \in N$;

2) $\inf\limits_{s\geq 1} \sup \{ f_n(y) \,|\, (n, y) \in N \times M, f_n(y) > \sup\limits_{y_{(\,.\,)} \notin G_s,\ y_n = y} \inf\limits_{i\geq 1} f_i(y_i) \} = 0$.

Заметим, что данные условия могут быть выражены с помощью отношений и операций возможностной шкалы (т.е. $\inf, \sup, \leq$) над значениями функций f_n без квантификации по множеству мер возможности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе введено понятие нижней меры возможности и с его использованием сформулировано условие существования общего продолжения мер возможности на булеан множества элементарных событий.

Получен критерий существования модели сходимости по возможности для последовательности распределений нечетких персептивных элементов, который может быть выражен с помощью отношений и операций возможностной шкалы без квантификации по множеству мер возможности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применение — М.: УРСС, 2000. — 190 с.
2. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. — 1978. — **1.** — P. 3–28.
3. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. — М.: Радио и связь, 1990. — 288 с.
4. Wang Z. On the extension of possibility measures // BUSEFAL. — 1984. — **18**. — P. 26–32.
5. Zhong Q. On the extension of possibility measures // Fuzzy Sets and Systems. — 1989. — **32,** N 3. — P. 315–320.
6. Пытьев Ю.П. Неопределенные нечеткие модели и их применения // Интеллект. системы. — 2004. — **8**, вып. 1–4. — С. 147–310.
7. Бичков О.С., Колесніков К.С. Побудова (*PN*)-моделі теорії можливостей // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2007. — № 1. — С. 134–138.
8. Бичков О.С. Про один підхід до опису нечітких подій // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2006. — № 3. — С. 138–142.

Поступила 19.03.2009