ПРОГРАММНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ

П.Н. ДЕНИСЕНКО

УДК 681.142.2 / 518.3

АЛГОРИТМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ τ-МЕТОДА ЛАНЦОША И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ СРЕДСТВАМИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ключевые слова: *символьные вычисления, программирование, численные методы, дифференциальные уравнения.*

ТЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ

К классическому аппарату математического моделирования относятся специальные математические функции (СМФ) Бесселя, Неймана и др. Системы компьютерной алгебры (СКА) аналитически преобразуют достаточно узкий класс СМФ. В целях символьного преобразования в СКА более широкого класса СМФ эти функции необходимо аппроксимировать многочленами на некотором отрезке $[a, b]$. СКА Maple вычисляет значения отдельных СМФ и частную сумму ряда Фурье–Чебышева этих СМФ.

Определение СМФ. Значительная часть СМФ обычно определяется [1; 2, с. 292–295] как решение линейного дифференциального уравнения с коэффициентами-многочленами и регулярной особой точкой нуль (ЛДУМКО)

$$D[y]+G=0,\;\; D[y]=A\cdot y^{(k)}+\ldots+C\cdot y. \tag{1}$$

Начальные условия заданы в этой точке:

$$\text{init\_cond}(y,0)=\{y(0)=Y_0,\; y'(0)=Y_1,\ldots,\; y^{(l-1)}(0)=Y_{l-1}\},\;\; l<k. \tag{2}$$

Условия заданы в регулярной особой точке нуль уравнения (1). В этой точке:

— многочлен $A(1)$ имеет нуль

$$A(0)=0; \tag{3}$$

— уравнение (1) имеет аналитическое решение;

— система (1), (2) имеет единственное решение — функцию

$$y=y(x)=\text{solve}(D[y]+G=0,\;\text{init\_cond}(y,0))=$$
$$=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots,\;\; c_i=y^{(i)}(0)/i!,\;\; i=0,1,\ldots,\;\; x\in[a,b]. \tag{4}$$

Постановка задачи. Построить алгоритм преобразования задачи Коши для ЛДУМКО (1)–(3) в алгебраический многочлен порядка $n\in N$

$$y_n=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n=$$
$$=\text{algorithm}(D[y]+G=0,\text{init\_cond}(y,0),[a,b],n). \tag{5}$$

Этот многочлен оптимально аппроксимирует решение y из (4) задачи Коши для ЛДУМКО (1)–(3), т.е. коэффициент оптимальности алгоритма на этой задаче в пространстве $X = C^k_{[a,b]}$ ограничен

$$X\,\| y - y_n \|_X \,/\, \inf_{\{c_0,\ldots,c_n\}} \| y(x) - (c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n) \|_X =$$
$$= C_n(\text{algorithm},\ D[y] + G = 0,\ \text{init\_cond}\,(y, 0),\ X) = O(1)\,. \tag{6}$$

Алгоритм должен иметь только алгебраические преобразования.

СКА оптимально аппроксимируют многочленами очень узкий класс СМФ. Поэтому такой алгоритм необходим для создания математического обеспечения СКА в области аппроксимации СМФ, что является актуальным для математического моделирования.

Алгебраические методы ряда Чебышева. По τ-методу Ланцоша [1] решена [2] задача Коши для ЛДУМКО (1)–(3), определяющих основные СМФ, и вычислены коэффициенты Фурье–Чебышева СМФ. Коэффициенты СМФ являются основанием для процедур системного программного обеспечения компьютеров. С помощью этих процедур вычисляют значения СМФ и аппроксимирующие СМФ многочлены. Важность таких процедур инициировала разработку новых аналитических приближенных методов решения задачи Коши для ЛДУМКО. Построены методы Кленшоу [2], Миллера [2], Дзядыка [3] и другие алгебраические методы. Доказана сходимость одного из этих методов — a-метода Дзядыка [3]. По a-методу решают задачу Коши (2) $(l = k)$ для линейных дифференциальных уравнений вида (1) с коэффициентами-многочленами без особенности (3), т.е. $A(0) \neq 0$.

