УДК 519.217; 519.718

Е.Ф. ЦАРЬКОВ, В.К. ЯСИНСКИЙ, И.В. МАЛЫК

УСТОЙЧИВОСТЬ В ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ С МАРКОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ В СХЕМЕ УСРЕДНЕНИЙ. 3. СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ[1]

Ключевые слова: *импульсная динамическая марковская система, марковский процесс, метод усреднения, слабая сходимость.*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$, $F \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq 0\}$, задан непрерывный справа случайный процесс $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \mathbb{R}^m$, который при всех $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (ДУ) Ω

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, y(t), \varepsilon), \tag{1}$$

а при всех $t \in \{\tau_j \equiv \tau_j(\omega), j \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию скачка

$$x(t) = x(t-) + \varepsilon g(x(t-), y(t-), \varepsilon) \tag{2}$$

с начальным условием

$$x(t)\Big|_{t=0} = x. \tag{3}$$

Здесь $y(t)$ — марковский процесс [7], заданный на фазовом пространстве, который определяет моменты скачков в реальных системах [13]. Исследования детерминированных систем с другими условиями скачков можно найти в [12].

Предположим, что функции f и g могут быть представлены в виде

$$f(x, y, \varepsilon) = f_1(x, y) + \varepsilon f_2(x, y) + \varepsilon f_3(x, y, \varepsilon), \tag{4}$$

$$g(x, y, \varepsilon) = g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y) + \varepsilon g_3(x, y, \varepsilon), \tag{5}$$

где f_1 и g_1 — непрерывные функции, имеющие первую и вторую производную Фреше [4] по x; f_2, f_3, g_2, g_3 — непрерывные функции, имеющие непрерывную ограниченную производную Фреше по x, причем для всех $y \in Y$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ можно записать

$$\| D^1 f_3(x, y, \varepsilon) \| + \| D^1 g_3(x, y, \varepsilon) \| \leq \beta(\varepsilon), \tag{6}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \beta(\varepsilon) = 0$. Здесь и далее D^k — k-я производная Фреше по $x \in \mathbb{R}^m$ [4].

Рассмотрим ДУ Ω

$$\frac{du}{dt} = b_1(u), \tag{7}$$

которое назовем усредненным уравнением для импульсной системы (1)–(3). Легко увидеть, что в силу сделанных предположений (4)–(6) решение ДУ (7) существует и единственно при любом начальном условии $u(0) = u$.

Если $b_1(u) \equiv 0$, то усредненное уравнение (7) не несет никакой информации о концепции решения системы (1)–(3) на интервале времени порядка ε^{-1}. В этом

[1] Начало см. в № 6, 2010; № 1, 2011.

случае, следуя работам [15, 22], можно перейти к «очень медленному времени» $\varepsilon^{-2}t$. В силу леммы 3 из [17, ч. 2] можно считать, что слагаемые $f_3(x, y, \varepsilon)$ и $g_3(x, y, \varepsilon)$ не влияют на асимптотику решения задачи (1)–(3). Поэтому предмет исследования настоящей статьи — импульсная система, которую запишем в виде

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} f_1(x, y_\varepsilon(t)) + f_2(x, y_\varepsilon(t)) \tag{8}$$

при $t \in (\varepsilon^2 \tau_{j-1}, \varepsilon^2 \tau_j)$, $j \in \mathbb{N}$, что удовлетворяет условию скачка

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t-) + \varepsilon g_1(x_\varepsilon(t-), y_\varepsilon(t-)) + \varepsilon^2 g_2(x_\varepsilon(t-), y_\varepsilon(t-)) \tag{9}$$

при $t \in \{\varepsilon^2 \tau_j, j \in \mathbb{N}\}$ с начальным условием

$$x_\varepsilon(0) = x. \tag{10}$$

Далее получим необходимые оценки вспомогательных функционалов.

2. ОЦЕНКИ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Рассмотрим на вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ [8, 9, 21] импульсную систему с марковскими переключениями (ИСМП) (8)–(10). Правая часть системы (8) требует выполнения достаточных условий, что дает существование и единственность решений на соответствующих интервалах времени.

Слабый инфинитезимальный оператор (СИО) $L(\varepsilon)$ марковского процесса $\{x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\}$ [6, 7] имеет вид

$$\widetilde{L}(\varepsilon) v(x, y) = \frac{1}{\varepsilon^2} Q v(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} (f_1(x, y), \nabla) v(x, y) +$$

$$+ (f_2(x, y), \nabla) v(x, y) + \widetilde{G}(\varepsilon) v(x, y),$$

где

$$\widetilde{G}(\varepsilon) v(x, y) = \frac{1}{\varepsilon} a(y) \int_Y [v(x + \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y), z) - v(x, z)] p(y, dz). \tag{11}$$

Лемма 1. Пусть $u(x, y)$ имеет непрерывную по x производную, $u \in V_p$, $|\nabla u| \in V_p$ при некотором $p \geq 1$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\varepsilon \widetilde{L}(\varepsilon) u(x, y) = \frac{1}{\varepsilon} Q u(x, y) + (f_1(x, y), \nabla) u(x, y) +$$

$$+ a(y) \int_Y [u(x + \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y), z) - u(x, z)] p(y, dz) + r_{1\varepsilon}(x, y), \tag{12}$$

причем все слагаемые правой части (12) принадлежат V_p и, кроме того,

$$\sup_{0 \leq \varepsilon < 1} \| r_{1\varepsilon} \|_p < \infty, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} r_{1\varepsilon}(x, y) = 0$$

для $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Y$. Здесь V_p — пространство непрерывных отображений $\mathbb{R}^m \times Y$ в $\mathbb{R}^1$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m,\ y \in Y} | u(x, y) | (1 + | x |^p) \equiv \| u \|_p < \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Обозначим $(D \nabla v)(x)$ матрицу Гесса отображений $u \in C^2(\mathbb{R}^m)$ [4, 5]. Если $f : \mathbb{R}^m \times Y \to \mathbb{R}^1$ имеет элементы из V_p, то в дальнейшем будем писать $| f | \in V_p$ и использовать обозначения (13).

В силу предположений леммы 1 имеем $\| Dg_j \|, \| Df_j \| \in V_0$ при $j=1,2$. Следовательно, $|f_j| \in V_1$, $|g_j| \in V_1$ при $j=1,2$ и для всех $\varepsilon \in (0,1)$, $s \in [0,1]$ запишем

$$|\nabla u(x+s(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)), z)| \le$$
$$\le \|\nabla u\|_{p-1} (1+|x|+|g_1(x,y)|+|g_2(x,y)|)^{p-1} \le$$
$$\le \|\nabla u\|_{p-1} (1+\|g_1\|_1+\|g_2\|_1)^{p-1}(1+|x|)^{p-1}.$$

Для оператора (11) и вышеуказанной в лемме 1 производной $u(x,y)$ справедливо равенство

$$\varepsilon \widetilde{G}(\varepsilon) u(x,y)=$$
$$= a(y)\int_Y \int_0^1 (\nabla u(x+s(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)), z), g_1(x,y)+\varepsilon g_2(x,y))\, ds p(y,dz) =$$
$$= a(y)\int_Y (g_1(x,z),\nabla)\, u(x,y)\, p(y,dz)+$$
$$+\varepsilon a(y)\int_Y \int_0^1 (\nabla u(x+s(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)), z), \varepsilon g_2(x,y))\, ds p(y,dz)+$$
$$+ a(y)\int_Y \int_0^1 (\nabla u(x+s(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)), z)-\nabla u(x,z), g_1(x,y))\, ds p(y,dz). \quad (14)$$

Очевидно, что функции $(f_j(x,y),\nabla)\, u(x,y)$, $j=1,2$, $Qu(x,y)$ и все слагаемые правой части (14) принадлежат пространству V_p. Для завершения доказательства остается заметить, что $\nabla u(x,y)$ является непрерывным по x отображением, а значит,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^1 |\nabla u(x+s(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)), z)-\nabla u(x,z)|\, ds = 0$$

при всех $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Y$ и $z \in Y$. ■

Лемма 2. Пусть $v_0(x)$ — непрерывная функция, которая имеет две непрерывные по x производные Фреше, причем $v_0 \in V_p$, $|\nabla v_0| \in V_{p-1}$, $\|D\nabla v_0\| \in V_{p-2}$ для некоторых $p \ge 2$. Тогда $\forall \varepsilon \in (0,1)$ имеет место представление

$$\widetilde{L}(\varepsilon) v_0(x) = \frac{1}{\varepsilon}(F_1(x,y),\nabla)\, v_0(x) + (F_2(x,y),\nabla) v_0(x) +$$
$$+\frac{1}{2} a(y)([D\nabla v_0(x)] g_1(x,y), g_1(x,y)) + r_{2\varepsilon}(x,y), \quad (15)$$

где все слагаемые в правой части принадлежат V_p, причем

$$\sup_{0\le\varepsilon<1} \|r_{2\varepsilon}\|_p < \infty, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} r_{1\varepsilon}(x,y)=0$$

при всех $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Y$.