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ a-МЕТОДА

Алгоритм 1.

Вход. $D[y] + G = 0$, $\text{init\_cond}\,(y, 0)$, $[a, b]$, n.

Выход. Многочлен y_n (5).

Преобразования.

1. Вычислить частную сумму порядка $k-1$ ряда Тейлора (4)

$$y_{k-1} = y(0) + y'(0)x + \ldots + y^{(k-1)}(0)/(k-1)!\,x^{k-1} = T[\text{init\_cond}(y, 0)]. \tag{7}$$

2. Преобразовать уравнение (1) и многочлен (7) в интегральное уравнение

$$L[u] + F + G = 0, \text{ где } L[u] = D[V^k[u]],\ F = D[y_{k-1}], \tag{8}$$

относительно функции $u = y^{(k)}$, k — порядок ЛДУМКО (1),

$$k = \text{ord\_equ}(D[y]),\ \ y = V^k[u] + y_{k-1},\ V[u] = \int_0^x u(t)\,dt. \tag{9}$$

3. Регуляризировать уравнение (8) — преобразовать это уравнение к виду

$$(L[u] + F + G)/x^r = 0, \tag{10}$$

где

$$r = \text{deg\_nul}(L[u_p \in P_p] + F + G),\ \ p = n - k\,, \tag{11}$$

r — число нулей (в точке нуль) многочлена

$$L[u_p \in P_p] + F + G\,, \tag{12}$$

$$(u_p \in P_p) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n,\ \ c_0, c_1, \ldots, c_n \in \text{Atom}\,, \tag{13}$$

$u_p \in P_p$ — многочлен порядка p с символьными коэффициентами. Этот многочлен является элементом общего вида множества алгебраических многочленов порядка p.

4. Вычислить и решить аппроксимацию уравнения (10) на отрезке $[a, b]$ по a-методу [3] с параметром $p = n - k$

$$(L[u_p \in P_p] + F + G)/x^r + (E_{m,p} \in H_{m \backslash p}[a, b]) = 0, \tag{14}$$

где

$$(E_{m,p} \in H_{m \backslash p}[a, b]) = \tau_1 \cdot \mathrm{cheb}(p+1, z(x)) + \ldots + \tau_{m-p} \cdot \mathrm{cheb}(m, z(x)), \tag{15}$$

$$m = \deg((L[u_p \in P_p] + F + G)/x^r), \tag{16}$$

есть порядок многочлена

$$(L[u_p \in P_p] + F + G)/x^r. \tag{17}$$

Дополнительный многочлен (15) имеет символьные коэффициенты $\tau_1, \ldots, \tau_{m-p}$, а также базис пространства Гильберта $L_2(a, b; \rho)$

$$\mathrm{cheb}(0, z(x)), \mathrm{cheb}(1, z(x)), \ldots, \mathrm{cheb}(i, z(x)), \ldots, \tag{18}$$

т.е. многочлены Чебышева первого рода на отрезке $[a, b]$:

$$\mathrm{cheb}(i, x) = \cos(i \cdot \arccos(x)), \quad z(x) = 2 \cdot (x - a)/(b - a) - 1. \tag{19}$$

Результатом решения уравнения (14) являются многочлен u_p и значения $\tau_1(n), \ldots, \tau_{m-p}(n)$ коэффициентов $\tau_1, \ldots, \tau_{m-p}$

$$(u_p, \tau_1(n), \ldots, \tau_{m-p}(n)) =$$
$$= \mathrm{solve}((L[u_p \in P_p] + F + G)/x^r + (E_{m,p} \in H_{m \backslash p}[a, b]) = 0). \tag{20}$$

Многочлен u_p аппроксимирует функцию $y^{(k)} = u$.