Доказательство. Запишем очевидное равенство

$$\varepsilon \widetilde{G}(\varepsilon) v_0(x,y) = a(y)[v_0(x+\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)) - v_0(x)] =$$
$$= a(y)\Bigg(\nabla v_0(x), \varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)+$$
$$+ a(y)\int_0^1 [(\nabla v_0(x), s(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y))) - (\nabla v_0(x), \varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y))]\, ds \Bigg) =$$
$$= a(y)\Bigg(\nabla v_0(x), \varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)+a(y)\int_0^1\int_0^1 s(D\nabla v_0(x+ts(\varepsilon g_1(x,y)+$$

$$+\varepsilon^2 g_2(x, y))(\varepsilon g_1(x, y)+\varepsilon^2 g_2(x, y))), \varepsilon g_1(x, y)+\varepsilon^2 g_2(x, y))\, ds\, dt\Bigg)=$$

$$=a(y)\Bigg(\nabla v_0(x), \varepsilon g_1(x, y)+\varepsilon^2 g_2(x, y)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}a(y)\Bigg([D\nabla v_0(x)](g_1(x, y)+\varepsilon g_2(x, y)), g_1(x, y)+\varepsilon g_2(x, y)+$$

$$+\varepsilon^2 a(y)\int_0^1\int_0^1 s([(D\nabla v_0)(x+ts(\varepsilon g_1(x, y)+\varepsilon^2 g_2(x, y)))-$$

$$-D\nabla v_0(x)](g_1(x, y)+\varepsilon g_2(x, y)), g_1(x, y)+\varepsilon g_2(x, y))\, dsdt\Bigg)\Bigg).$$

Теперь формула (15) следует из непрерывности $D\nabla v_0(x)$ и неравенств

$$([D\nabla v_0(x)](g_1(x, y)+\varepsilon g_2(x, y)), g_1(x, y)+\varepsilon g_2(x, y))\le$$

$$\le || D\nabla v_0(x)||_{p-2}(||g_1||_1+||g_2||_1)^2(1+|x|)^p;$$

$$|((D\nabla v_0)(x+ts(\varepsilon g_1(x, y)+\varepsilon^2 g_2(x, y)))c, c)|\le$$

$$\le |c|^2 ||D\nabla v_0(x)||_{p-2}(1+||x||+|g_1(x, y)|+|g_2(x, y)|)^{p-2}\le$$

$$\le |c|^2 ||D\nabla v_0(x)||_{p-2}(1+||g_1||_1+||g_2||_1)^{p-2}(1+|x|)^{p-2}$$

для всех $c\in\mathbb{R}^m$, $t\in[0,1]$, $s\in[0,1]$, $x\in\mathbb{R}^m$, $y\in Y$, $\varepsilon\in(0,1)$. ■

Лемма 3. Пусть функция $v_0(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2, а $u(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 1

$$v_1(x, y)=(\Pi F_1(x, y), \nabla)\, v_0(x);$$

$$v(x, y)=v_0(x)+\varepsilon v_1(x, y)+\varepsilon^2 u(x, y).$$

Тогда $\widetilde{L}(\varepsilon)v\in V_p$ и $\sup\limits_{0<\varepsilon<1}||\widetilde{L}(\varepsilon)v||_p<\infty$.

Доказательство. Легко увидеть, что

$$|v_1(x, y)|\le ||\nabla v_0||_{p-1}\cdot h\cdot ||F_1||_1(1+|x|)^p;$$

$$|\nabla v_1(x, y)|\le ||D\nabla v_0(x)||\,|\Pi F_1(x, y)|+|\nabla v_0(x)|\,||\Pi DF_1(x, y)||\le$$

$$\le [||D\nabla v_0||_{p-2}\cdot h\cdot ||F_1||_1+||\nabla v_0||_{p-1}\, h\, ||DF_1||_0](1+|x|)^{p-1}$$

для вех $y\in Y$ и $x\in\mathbb{R}^m$. По определению потенциала для любого $\widetilde{v}\in(V)$ можно записать

$$a(y)\int_Y \Pi\widetilde{v}(z)\, p(y, dz)=-\widetilde{v}(y)+a(y)\Pi\widetilde{v}(y)+\int_Y\widetilde{v}(z)\,\mu(dz).$$

По построению $v_1\in V_p$, $|\nabla v_1|\in V_{p-1}$, $\int\limits_Y v_1(x, y)\,\mu(dy)=0$. Тогда для $\forall\varepsilon\in(0,1)$ получим

$$\varepsilon\widetilde{L}(\varepsilon)v_1(x, y)+\frac{1}{\varepsilon}(F_1(x, y), \nabla)\, v_0(x)=$$

$$=([D\nabla v_0(x)]F_1(x, y), \Pi F_1(x, y))-([DVv_0(x)]g_1(x, y), F_1(x, y))+$$

$$+(\nabla v_0(x), [\Pi DF_1(x, y)]F_1(x, y))-(\nabla v_0(x), [DF_1(x, y)]g_1(x, y)+r_{3\varepsilon}(x, y)),$$

где все слагаемые правой части принадлежат V_p, причем

$$\sup_{0\le\varepsilon<1} \| r_{3\varepsilon} \|_p < \infty, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} r_{3\varepsilon}(x,\, y) = 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Y$. Из формулы (15) имеем равенство

$$\widetilde{L}(\varepsilon)[v_0(x) + \varepsilon v_1(x,\, y)] = (\nabla v_0(x), F_2(x,\, y)) + ([D\nabla v_0(x)]F_1(x,\, y), \Pi F_1(x,\, y)) -$$
$$-([D\nabla v_0(x)]g_1(x,\, y), f_1(x,\, y)) + \frac{1}{2}a(y)g_1(x,\, y) + (\nabla v_0(x), [\Pi DF_1(x,\, y)]F_1(x,\, y)) -$$
$$-(\nabla v_0(x), [DF_1(x,\, y)]g_1(x,\, y)) + r_{2\varepsilon}(x,\, y) + r_{3\varepsilon}(x,\, y)).$$

Отметим, что все слагаемые правой части принадлежат пространству V_p. Поэтому $(\widetilde{L}(\varepsilon)v_0(x) + \varepsilon v_1) \in V_p$ и, кроме того,

$$\sup_{0<\varepsilon<1} \| \widetilde{L}(\varepsilon)(v_0 + \varepsilon v_1) \|_p < \infty.$$

Тогда утверждение леммы 3 следует из леммы 1, поскольку $Q \in V_p$. ■

Далее перейдем к установлению равномерной ограниченности решений системы (8)–(10).

3. РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ

Пусть имеет место постановка задачи, рассмотренная в разд 1.

Теорема 1. Для каждого $p > 0$ существуют положительные константы ε_p, c_p, γ_p такие, что решение системы (8)–(10) удовлетворяет неравенство

$$E_{x,y}|x(t)|^p \le c_p e^{-\gamma_p t}(1 + |x|)^p \tag{16}$$

для всех $y \in Y$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_p)$ и $t \ge 0$.

Доказательство. Докажем утверждение для $p > 2$, поскольку для $p' \in (0, 2]$ оно справедливо:

$$E_{x,y}|x_\varepsilon(t)|^{p'} \le (E_{x,y}|x_\varepsilon(t)|^2)^{p'/2}.$$

Пусть $v_0(x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям леммы 2, и существуют такие положительные константы l_1 и l_2, что

$$l_1(1 + |x|)^p \le v_0(x) \le l_2(1 + |x|)^p \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Для непрерывной функции $v(x,\, y) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x,\, y)$, где v_1 определено в лемме 3, можно использовать формулу Дынкина [7, §5.1]

$$E_{x,y} v(x_\varepsilon(\tau_p(t)),\ y_\varepsilon(\tau_p(t))) = v(x,\, y) + E_{x,y} \int_0^{\tau_p} L(\varepsilon) v(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s))\, ds, \tag{17}$$

где $\tau_\rho \equiv \min\{\widetilde{\tau}_\rho, t\}$, $\widetilde{\tau}_\rho \equiv \inf\{t \ge 0 : |x_\varepsilon(t)| > p\}$, $\rho > 0$ и $x \in \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < \rho\}$. По построению

$$h_1(1 + |x|^p) \le v(x,\, y) \le h_2(1 + |x|)^p, \tag{18}$$

где константы $h_1 = l_1 - \varepsilon_p h \|\nabla v_0\|_{p-1} \cdot \|F_1\|_1$, $h_2 = l_2 + \varepsilon_p h \|\nabla v_0\|_{p-1} \cdot \|F_1\|_1$ являются положительными для некоторого достаточно малого $\varepsilon_p > 0$.