5. Вычислить первообразную порядка k многочлена u_p — искомую аппроксимацию решения y (4) задачи Коши для ЛДУМКО (1)–(3)

$$y_n = \mathrm{algorithm}_1(D[y] + G = 0, \mathrm{init\_cond}(y, 0), [a, b], n) = V^k[u_p] + y_{k-1}. \tag{21}$$

ОПТИМАЛЬНОСТЬ АЛГОРИТМА 1 НА МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Модельная задача. Дифференциальное уравнение Бесселя порядка нуль

$$x \cdot y'' + y' + x \cdot y = 0 \tag{22}$$

является модельной задачей для методов ряда Чебышева [2, с. 292–295].

Система из уравнения (22) и условия

$$y(0) = 1 \tag{23}$$

имеет единственное решение — функцию Бесселя порядка нуль

$$y = J_0 = J_0(x) = \mathrm{solve}(xy'' + y' + xy = 0, \ y(0) = 1).$$

Наилучшее приближение функции Бесселя в пространстве *C*. Функция J_0 — целая. Отличные от нуля коэффициенты Фурье–Чебышева функции J_0 на отрезке $[-4, 4]$ — только четные

$$\{a_{2i}(J_0, [-4, 4])\}_{i=0}^{11} = \{0.1, -0.67, \ 0.24, -0.033, \ 0.0023, -9.9 \cdot 10^{-5},$$
$$2.9 \cdot 10^{-6}, -6.1 \cdot 10^{-8}, 9.8 \cdot 10^{-10}, -1.2 \cdot 10^{-11}, 1.3 \cdot 10^{-13}, -1.1 \cdot 10^{-15}\}. \tag{24}$$

При увеличении параметра $n = 2i$ эти коэффициенты монотонно убывают к нулю $|a_{2i}(J_0, [-4, 4])| = o(q^i)$, $q \approx 0.01$. Следовательно, для величины наилучшего приближения функции J_0 алгебраическими многочленами порядка n в пространстве $C_{[-4, 4]}$ справедливо тождество

$$\inf_{\{c_0, \ldots, c_n\}} || J_0(x) - (c_0 + \ldots + c_n x^n) ||_{C_{[-4, 4]}} = (1 + o(1)) |a_{2[n/2]+2}(J_0, [-4, 4])|. \tag{25}$$

Вычислительный эксперимент с алгоритмом 1 в пространстве *C*. Норма в пространстве $C_{[-4,4]}$ погрешности решения задачи Коши для уравнения Бесселя (22), (23) по алгоритму 1 удовлетворяет тождества

$$\{\|J_0 - y_{2i}\|_{C_{[-4,4]}} = \|J_0 - y_{2i}\|_{C_{[-4,4]}}\}_{i=1}^{10} =$$

$$= \{0.53, 0.2, 0.02, 0.0001, 3\cdot 10^{-5}, 6.6\cdot 10^{-7}, 1.1\cdot 10^{-8}, 1.3\cdot 10^{-10}, 1.4\cdot 10^{-12}, 1.1\cdot 10^{-14}\}. \quad (26)$$

При увеличении параметра n эти погрешности монотонно убывают к нулю. Скорость убывания погрешности (26) несколько меньше скорости убывания коэффициентов Фурье–Чебышева (24) функции J_0 на отрезке $[-4, 4]$.

Главная часть коэффициента оптимальности (6) алгоритма 1 в задаче Коши для уравнения Бесселя (22), (23) в пространстве $C_{[-4,4]}$ принимает следующие значения:

$$\|J_0 - y_n\|_{C_{[-4,4]}} / |a_{2[n/2]+2}(J_0, [-4, 4])| = C_{2[n/2]},$$

$$\{C_{2i}\}_{i=1}^{10} = \{2, 6, 9, 10, 10.5, 10.75, 10.87, 10.84, 10.83, 10.87\}. \quad (27)$$

Поэтому из тождеств (25) и (27) можно сделать следующее заключение.