Из формулы (17) следует

$$\widetilde{L}(\varepsilon)v(x,\, y) = \widetilde{L}(\varepsilon)v_0(x) + \varepsilon \widetilde{L} v_1(x,\, y) =$$
$$= (\nabla v_0(x), F_2(x,\, y)) - ([D\nabla v_0(x)]g_1(x,\, y), f_1(x,\, y)) +$$
$$+ \frac{1}{2}a(y)g_1(x,\, y) + ([D\nabla v_0(x)]F_1(x,\, y), \Pi F_1(x,\, y)) +$$
$$+ (\nabla v_0(x), [\Pi DF_1(x,\, y)]F_1(x,\, y)) - (\nabla v_0(x), [DF_1(x,\, y)]g_1(x,\, y)) + r_{4\varepsilon}(x,\, y),$$

где $r_{4\varepsilon} \in V_p$, $\sup\limits_{0<\varepsilon<1} \| r_{4\varepsilon} \|_p < \infty$. Тогда $\widetilde{L}(\varepsilon)v \in V_p$ и ввиду неравенства (21) можно записать

$$|\widetilde{L}(\varepsilon)v(x, y)| \le \frac{h_3}{h_1} v(x, y),$$

где $h_3 \equiv \sup\limits_{0<\varepsilon<1} \| \widetilde{L}(\varepsilon)v \|_p$. Легко увидеть, что процесс

$$\eta(t) \equiv e^{-h_3 t/h_1} v(x_\varepsilon(\tau_\rho(t), y_\varepsilon(\tau_\rho(t))))$$

имеет неположительную правую производную математического ожидания, так как

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} E_{x,y}\{\eta(t+\Delta) - \eta(t) / \mathcal{F}^{t/\varepsilon^2}\} =$$

$$= -\frac{h_3}{h_1}\eta(t) + e^{-h_3 t/h_1} \widetilde{L}(\varepsilon) v(x_\varepsilon(\tau_\rho(t), y_\varepsilon(\tau_\rho(t)))).$$

Следовательно, $\eta(t)$ является неотрицательным супермартингалом [8] и тогда

$$P_{x,y}\left\{\omega : \sup_{t_0 \le t \le T} \eta(t) \ge \rho\right\} \le \frac{1}{\rho} E_{x,y}\{\eta(t_0)\} \tag{19}$$

для всех $T > t_0 \ge 0$ и $\rho > 0$. Отсюда

$$P_{x,y}\left\{\omega : \sup_{0 \le t \le T} |x_\varepsilon(\tau_\rho(t))| \ge \rho\right\} \le P_{x,y}\left\{\omega : \sup_{0 \le t \le T} v(x_\varepsilon(\tau_\rho(t)), y_\varepsilon(\tau_\rho(t))) \ge\right.$$

$$\left. \ge h_1(1+\rho)^p \right\} \le \frac{h_2(1+|x|)^p}{h_1(1+\rho)^p} \exp\left\{\frac{h_3}{h_1} T\right\},$$

а значит, $P_{x,y}\left\{\omega : \lim\limits_{\rho \to +\infty} \tau_\rho(t) = t\right\} = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in V_1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_p)$. Из (17) и (18) получим неравенство

$$E_{x,y}|x_\varepsilon(t)|^p \le \lim_{\rho \to +\infty} \frac{1}{h_1} E_{x,y}\{v_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau_\rho(t)), y_\varepsilon(\tau_\rho(t)))\} \le$$

$$\le \frac{h_2}{h_1}(1+|x|)^p \exp\left\{\frac{h_3}{h_1} t\right\} \tag{20}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Y$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_p)$. Теорема 1 доказана. ■

Следствие 1. Если $v \in D(\widetilde{L}(\varepsilon))$, $v \in V_{p_1}$, $\widetilde{L}(\varepsilon) \in V_{p_2}$ при некоторых $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, то для всех $T > 0$, $t \in [0, T]$ и $y \in Y$

$$|E_{x,y}\{v(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) - v(x, y)\}| \le t M_T (1+|x|)^{p_2}. \tag{21}$$

Следствие 2. Для любого $T > 0$ существует такое $\varepsilon_T > 0$, что при всех $r > 0$

$$\lim_{\rho \to \infty} \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_T} \sup_{|x|<r} P_{x,y}\left\{\omega : \sup_{0 \le t \le T} |x_\varepsilon(t)| \ge \rho\right\} = 0,$$

где $\rho > 2$.

Доказательство следует из неравенства (19).

4. СЛАБАЯ КОМПАКТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР В ПРОСТРАНСТВЕ СКОРОХОДА

Для доказательства слабой сходимости решений импульсных систем с марковскими переключениями (ИСМП) [13, 16, 17] используются некоторые сведения из [1, 14].

Пусть B — пространство измеримых действительных функций с нормой

$$\| x \| \equiv \sup_{0 \le x \le 1} |x(t)|. \tag{22}$$

Обозначим D подмножество функций из B, которые не имеют разрывов второго рода и непрерывны справа, а в точке $x=1$ непрерывны слева. Для характеристики элементов D будем использовать функционал, выступающий в той же роли, что и модуль непрерывности в пространстве C. Следуя [1], элементу $x \in D$ поставим в соответствие числовую функцию аргумента $\delta \in (0, 1)$, определенную равенством

$$W'(x, \delta) \equiv \inf_{(t_j)} \max_{0<j\le r} W(x, [t_{j-1}, t_j]),$$

где $W(x, [t_{j-1}, t_j]) \equiv \sup \{|x(s)-x(t)|,\ s,\ t \in [t_{j-1}, t_j]\}$, а нижняя грань берется по всем разбиениям отрезка $[0, 1]$, которые удовлетворяют условию

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1,\ \ t_j - t_{j-1} > \delta,\ \ j = \overline{1, r}.$$

Для непрерывных функций $x \in C$ в силу непрерывности имеет место

$$\frac{1}{2} W(x, \delta) \le W'(x, \delta) \le W(x, 2\delta),$$

где $W(x, \delta)$ — модуль непрерывности,

$$W(x, \delta) \equiv \sup_{0\le t\le 1-\delta} \sup \{|x(s)-x(t)|\ \ \forall s, t \in [t, 1+\delta)\}.$$

Введенный функционал (22) по сути совпадает с $W(x, \delta)$.

Лемма 4 [1]. Функция x принадлежит D тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\delta\to 0} W'(x, \delta) = 0$.

В пространстве D можно ввести метрику d следующим образом [1, 3]. Обозначим Π класс строго возрастающих скалярных отображений отрезка $[0, 1]$ на себя. Для $x \in D$ и $y \in D$ определим расстояние $d(x, y)$ как нижнюю грань таких положительных $\varepsilon > 0$, для которых существует $\lambda \in \Pi$ такое, что

$$\sup_{t\in[0, 1]} |\lambda(t) - t| < \varepsilon \ \text{ и } \ \sup_{t\in[0, 1]} |x(t) - y(\lambda(t))| \le \varepsilon.$$

Очевидно, что $d(x, y)$ удовлетворяет условию симметрии $d(x, y) = d(y, x)$ и условию треугольника $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ [1].

Пространство D с топологией, порожденной метрикой $d(x, y)$, называется пространством Скорохода. К сожалению, операция сложения в D не является непрерывной в этой топологии [1]. Пространство Скорохода сепарабельно, однако в метрике $d(x, y)$ пространство D не является полным [1]. Поэтому используют другую метрику $d_0(x, y)$, которая топологически эквивалентна $d(x, y)$, но относительно которой D есть полным, что весьма важно для характеристики компактных подмножеств [5].

Метрика $d_0(x, y)$ вводится в [1, 3] как нижняя грань тех $\varepsilon > 0$, для которых выполняется неравенство

$$\sup_{t\in[0, 1]} |x(t) - y(\lambda(t))| \le \varepsilon,\ \sup_{s\le t} \left| \ln \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t-s} \right| \le \varepsilon.$$

Далее проведем аналог теоремы Арцелла [4, 5] для пространства Скорохода.

Теорема 2 [2]. Множество $A \subset D$ имеет компактное замыкание в пространстве Скорохода, если

$$\sup_{x\in A} ||x|| < \infty \ \text{ и } \ \lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in A} W'(x, \delta) = 0,$$

где $||x||$ определено (22).

Более просто компактное замыкание можно получить с помощью функционала

$$W''(x, \delta) \equiv \sup \min \{|x(t) - x(t_1)|, |x(t_2) - x(t)|\},$$

где верхняя грань берется по всем t, t_1, t_2 таким, что $t_1 \le t \le t_2$, $t_2 - t_1 = \delta$. Легко видеть, что $W''(x, \delta) \le W'(x, \delta)$.

Теорема 3 [1]. Множество A имеет компактное замыкание в пространстве Скорохода тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$\sup_{x \in A} \| x \| < \infty, \quad \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} W(x, [0, \delta)) = 0,$$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} W(x, [1-\delta, 1)) = 0, \quad \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} W''(x, \delta) = 0.$$

Отметим, что при слабой сходимости случайных величин со значениями в D, т.е. случайных процессов $\xi(t)$, все их реализации являются элементами пространства D.

По классической теореме Прохорова [9] семейство вероятностных мер H пространства D является относительно слабо компактным (т.е. любая последовательность элементов H содержит слабо сходящуюся подпоследовательность) тогда и только тогда, когда оно плотно. Другими словами, для $\forall \varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon < D$ такой, что $D(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ для всех $P \in H$.

Замечание 1. В дальнейшем под слабой сходимостью семейства случайных элементов ξ_n со значениями в D будем понимать сходимость вероятностных мер P_{ξ_n}, определенных этими величинами на минимальной σ-алгебре Σ_D подмножеств D, порожденной базисом топологии Скорохода.

Определим для случайной величины ξ со значениями в D конечномерные проекции $\pi_{t_1,\ldots,t_k} \equiv P_\xi \equiv P\{\xi(t_1) \in \bullet, \xi(t_2) \in \bullet, \ldots, \xi(t_k) \in \bullet\}$. Пусть T_ξ — множество точек на отрезке $[0,1]$, для которых проекция π_t непрерывна всюду (в смысле слабой сходимости вероятностных мер), за исключением множества P_ξ — меры нуль. По определению всегда $0 \in T_\xi$ и $1 \in T_\xi$. Очевидно, что $t \in T_\xi$ тогда и только тогда, когда $P\{\omega : \xi(t) \ne \xi(t-)\} = 0$. Здесь $\xi(t-) = \lim_{s \uparrow t} \xi(s)$. Можно показать, что дополнение на отрезке $[0,1]$ не более чем счетно.

Теорема 4 [1]. Пусть $\pi_{t_1,\ldots,t_k} P_{\xi_n}$ слабо сходится при $n \to +\infty$ к $\pi_{t_1,\ldots,t_k} P_\xi$ для всех $t_j \in T_\xi$, $j = \overline{1, n}$, и $P(\xi(1) \ne \xi(1-0)) = 0$. Если для всех $t_2 \in [0,1]$, $t \in [t_1, t_2]$, $n \in \mathbb{N}$ и некоторых $c > 0$, $\gamma \ge 1$, $\alpha > 0$ выполнено неравенство

$$E\{|\xi_n(t) - \xi_n(t_1)|^\gamma \, |\xi_n(t_2) - \xi_n(t)|^\gamma\} \le c|t_2 - t_1|^{1+\alpha}, \tag{23}$$

то последовательность $\{\xi_n\}$ слабо сходится к ξ.

Замечание 2. Описаные выше результаты переносятся на случай, когда $\xi_n(t)$ являются случайными n-мерными векторами, а аргумент $t \in [a, b]$ — произвольный отрезок. В дальнейшем будем использовать полученные выше скалярные результаты, при этом отрезок $[0,1]$ заменим, не теряя общности, отрезком $[a, b]$ при любых $b > a$.

Условия слабой сходимости к диффузионному процессу описаны в работе [14].

Введем в рассмотрение $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega) \in \mathbb{R}^m$ — слабое решение стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Ито

$$d\xi(t) = a(\xi)\, dt + B(\xi)\, dw(t), \tag{24}$$

где $a(x), B(x)$ — непрерывные функции по $x \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющие условию линейного роста

$$|a(t,x)| + \|B(t,x)\| \le K(1 + |x|)$$

и локальному условию Липшица по $x \in \mathbb{R}^m$.

Теорема 5 [14]. Пусть для последовательности случайных процессов $\{\xi_n(t); t\in[a,b]\}$ выполняются следующие условия:

а) распределение $\xi_n(a)$ сходится к распределению некоторой случайной величины ξ;

б) существует такое множество $\widetilde{D}$ дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций в $\mathbb{R}^m$, плотное в пространстве непрерывных функций, что для всех $a\le t_1\le\ldots< t_{k+1}< t< t+h\le b$ и $\varphi_1,\ldots,\varphi_{k+1}\in\widetilde{D}$ выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|E\{\varphi_k(\xi_n(t_1)),\ldots,\varphi_k(\xi_n(t_k))[\varphi_{k+1}(\xi_n(t+h))-$$

$$-\varphi_{k+1}(\xi_n(t))-hL\varphi_{k+1}(\xi_n(t))]\}|=o(h)$$

при $h\to 0$ равномерно по $t\in[t_{k+1},b-h]$, где L — слабый инфинитезимальный оператор, соответствующий (24).

Тогда конечномерные распределения последовательности $\xi_n(t)$ сходятся к соответствующим конечномерным распределениям решения СДУ (24) с начальным условием $\xi(a)=\xi$.

Следствие 1. Для $\forall T>0$ существуют такие положительные константы ε_T и A_T, что

$$|E_{x,y}\{\widetilde{v}_\varepsilon(x_\varepsilon(t),\, y_\varepsilon(t))\}-\widetilde{v}_\varepsilon(x,\, y)|< tA_T(1+|x|^2) \tag{25}$$

при всех $t\in[0,T]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_T)$, $x\in\mathbb{R}^m$, $y\in Y$ и $c\in\mathbb{R}^m$.

Это следует из представления

$$\widetilde{v}_\varepsilon(x,\, y)=|x|^2+2\varepsilon(x,\varepsilon\Pi F_1(x,\, y))+\varepsilon^2|x+\varepsilon\Pi F_1(x,\, y)|^2,$$

леммы 3 и формулы (21).

Следствие 2. Для любых $T>0$ и $c\in\mathbb{R}^m$ существуют такие константы ε_T и A_T, что

$$|E_{x,y}\{\hat{v}_\varepsilon(x_\varepsilon(t),\, y_\varepsilon(t),\, c)\}-\hat{v}_\varepsilon(x,\, y,\, c)|< tA_T|c|(1+|x|) \tag{26}$$

при всех $t\in[0,T]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_T)$, $x\in\mathbb{R}^m$ и $y\in Y$.

Это следует из леммы 3 и формулы (21).

Следствие 3 . Для любого $T>0$ существуют такие положительные константы ε_T и A_T, что

$$E_{x,y}|x_\varepsilon(t)+\varepsilon\Pi F_1(x_\varepsilon(t),\, y_\varepsilon(t))-x-\varepsilon\Pi F_1(x,\, y)|^2< tA_T(1+|x|^2) \tag{27}$$

при всех $t\in[0,T]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_T)$, $x\in\mathbb{R}^m$ и $y\in Y$.

Запишем левую часть неравенства (27) в виде

$$|x_\varepsilon(t)+\varepsilon\Pi F_1(x_\varepsilon(t),\, y_\varepsilon(t))-x-\varepsilon\Pi F_1(x,\, y)|^2=\widetilde{v}_\varepsilon(x_\varepsilon(t),\, y_\varepsilon(t))-\widetilde{v}_\varepsilon(x,\, y)-$$

$$-2(x_\varepsilon(t)+\varepsilon\Pi F_1(x_\varepsilon(t))-\varepsilon\Pi F_1(x,\, y),x+\varepsilon\Pi F_1(x,\, y)).$$

Далее применим формулы (25) и (26) при $c\equiv x+\varepsilon\Pi F_1(x,\, y)$, а также оценку

$$|x+\varepsilon\Pi F_1(x,\, y)|\le(1+h|F_1|_1)(1+|x|).$$

Следствие 4. Для любого $T>0$ существуют такие константы ε_T и A_T, что

$$E\{|x_\varepsilon(t)+\varepsilon\Pi F_1(x_\varepsilon(t),\, y_\varepsilon(t))-x_\varepsilon(s)-\varepsilon\Pi F_1(x_\varepsilon(s),\, y_\varepsilon(s))|^2/\mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\}\le$$

$$\le(t-s)A_T(1+|x(s)|^2) \tag{28}$$

при всех $s\in[0,T]$, $t\in[s,T]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_T)$, $x\in\mathbb{R}^m$ и $y\in Y$.

Это следует из формулы (27) и представления

$$E_{x,y}\{v(x_\varepsilon(t),\, y_\varepsilon(t))\,/\,\mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\} = E_{x_\varepsilon(s),\, y_\varepsilon(s)} v(x_\varepsilon(t-s),\, y_\varepsilon(t-s))$$

для любого $v \in V_2$.

Далее определим вектор

$$b(x) \equiv \int_Y F_2(x,\, y)\,\mu(dy) + \int_Y [\Pi DF_1(x,\, y)]F_1(x,\, y)\,\mu(dy) - \int_Y [DF_1(x,\, y)]g_1(x,\, y)\,\mu(dy)$$

и симметрическую матрицу $A(x) = \{a_{ij}\}_{i,j=0}^{m}$ с помощью формулы

$$\frac{1}{2}(A(x)c,\, c) \equiv \int_Y (F_1(x,\, y), c)(\Pi F_1(x,\, y), c)\,\mu(dy) -$$

$$-\int_Y (g_1(x,\, y), c)(f_1(x,\, y) + \frac{1}{2}a(y)g_1(x,\, y), c)\mu(dy),$$

где c — произвольный вектор из $\mathbb{R}^m$. Отметим, что по построению для координат $b_j(x)$ вектора $b(x)$ и элементов матрицы $A(x)$ имеют место соотношения

$$b_j \in V_1,\; |\nabla b_j| \in V_1,\; a_{ij} \in V_2,\; |\nabla a_{ij}| \in V_1,\; ||D\nabla a_{ij}|| \in V_1 \qquad (29)$$

для всех $i,\, j = \overline{1,\, m}$.

5. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР

Из следствия 2 теоремы 1 и результатов разд. 4 для любого конечного набора моментов времени $t_r > t_{r-1} > \ldots > t_1 \geq 0$ можно определить семейство распределений случайного вектора $\{x_\varepsilon(t_1), \ldots, x_\varepsilon(t_k)\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, которое будет относительно слабо компактно. Поэтому можно рассматривать решение импульсной системы (8)–(10) как случайную величину со значениями в пространстве Скорохода $D\;([0, T], \mathbb{R}^m)$ при некотором фиксированном $T > 0$.

Вероятностные меры, соответствующие решениям, обозначим P^ε. Докажем, что семейство P^ε относительно слабо компактно, т.е. существует такая последовательность $\{\varepsilon_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ и $\{P^\varepsilon,\, n \in \mathbb{N}\}$ сходится к некоторому распределению $\hat{P}$. Отметим, что аналогичный результат без скачков (т.е. при $g(x, y, \varepsilon) \equiv 0$) имеет место в [19], но он получен другим способом.

Замечание 3. Результат, изложенный в настоящем разделе, можно получить с помощью методики из работы [22]. Однако указанный выше результат докажем более простым методом, который является модификацией второго метода Ляпунова [10].

Отметим, что решение $x_\varepsilon(t)$ ДУ Ω (8), (9) и семейство случайных процессов

$$\widetilde{x}_\varepsilon(t) \equiv x_\varepsilon(t) + \varepsilon \Pi F_1(x_\varepsilon(t),\, y_\varepsilon(t))$$

имеют одинаковые свойства слабой сходимости при $\varepsilon \to 0$, так как для всех $T > 0$, $\delta > 0$, $y \in Y$ и $r > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} / \sup_{\substack{|x|<r \\ y\in Y}} P_{x,y}\left\{ \sup_{0\le t\le T} \widetilde{x}_\varepsilon(t) - x(t) > \delta \right\} = 0.$$

Значит, естественно оперировать функционалами

$$\widetilde{v}_\varepsilon(x,\, y) \equiv |x + \varepsilon \Pi F_1(x,\, y)|^2, \qquad \hat{v}_\varepsilon(x,\, y,\; c) \equiv (x + \varepsilon \Pi F_1(x,\, y), c)$$

при некотором $c \in \mathbb{R}^m$.

Теорема 6. Пусть $v \equiv v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 u$ является функционалом из леммы 3, а $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$Qu + F = 0,$$

где

$$F(x, y) = (\nabla v_0(x), F_2(x, y) + [\Pi DF_1(x, y)]F_1(x, y) - [DF_1(x, y)]g_1(x, y) - b(x)) +$$
$$+ ([D\nabla v_0(x)]F_1(x, y), \Pi F_1(x, y)) - \left([D\nabla v_0(x)]g_1(x, y), f_1(x, y) + \frac{1}{2}a(y)g_1(x, y)\right) -$$
$$- \frac{1}{2}\operatorname{sp}[A(x)D\nabla v_0(x)].$$

Тогда $\widetilde{L}(\varepsilon)v \in V_p$, $\sup\limits_{0<\varepsilon<1} \|\widetilde{L}(\varepsilon)v\|_p < \infty$ и для всех $y \in Y$, $x \in \mathbb{R}^m$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} / \widetilde{L}(\varepsilon)v(x, y) = L_0 v_0(x),$$

где $L_0 v_0(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sp} A_x D\nabla v_0(x) + (\nabla v_0, b(x))$.

Доказательство. Очевидно, что для построенной матрицы $A(x)$ и вектора $b(x)$ выполняется равенство

$$\int_Y F(x, y)\mu(dy) = 0.$$

Отсюда по альтернативе Фредгольма уравнение $Qu + F = 0$ имеет решение [4]. Поэтому это решение можно представить в виде $u(x, y) = \Pi F(x, y)$, и тогда утверждение теоремы 6 можно получить из лемм 1–3, поскольку

$$\widetilde{L}(\varepsilon)v(x, y) = \frac{1}{2}\operatorname{sp}\{A(x)D\nabla v_0(x)\} +$$
$$+ (\nabla v_0(x), b(x)) + \varepsilon r_{1\varepsilon}(x, y) + r_{2\varepsilon}(x, y) + r_{3\varepsilon}(x, y). \qquad \blacksquare$$

Замечание 4. Ниже покажем, что матрица $A(x)$ неотрицательно определена, и тогда оператор L_0 с коэффициентами (29) можно считать инфинитезимальным оператором диффузионного марковского процесса $\{\bar{x}(t), t \geq 0\}$, заданного на некотором вероятностном пространстве.

6. СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Пусть для семейства случайных процессов $\{x_\varepsilon(t), 0 \leq t \leq T\}$, определяемого ДУ Ω (8), (9), выполняются условия теоремы 3.

Теорема 7. Предположим, что выполнены указанные выше условия относительно коэффициентов задачи (8)–(10). Тогда для любого $T > 0$ процессы $\{x_\varepsilon(t), t \in [0, T]\}$ задачи (8)–(10) при $\varepsilon \to 0$ слабо сходятся к диффузионному марковскому процессу $\{\bar{x}(t), t \in [0, T]\}$ (с инфинитезимальным оператором L_0), который является решением стохастического уравнения Ито

$$d\bar{x} = b(\bar{x})\,dt + \overline{A}(\bar{x})\,dw(t), \tag{30}$$

где $w(t)$ — стандартный процесс броуновского движения в Q, а b и $\overline{A}$ определены на этапах 2 и 3 доказательства.

Доказательство проведем за несколько этапов.

Этап 1. Докажем, что решение $\{x_\varepsilon(t),\, t\in[0,T]\}$ задачи (8)–(10) слабо компактно.

Определим вектор-функцию $\varphi(x, y, \varepsilon)=x+\varepsilon\Pi F_1(x, y)$, которая позволяет для некоторого $\varepsilon_1>0$ и произвольных $r>0$, $T>0$, $\rho>r$, $x\in S_r$, $y\in Y$ и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ записать неравенство

$$P_{x,y}\left\{\sup_{t\in[0,T]}|x_\varepsilon(t)-\varphi(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t),\varepsilon)|\geq\rho\right\}\leq$$

$$\leq P_{x,y}\left\{\varepsilon h(1+\|F_1\|_1)\sup_{t\in[0,T]}|x_\varepsilon(t)|\geq\rho\right\}\leq\frac{(1+r)\,h_2\exp\left\{\dfrac{h_3T}{h_1}\right\}}{h_1(1+\rho[\varepsilon h(1+\|F_1\|_1)]^{-1})}.$$

Для этого достаточно показать, что условия теоремы 4 выполнены для $\bar{x}_\varepsilon(t)=\varphi(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t),\varepsilon)$.

Формула (28) позволяет записать

$$E_{x,y}\{|\bar{x}_\varepsilon(t)-\bar{x}_\varepsilon(s)|^2/\mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\}\leq(t-s)A_T(1+|x_\varepsilon(s)|^2)$$

для всех $s\in[0,T]$, $t\in[s,T]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_T)$, $x\in\mathbb{R}^m$ и $y\in Y$.

Используем неравенство

$$E_{x,y}\{|\bar{x}_\varepsilon(t)-\bar{x}_\varepsilon(\tau)|^{3/2}|\bar{x}_\varepsilon(\tau)-\bar{x}_\varepsilon(s)|^{3/2}\}\leq$$

$$\leq E_{x,y}\{(E_{x,y}\{|\bar{x}_\varepsilon(t)-\bar{x}_\varepsilon(\tau)|^2/\mathcal{F}^{\tau/\varepsilon^2}\})^{3/4}|\bar{x}_\varepsilon(\tau)-\bar{x}_\varepsilon(s)|^{3/2}\}\leq A_T^{3/4}(t-\tau)^{3/4}\times$$

$$\times E_{x,y}\{(E_{x,y}\{(1+|\bar{x}_\varepsilon(\tau)|)^6/\mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\})^{1/4}(E_{x,y}\{|\bar{x}_\varepsilon(\tau)-\bar{x}_\varepsilon(s)|^2/\mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\})^{3/4}\}\leq$$

$$\leq A_T^{2/3}(t-\tau)^{3/4}(t-s)^{3/4}E_{x,y}\{(E_{x,y}\{(1+|\bar{x}_\varepsilon(\tau)|)^6/\mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\})^{1/4}(1+|x_\varepsilon(s)|)^{3/2}\}.$$

Отсюда следует неравенство (23) теоремы 4 для $\bar{x}_\varepsilon(t)$ при $\gamma=\dfrac{3}{2}$ и $\alpha=\dfrac{1}{2}$. Итак, семейство $\{\bar{x}_\varepsilon(t)\}$, а следовательно и $\{x_\varepsilon(t)\}$, слабо компактно.