Вывод 1. Коэффициент оптимальности (6) решения по алгоритму 1 задачи Коши для уравнения Бесселя (22), (23) в пространстве $C_{[-4,4]}$ практически не зависит от параметра n

$$C_n(\text{algorithm}_1, xy'' + y' + xy = 0,\ y(0) = 1,\ C_{[-4,4]}) = (1 + o(1))C_{2[n/2]}. \quad (28)$$

Сравнение классических методов и алгоритма 1. Результаты решения задачи Коши для уравнения Бесселя порядка нуль (22), (23) на отрезке $[-4, 4]$ методами Кленшоу (Clenshaw), Миллера (Miller) и Ланцоша (τ-method) изложены в [2, с. 292–295]. Согласно этих результатов

$$C_n(\text{Clenshaw}, xy'' + y' + xy = 0,\ y(0) = 1,\ C_{[-4,4]}) \geq 7,$$

$$C_n(\text{Miller}, xy'' + y' + xy = 0,\ y(0) = 1,\ C_{[-4,4]}) \geq 4,$$

$$C_n(\tau\text{-method},\ xy'' + y' + xy = 0,\ y(0) = 1,\ C_{[-4,4]}) \geq 35,$$

т.е. эти значения больше значений (28), (27) коэффициента оптимальности алгоритма 1.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА

Алгоритм 2.

1. Вычислить многочлен (7).
2. Вычислить интегральное уравнение (8).
3. Вычислить интегральное уравнение (10).
4. Решить уравнение (10) по методу Галёркина в пространстве $L_2(a, b; \rho)$ с параметром $p = n - k$ и вычислить многочлен

$$u_p = \text{solve}(S_p[(L[u_p] + F + G) / x^r] = 0 \ \ (u_p \in H_p[a, b])), \quad (29)$$

где оператор $S_p : L_2(a, b; \rho) \to H_p[a, b]$, т. е. вычисляет частную сумму порядка p ряда Фурье–Чебышева функции на отрезке $[a, b]$

$$S_p[y] = a_0(y, [a, b]) + a_1(y, [a, b])z(x) + \ldots + a_p(y, [a, b])\text{cheb}(p, z(x)).$$

Этот многочлен является элементом пространства $H_p[a, b] \subset L_2(a, b; \rho)$ — линейной оболочки первых $p+1$ элементов базиса (18).

5. Вычислить преобразование (21) многочлена u_p (29), т.е. искомую аппроксимацию решения y (4) задачи Коши для ЛДУМКО (1)–(3)

$$y_n = \mathrm{algorithm}_2 (D[y]+G=0, \mathrm{init\_cond}(y,0), [a,b], n) = V^k[u_p] + y_{k-1}.$$

Лемма 1. Аппроксимация (14) уравнения (10) эквивалентна системе, состоящей из уравнения (29) и уравнений

$$a_i((L[u_p]+F+G)/x^r, [a,b]) + \tau_{i-p} = 0, \ \ i = p+1, \dots, m, \tag{30}$$

где $a_i(y,[a,b])$ — коэффициент Фурье–Чебышева порядка i функции y на отрезке $[a,b]$, m — параметр (16), u_p — многочлен (29).

Доказательство. Левая часть аппроксимации (14) уравнения (10) является многочленом порядка m (16). Следовательно, этот многочлен принадлежит пространству $H_m[a,b]$. Он тождественен нулю тогда и только тогда, когда тождественны нулю его коэффициенты Фурье–Чебышева порядка $0,\dots,m$. Поэтому уравнение (14) эквивалентно системе уравнений

$$\{a_i((L[u_p \in P_p]+F+G)/x^r + (E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[a,b]), [a,b]) = 0\}_{i=0}^m \tag{31}$$