Этап 2. Докажем существование коэффициента $b(x)$. Пусть $\{x_{\varepsilon_k}(t)\}$ сходится к некоторому процессу $\bar{x}(t)$ при $\varepsilon_k\to0$. Рассмотрим функционал

$$u_\varepsilon(x, y)\equiv(x, c)^2+2\varepsilon(x, c)(\Pi F_1(x, y), c)+\varepsilon^2u(x, y),$$

где

$$u(x, y)\equiv\Pi\left\{2(F_1(x, y), c)(\Pi F_1(x, y), c)-\right.$$

$$-2(g_1(x, y), c)\left(f_1(x, y)+\frac{1}{2}a(y)g_1(x, y), c\right)+2(x, c)(F_2(x, y), c)+$$

$$+2(x,c)([\Pi DF_1(x, y)]F_1(x, y), c)-2(x, c)([DF_1(x, y)]g_1(x, y), c)-$$

$$\left.-(A(x)c, c)-2(x, c)(b(x, c))\right\}.$$

Из теоремы 6 и леммы 3 следует, что СИО имеет вид

$$\widetilde{L}(\varepsilon)u_\varepsilon(x, y)=(A(x)c, c)+2(x, c)(b(x), c)+r_{4\varepsilon}(x, y),$$

где $r_{4\varepsilon}\in V_2$, $\sup\limits_{0<\varepsilon<1}\|r_{4\varepsilon}\|<\infty$ и $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow0}r_{4\varepsilon}(x, y)=0$ для всех $x\in\mathbb{R}^m$ и $y\in Y$.

Пусть
$$\overline{v}_{\varepsilon}(x,\ y)=(x,\ c)+\varepsilon(\Pi F_1(x,\ y),\ c)+\varepsilon^2\overline{u}(x,\ y),$$
где
$$\overline{u}(x,\ y)=\Pi\{(F_2(x,\ y),\ c)+([\Pi DF_1(x,\ y)]F_1(x,\ y),\ c)-$$
$$-([\Pi DF_1(x,\ y)]g_1(x,\ y),\ c)-(b(x),\ c)\}.$$
Очевидно, что
$$L(\varepsilon)\overline{v}_{\varepsilon}(x,\ y)=(b(x),\ c)+r_{5\varepsilon}(x,\ y),$$
где $r_{5\varepsilon}\in V_2$, $\sup\limits_{0<\varepsilon<1}\|r_{5\varepsilon}\|<\infty$ и $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}r_{5\varepsilon}(x,\ y)=0$ для всех $x\in\mathbb{R}^m$ и $y\in Y$.

Этап 3. Докажем существование коэффициента $\overline{A}(x)$ СДУ (30). Для этого воспользуемся формулой
$$E_{x,\ y}(\overline{x}(t)-x,\ c)^2=E_{x,y}(\overline{x}(t),c)^2-(x,c)^2-2(x,c)E_{x,y}\{(\overline{x}(t),c)-(x,c)\}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}E_{x,y}\{\overline{u}_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}(t),\ y_{\varepsilon_k}(t))-\overline{u}_{\varepsilon_k}(x,\ y)\}-$$
$$-2(x,c)\lim_{\varepsilon_k\downarrow 0}E_{x,y}\{\overline{v}_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}(t),\ y_{\varepsilon_k}(t))-\overline{v}_{\varepsilon_k}(x,\ y)\}.$$
Следовательно, для $\forall t\ge 0$
$$0\le E_{x,y}(\overline{x}(t)-x,\ c)^2=\int_0^t E_{x,y}\,A(\overline{x}(s)c,\ c)\,ds+$$
$$+2\int_0^t E_{x,y}(\overline{x}(s),c)(b(\overline{x}(s)))\,ds-2(x,c)\int_0^t E_{x,y}(b(\overline{x}(s)),c)\,ds.$$
Тогда
$$(A(x),\ c)=\frac{d}{dt}E_{x,y}\{(\overline{x}(t)-x,c)^2\}\Big|_{t=0}\ge 0$$
для всех $x\in\mathbb{R}^m$ и $c\in\mathbb{R}^m$. Итак, симметричная матрица $A(x)$ неотрицательно определена, и тогда существует неотрицательно определенная матрица $\overline{A}(x)$, для которой $(\overline{A}(x))^2=A(x)$.

Этап 4. Докажем, что предельный процесс $\overline{x}(t)$ удовлетворяет СДУ (30).

Пусть $v_0(x)$ имеет компактный носитель и две непрерывные производные от v_1 и u удовлетворяют условиям теоремы 6, а $v_{\varepsilon}=v_0+\varepsilon v_1+\varepsilon^2 u$. Тогда из теоремы 6 получим равенство
$$E_{x,y}v_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}(t),\ y_{\varepsilon}(t))=v_{\varepsilon}(x,\ y)+\int_0^t E_{x,y}\{L(\varepsilon)v_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}(\tau),\ y_{\varepsilon}(\tau))\}d\tau=$$
$$=v_{\varepsilon}(x,\ y)+\int_0^t E_{x,y}\,L_0v_0(x_{\varepsilon}(\tau))\,d\tau+\int_0^t E_{x,y}\{\hat{r}_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}(\tau),\ y_{\varepsilon}(\tau))\}d\tau,$$
где $\hat{r}_{\varepsilon}\in V_2$, $\sup\limits_{0<\varepsilon<1}\|\hat{r}_{\varepsilon}\|<\infty$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\hat{r}_{\varepsilon}(x,\ y)=0$ для всех $x\in\mathbb{R}^m$ и $y\in Y$.

Далее имеем очевидные равенства
$$E_{x,y}v_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}(t),\ y_{\varepsilon}(t))-E_{x,y}v_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}(s),\ y_{\varepsilon}(s))=E_{x,y}v_0(x_{\varepsilon}(t))-E_{x,y}v_0(x_{\varepsilon}(s))+$$
$$+\varepsilon[E_{x,y}[\gamma(x_{\varepsilon}(t),\ y_{\varepsilon}(t))-\gamma(x_{\varepsilon}(s),\ y_{\varepsilon}(s))]];$$
$$\int_0^t E_{x,y}\{L(\varepsilon)v_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}(\tau),\ y_{\varepsilon}(\tau))\}\,d\tau=$$
$$=\int_0^t E_{x,y}L_0v_0(x_{\varepsilon}(\tau))\,d\tau+\int_0^t E_{x,y}\hat{r}_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}(\tau),\ y_{\varepsilon}(\tau))\,d\tau,$$

где $\gamma(x, y) \equiv v_1(x, y) + \varepsilon u(x, y)$, причем $v_1 \in V_0$, $u \in V_0$, поскольку $v_0(x)$ имеет компактный носитель.

Таким образом, получим бесконечно малую величину

$$\sup_{0 \le s \le t \le T} \left| E_{x,y} v_0(x_\varepsilon(t)) - E_{x,y} v_0(x_\varepsilon(s)) - \int_s^t E_{x,y} L_0 v_0(x_\varepsilon(\tau))\, d\tau \right| = o(\varepsilon)$$

при всех $T > 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Y$.

Отсюда следует, что предельный процесс $\bar{x}(t)$ удовлетворяет СДУ Ито (30). При этом коэффициенты уравнения (30) ввиду выполнения ограничений на функции $f_j(x, y)$ и $g_j(x, y)$, $j = 1, 2$, удовлетворяют глобальному условию Липшица. Поэтому для $\forall x \in \mathbb{R}^m$ СДУ (30) имеет единственное решение начальной задачи $\bar{x}(0) = x$.

Таким образом, вся последовательность $\{x_\varepsilon(t)\}$ при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится к предельному процессу $\bar{x}(t)$, который удовлетворяет уравнению (30). Теорема 7 доказана.

7. СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ НОРМИРОВАННЫХ УКЛОНЕНИЙ

Пусть непрерывный справа случайный процесс $x(t) \in \mathbb{R}^m$ при $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяет ДУ Ω

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, y(t), \varepsilon), \tag{31}$$

при $\forall t \in \{\tau_j, j \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию скачка

$$x(t) = x(t-) + \varepsilon g(x(t-), y(t-), \varepsilon) \tag{32}$$

и начальному условию $x(0) = x$.

Предположим, что функции f и g могут быть представлены в виде

$$f(x, y, \varepsilon) = f_1(x, y) + \varepsilon f_2(x, y) + \varepsilon f_3(x, y, \varepsilon),$$
$$g(x, y, \varepsilon) = g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y) + \varepsilon g_3(x, y, \varepsilon),$$

где f_1 и g_1 непрерывны и имеют две ограниченные непрерывные производные по x; $f_2(x, y)$, $f_3(x, y, \varepsilon)$, $g_2(x, y)$, $g_3(x, y, \varepsilon)$ непрерывны и имеют две ограниченные непрерывные производные по x, причем для всех $y \in Y$ и $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\| Df_3(x, y, \varepsilon) \| + \| Dg_3(x, y, \varepsilon) \| \le \beta(\varepsilon),$$

где $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \beta(\varepsilon) = o(\varepsilon)$. Обозначим

$$X_\varepsilon(t) = \varepsilon^{1/2} [x(t/\varepsilon) - u(t, x)], \tag{33}$$

где $x(t)$ — решение (31), (32) по начальным $x(0) = x$, а $u(t, x)$ — решение усредненного уравнения [15, 18]

$$\frac{du}{dt} = b_1(u) \tag{34}$$

с начальным условием $u(0) = x$.

Случайный процесс $X_\varepsilon(t)$ (33) согласно [15] будем называть нормированным отклонением решения импульсной системы (31), (32) от соответствующего усредненного уравнения (34) с тем же начальным условием.

Теорема 8. Пусть выполнены условия для функций систем (31), (32) и (34). Тогда нормированные оклонения (33) $\{X_\varepsilon(t)\}$, $0 \le t \le \tau$, для всех $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Y$, $T > 0$ при $\varepsilon \to 0$ слабо сходятся к диффузионному марковскому процессу $\{X(t)\}$, $0 \le t \le \tau$, который удовлетворяет СДУ

$$dX = Db_1(u(t,x))\, X\, dt + \overline{A}(u(t,x))\, dW(t)$$

с начальным условием $X(0)=0$. Здесь симметричная неотрицательная матрица $\overline{A}(x)$ определется как

$$|\overline{A}(x)c|^2 = 2\int_Y \Big\{ (F_1(x,\, y) - b_1(x),\, c)(\Pi F_1(x,\, y),\, c) - (g_1(x,\, y),\, c)(f_1(x,\, y) - b_1(x) + \\ + \frac{1}{2} a(y) g_1(x,\, y),\, c)\, \mu(dy) \Big\},$$

где $c \in \mathbb{R}^m$ — произвольный вектор, $W(t)$ — стандартный процесс броуновского движения [6, 11].

Доказательство. Выпишем систему ДУ Ω в $\mathbb{R}^{2m}$ для пары $\{X_\varepsilon(t),\, u(t,x)\}$ в виде

$$\frac{dX_\varepsilon}{dt} = \varepsilon^{-1/2}(f_1(u,\, y^\varepsilon(t)) - b_1(u)) + (Df_1)(u,\, y^\varepsilon(t)) X_\varepsilon + \\ + \int_0^1 ((Df_1)(s\varepsilon^{1/2} X_\varepsilon + u,\, y^\varepsilon(t)) - (Df_1)(u,\, y^\varepsilon(t)))ds \times X_\varepsilon + \\ + \varepsilon^{1/2} \overline{f}_2(\varepsilon^{1/2} X_\varepsilon + u,\, y^\varepsilon(t),\, \varepsilon)$$

для $t \in (\varepsilon\tau_{j-1},\, \varepsilon\tau_j)$,

$$X_\varepsilon(t) = X_\varepsilon(t-) + \varepsilon^{1/2} g_1(u(t,x),\, y^\varepsilon(t-)) + \varepsilon(Dg_1)(u(t,x),\, y(t-)) X_\varepsilon(t-) + \\ + \varepsilon \int_0^1 [(Dg_1)(se^{1/2} X_\varepsilon(t-) + u(t,x),\, y^\varepsilon(t-)) - (Dg_1)(u(t,x),\, y^\varepsilon(t-))]ds + \\ + \varepsilon^{3/2} \overline{g}_2(\varepsilon^{1/2} X_\varepsilon(t-) + u(t,x),\, y^\varepsilon(t-),\, \varepsilon)$$

для всех $t \in \{\varepsilon\tau_j,\, j \in \mathbb{N}\}$ с начальным условием $X_\varepsilon(0) = 0$, $u(0,x) = x$, где

$$\overline{f}_2(x,\, y,\, \varepsilon) \equiv f_2(x,\, y) + f_3(x,\, y,\, \varepsilon), \quad \overline{g}_2(x,\, y,\, \varepsilon) \equiv g_2(x,\, y) + g_3(x,\, y,\, \varepsilon).$$

Легко увидеть, что для анализа этой системы можно использовать результаты из разд. 6, заменив ε на $\sqrt{\varepsilon}$, а f_1 — на вектор $(f_1(u,\, y) - b_1(u);\, 0)^{\mathrm{T}}$, g_1 — на вектор $(g_1(u,\, y);\, 0)^{\mathrm{T}}$; f_2 — на вектор $([Df_1(u,\, y)];\, b_1(u))^{\mathrm{T}}$; g_2 — на вектор $([Df_1(u,\, y)]X;\, 0)^{\mathrm{T}}$. Заметим, что все остальные слагаемые стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ и на результаты вычисления СИО предельного диффузионного процесса не отражается. Остается воспользоваться теоремой 7, а также коэффициентами сноса и диффузии в уравнении (30) с учетом сделанных замечаний. Теорема 8 полностью доказана. ■

8. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПО ПРЕДЕЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

На вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$, $F \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},\, t \geq 0\}$, рассмотрим импульсную систему

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A_1(y(t))x + \varepsilon^2 A_2(y(t))x \tag{35}$$

при $t \in (\tau_{j-1},\, \tau_j)$, $j \in \mathbb{N}$,

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t-) + \varepsilon B_1(y_\varepsilon(t-)) x_\varepsilon(t-) + \varepsilon^2 B_2(y_\varepsilon(t-)) x_\varepsilon(t-) \tag{36}$$

при $t \in (\tau_j,\, j \in \mathbb{N}\}$.

В соответствии с теоремой 2 из [17] об экспоненциальной устойчивости достаточным условием экспоненциальной p-устойчивости решения системы (35), (36) является асимптотическая устойчивость детерминированного ДУ

$$\frac{du}{dt} = \overline{G}u,$$

где

$$\overline{G} = \int_Y [A_1(y) + a(y)B_1(y)]\mu(dy),$$

т.е. условие принадлежности спектра

$$\sigma(\overline{G}) \subset \{z : C : \operatorname{Re} z < 0\}.$$

Пусть теперь $\overline{G} = 0$. В (35), (36) проведем замену времени $t = \varepsilon^2 t$ и перейдем к случайным процессам $x_\varepsilon(t) \equiv x\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)$ и $y_\varepsilon(t) \equiv y\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)$.

Обозначим $G_j(y) \equiv A_1(y) + a(y)B_j(y)$, $j = 1, 2$, выпишем диффузионное СДУ для слабого предела $\bar{x}(t)$ процесса $x_\varepsilon(t)$

$$d\bar{x} = B\bar{x}dt + \sum_{j=1}^{m} C_j \bar{x}\, dW_j(t), \quad j = 1, \dots, m, \tag{37}$$

где $W_1(t), \dots, W_m(t)$ — независимые скалярные стандартные винеровские процессы,

$$B \equiv \int_Y \{G_2(y) + [\Pi G_1(y)]G_1(y) + G_1(y)B_1(y)\}\mu(dy),$$

а действительные матрицы $C_1, C_2, \dots, C_m$ определяются формулой

$$\sum_{j=1}^{m} C_j^{\mathrm{T}} q C_j = \int_Y \{G_1^{\mathrm{T}}(y) q [\Pi G_1(y) - B_1(y)] +$$

$$+ a(y)B_1^{\mathrm{T}}(y) q B_1(y) + [\Pi G_1(y) - B_1(y)]^{\mathrm{T}} q G_1(y)\}\mu(dy)$$

с произвольной симметричной матрицей q.

Теорема 9. Пусть тривиальное решение СДУ (37) экспоненциально p-устойчиво при некотором $p > 0$. Тогда существует такое положительное число $\varepsilon_0 > 0$, что для $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ система (35), (36) экспоненциально p-устойчива, т.е.

$$\sup_{y \in Y} E_{x,y} |x_\varepsilon(t)| \le M e^{-rt} |x|^p$$

при некотором $r > 0$, $M > 0$ и $\forall x \in \mathbb{R}^m$.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$v_0(x) = \int_0^T E_x |\bar{x}(t)|^p \, dt,$$

где $\bar{x}(t)$ — решение СДУ (37).

В соответствии с результатами работы [15] для достаточно большого $T > 0$ можно выписать оценки

$$\begin{cases} c_1 |x|^p \le v_0(x) \le c_0 |x|^p, \quad c_1 > 0; \\ L^{(53)} v_0(x) \le -c_3 |x|^p, \quad c_3 > 0; \\ \| D^j v_0(x) \| \le k |x|^{p-1}, \quad j = \overline{1,3}, \end{cases} \tag{38}$$

где D^j — производная Фреше порядка j, $L^{(53)}$ — СИО марковского процесса $\bar{x}(t)$.

Далее строим функцию Ляпунова

$$v(x,\ y) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x,\ y) + \varepsilon^2 v_2(x,\ y),$$

где $v_1(x,\ y) = (\Pi G_1(y)x, \nabla) v_0(x)$, а $v_2(x,\ y)$ удовлетворяет уравнению

$$Qv_2(x,\ y) = -\left\{ (G_1(y)x, \nabla) v_1(x,\ y) + (G_2(y)x, \nabla) v_0(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(B_1(y)x, \nabla)^2 v_0(x) \right\} + L^{(53)} v_0(x). \tag{39}$$

Решение уравнения (39) существует в силу конструкции матриц B, $C_1, C_2, \ldots, C_m$ и функций $v_0(x)$ и $v_1(x,\ y)$, поскольку правая часть (39) в среднем по мере $\mu(dy)$ равна нулю. Вследствие неравенств (38) для всех $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Y$, $j = 1, 2$, выполнены очевидные неравенства

$$|v_j(x,\ y)| \le K_1 |x|^p, \tag{40}$$

$$|\nabla v_j(x,\ y)| \le K_1 |x|^{p-1} \tag{41}$$

при некотором $K_1 > 0$. Следовательно,

$$\widetilde{L}(\varepsilon) v(x,\ y) = L^{(53)} v_0(x,\ y) + r(x, y, \varepsilon),$$

причем

$$|r(x, y, \varepsilon)| \le L(\varepsilon) |x|^p,$$

а $\alpha(\varepsilon)$ — бесконечно малая величина при $\varepsilon \to 0$, $L(\varepsilon)$ — СИО пары $\{x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\}$.

Далее, из (38), (40), (41) получим неравенства

$$c_4 |x|^p \le v(x,\ y) \le c_5 |x|^p,\ c_4 > 0; \quad \widetilde{L}(\varepsilon) v(x,\ y) \le -c_6 |x|^p,\ c_6 > 0$$

при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Y$, некоторых $c_5 > c_4 > 0$, $c_6 > 0$ и достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$. Тогда можно записать неравенство

$$E_{x,y} |x_\varepsilon(t)|^p \le \frac{1}{c_4} v(x,\ y) + \frac{1}{c_4} \int_0^t E_{x,y}\, L(\varepsilon) v(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)) ds \le$$

$$\le \frac{c_5}{c_4} |x|^p - \frac{c_6}{c_4} \int_0^t E_{x,y} |x_\varepsilon(s)|^p\, ds.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы 9. ■

9. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

На вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ рассмотрим импульсную систему

$$\frac{dx}{dt} = y(t) A x \tag{42}$$

при $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j),\ j \in \mathbb{N}$, где A — действительная матрица размера $m \times m$,

$$x(t) = (I + \varepsilon y(t-) c) x(t-) \tag{43}$$

при $t \in \{\tau_j, j \in \mathbb{N}\}$, где $y(t)$ — марковский процесс с двумя состояниями: $y_1 = +1$; $y_2 = -1$ и производящим оператором

$$Q \equiv \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{pmatrix},\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1.$$

Решение. Инвариантной мерой в данном случае является строка $\mu\{\beta, \alpha\}$, а потенциальный оператор П определен на векторах вида $c = (\alpha, -\beta)^{\mathrm{T}}$, $c \in \mathbb{R}^1$,

$$\Pi C \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Интенсивность скачков определяется вектором с координатами $a(y_1) = \alpha$, $a(y_2) = \beta$.

Таким образом, имеем

$$A_1(y) = yA;\ By = yC;\ A_2(y) = B_2(y) = 0;\ y_1 \equiv 1;\ y_2 \equiv -1;$$

$$G_1(y_1) = (A + \alpha C);\ G_2(y_2) = -(A + \beta C);$$

$$\int_Y G_1(y)\mu(dy) = (\beta y_1 + \alpha y_2)A + \alpha\beta(y_1 + y_2)C = (\beta - \alpha)A.$$

Тогда достаточным условием экспоненциальной устойчивости является расположение спектра матрицы $(\beta - \alpha)A$ в левой полуплоскости $\{\lambda \in C : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$.

Пусть теперь $\beta = \alpha = 1/2$. Тогда

$$G_1 = 0;\ \Pi G_1(y_1) = A + \frac{1}{2}C;\ \Pi G_1(y_2) = G_2 y_2 = -\left(A + \frac{1}{2}C\right);$$

$$B = \int_Y [\Pi G_1(y_1)]G_1(y)\mu(dy) - \int_Y G_1(y_1)B_1(y)\mu(dy) =$$

$$= \left(A + \frac{1}{2}C\right)^2 - \left(A + \frac{1}{2}C\right)C = \left(A + \frac{1}{2}C\right)\left(A - \frac{1}{2}C\right);$$

$$\sum_{j=1}^{m} C_j^{\mathrm{T}} q C_j = \int_Y G_1^{\mathrm{T}}(y) q [\Pi G_1(y) - B_1(y) + a(y) B_1^{\mathrm{T}}(y) q B_1(y) +$$

$$+ [\Pi G_1(y) - B_1(y)]^{\mathrm{T}} q G_1(y)\} \mu(dy) = \left(A + \frac{1}{2}C\right)^{\mathrm{T}} q \left(A - \frac{1}{2}C\right) +$$

$$+ C^{\mathrm{T}} q C + \left(A - \frac{1}{2}C\right)^{\mathrm{T}} q \left(A - \frac{1}{2}C\right) = 2A^{\mathrm{T}} q A + \frac{1}{2}C^{\mathrm{T}} q C,$$

где C — матрица размера $m \times m$.

Предельное СДУ для (42), (43) имеет вид

$$d\bar{x} = \left(A + \frac{1}{2}C\right)\left(A - \frac{1}{2}C\right)\bar{x}\,dt + \sqrt{2}A\bar{x}\,dW_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}C\bar{x}\,dW_2(t),$$

где $W_1(t)$, $W_2(t)$ — независимые скалярные процессы броуновского движения [8].

Условием среднеквадратической асимптотической устойчивости этого уравнения является положительная определенность матрицы q, которая является решением уравнения

$$\left(A - \frac{1}{2}C\right)^{\mathrm{T}}\left(A + \frac{1}{2}C\right)^{\mathrm{T}} q + q\left(A + \frac{1}{2}C\right)\left(A - \frac{1}{2}C\right) + 2A^{\mathrm{T}} q A + \frac{1}{2}C^{\mathrm{T}} q C = -I,$$

где I — единичная матрица из $M_m(\mathbb{R}^1)$. ■

Таким образом, в статье применен второй метод Ляпунова для исследования устойчивости сложных нелинейных динамическим импульсных систем с марковским переключениями. Заметим, что для нелинейных стохастических систем иного метода исследования асимптотического поведения, по-видимому, не существует. Рассмотрен метод усреднения и его применение для исследования решения линейной системы. Построена модельная задача, которая показывает возможности алгоритмизации исследования поведения решения импульсных динамических систем с марковскими переключениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биллингли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977. — 352 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 612 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. — М.: Наука, 1975. — Т. 3. — 496 с.
4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
5. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962. — 895 с.
6. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. — М.: ИЛ, 1956. — 605 с.
7. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1963. — 859 с.
8. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. — М.: Наука, 1994. — Т. 1. — 544 с.
9. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. — М.: Наука, 1996. — Т. 2. — 628 с.
10. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
11. Королюк В.С., Царков Є.Ф, Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. В 3-х томах. — Т. 3. — Випадкові процеси. Комп'ютерне моделювання. — Чернівці: Золоті литаври, 2009. — 798 с.
12. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. — Киев: Вища шк., 1967. — 287 с.
13. Свердан М.Л., Царьков Е.Ф. Устойчивость импульсных систем. — Рига: Изд-во РТУ, 1994. — 304 с.
14. Скороход А.В. Асимптотические методы теории дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1978. — 328 с
15. Хасминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущение их параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
16. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К., Малык И.В. Усреднение и устойчивость импульсных систем с марковскими возмущениями. I // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 6. — С. 128–132.
17. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К., Малык И.В. Усреднение и устойчивость импульсных систем с марковскими возмущениями. II // Там же. — 2011. — № 1. — С. 50–60.
18. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 419 с.
19. Blankenship G., Papanicolaou G.C. Stability and control of stochastic system with wide-band noise disturbance // SIAM. J. Appl. Mat.. 1978. — **34.** — P. 437–476.
20. Korolyuk V.S. Averaging and stability of dynamical system with rapid Markov switchings // Univ. of Umea, S-90167, Umea, 1991. — Febr. — 15 p.
21. Korolyuk V.S., Limnios N. Diffusion approximation of integral functional in merging an averaging scheme // Theory Probab. and Math. Statist. — 2000. — **60.** — P. 87–94.
22. Tsarkov Ye. Averaging in dynamical system with Markov jumps. — Bremen, 1993. — 41 p. (Prepr/ Univ. of Bremen, Inst. of Dynamical Syst.; N 282).

Поступила 14.05.2009