относительно коэффициентов многочленов $u_p \in P_p$, $E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[a,b]$. Функционал $a_i(P,[a,b])$ — линейный. Он вычисляет проекцию многочлена P на (нормированный) элемент $\mathrm{cheb}(i, z(x))$ ортогонального базиса (18) пространства $L_2(a,b;\rho)$. Поэтому справедливо тождество

$$a_i(c_0 \cdot \mathrm{cheb}(0, z(x)) + \dots + c_i \cdot \mathrm{cheb}(i, z(x)) + \dots, [a,b]) = c_i.$$

Следовательно, справедливы тождества

$$a_i((E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[a,b]), [a,b]) = 0, \ \ i = 0, \dots, p,$$
$$a_i((E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[a,b]), [a,b]) = \tau_{i-p}, \ \ i = p+1, \dots, m.$$

Поэтому первые $p+1$ уравнения системы (31) имеют вид

$$a_i((L[u_p \in P_p]+F+G)/x^r, [a,b]) = 0, \ \ i = 0, \dots, p. \tag{32}$$

Элементами пространства $H_p[a,b]$ являются алгебраические многочлены порядка p и только эти многочлены. Поэтому решение уравнения (29) можно находить среди многочленов порядка p классического вида (13). Следовательно, уравнение (29) эквивалентно уравнению

$$(S_p[(L[u_p]+F+G)/x^r] = 0, (u_p \in P_p)) = (S_p[(L[u_p \in P_p]+F+G)/x^r] = 0).$$

Это уравнение относительно коэффициентов многочлена $u_p \in P_p$. Согласно определению $S_p[(L[u_p]+F+G)/x^r] \in H_p[a,b]$. Следовательно, это уравнение эквивалентно системе уравнений (32).

Решением уравнения (29) является многочлен u_p. Следовательно, решением системы (32) являются коэффициенты многочлена u_p и уравнение $i = p+1, \dots, m$ системы (31) тождественно уравнению i системы (30).

Теорема 1. Алгоритм 2 эквивалентен алгоритму 1.

Доказательство. В лемме 1 доказано, что уравнение (14) эквивалентно системе из уравнения (29) и уравнений (30). Уравнение $i = p+1, \dots, m$ системы (30) определяет коэффициент τ_{i-p} через коэффициенты многочлена u_p. Поэтому уравнения (30) являются тождествами. Следовательно, п. 4 алгоритма 2 эквивалентен п. 4 алгоритма 1. Остальные преобразования алгоритмов 1 и 2 тождественны.

СХОДИМОСТЬ АЛГОРИТМА 1

Согласно теореме 1 алгоритм 1 эквивалентен алгоритму 2. В алгоритме 2 метод Галёркина (29) применяют к решению уравнения (10). Следовательно, для п. 4 алгоритма 1 справедливы результаты исследования метода Галёркина [4, гл. 4]. Оператор S_p уравнения (29) является оптимальным проектором в пространстве $L_2(a, b; \rho)$ и $C_{[a, b]}$ [2, с. 77–95]

$$|| y - S_n[y] ||_{L_2(a, b; \rho)} = \inf_{\{c_0, \ldots, c_n\}} || y(x) - (c_0 + \ldots + c_n x^n) ||_{L_2(a, b; \rho)},$$

$$|| S_n ||_{L_2(a, b; \rho) \to L_2(a, b; \rho)} = 1,$$

$$|| S_n ||_{C_{[a, b]} \to C_{[a, b]}} = (4 / \pi^2) \cdot \ln(n) + O(1), \ O(1) < 3, \ n > 0.$$

На основании этого можно сделать следующее заключение.

Вывод 2. Результаты исследования метода Галёркина [4, гл. 4] задачи Коши для ЛДУМКО (1)–(3) достаточно широкого класса и алгоритма 1 доказывают, что многочлен y_n (21) существует для $n \geq s$ и последовательность многочленов $y_s, y_{s+1}, \ldots$ сходится к точному решению исходной задачи Коши.

АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ АЛГОРИТМА

Теорема 2. Пусть оператор $(1/x^r \cdot L)$ уравнения (10) имеет линейный обратный оператор $(1/x^r \cdot L)^{-1}$ и аппроксимация (14) уравнения (10) имеет единственное решение (20) — многочлен u_p и значения $\tau_1(n), \ldots, \tau_{m-p}(n)$ коэффициентов $\tau_1, \ldots, \tau_{m-p}$.

Тогда имеют место тождества

$$u(x) - u_p(x) = \tau_1(n) \cdot W_{p+1}(x) + \ldots + \tau_{m-p}(n) \cdot W_m(x), \tag{33}$$

$$y(x) - y_n(x) = \tau_1(n) V^k [W_{p+1}(x)] + \ldots + \tau_{m-p}(n) V^k [W_m(x)] \tag{34}$$

и в пространстве $X = C_{[a,b]}, C^k_{[a,b]}, \ldots$ справедливо неравенство

$$|| y(x) - y_n(x) ||_X \leq$$

$$\leq |\tau_1(n)| \, || V^k [W_{p+1}(x)] ||_X + \ldots + |\tau_{m-p}(n)| \, || V^k [W_m(x)] ||_X, \tag{35}$$

где

$$W_i(x) = (1/x^r \cdot L)^{-1} [\mathrm{cheb}(i, z(x))]. \tag{36}$$

Доказательство. По условию теоремы многочлены u_p (20) и

$$\tau_1(n) \cdot \mathrm{cheb}(p+1, z(x)) + \ldots + \tau_{m-p}(n) \cdot \mathrm{cheb}(m, z(x)) = E_{m,p} \tag{37}$$

являются решением аппроксимации (14) уравнения (10).

Следовательно, многочлен u_p (20) является решением уравнения

$$(L[u_p \in P_p] + F + G) / x^r + \tau_1(n) \cdot \mathrm{cheb}(p+1, z(x)) + \ldots + \tau_{m-p}(n) \cdot \mathrm{cheb}(m, z(x)) = 0$$

с известными коэффициентами (числами) $\tau_1(n), \ldots, \tau_{m-p}(n)$. Оператор $L[u] = D[V^k[u]]$ (8) этого уравнения — линейный. Следовательно, разность этого уравнения и уравнения (10) представляет уравнение

$$L[u - u_p] / x^r = \tau_1(n) \cdot \mathrm{cheb}(p+1, z(x)) + \ldots + \tau_{m-p}(n) \cdot \mathrm{cheb}(m, z(x))$$

относительно $u - u_p$. Оператор $(1/x^r \cdot L)^{-1}$ вычисляет решение (33) этого уравнения. Тождество (34) следует из тождеств (33), (9) и (21), а неравенство (35) — из тождества (34).

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2 и в пространстве X существует конечный предел последовательности

$$\lim_{i\to\infty} \| V^k [(1/x^r L)^{-1} [\mathrm{cheb}(i, z(x))]] \|_X \overset{\mathrm{df}}{=} W < \infty . \tag{38}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\lim_{n\to\infty} \| y - y_n \|_X / (|\tau_1(n)| + \ldots + |\tau_{m-p}(n)|) \le W < \infty . \tag{39}$$

Доказательство. Неравенство (39) следует из (35) и (38).

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 2 и уравнение (10) является корректной задачей в пространстве $X = C_{[a,b]}$, т.е. имеет место неравенство

$$\| V^k [(1/x^r L)^{-1}] \|_{X\to X} = \sup_{y\in C[a,b]} \| V^k [(1/x^r L)^{-1} [y]] \|_X / \| y \|_X < \infty .$$

Тогда коэффициенты неравенств (35) и (39) в пространстве X ограничены

$$\| V^k [W_i(x)] \|_X \le \| V^k [(1/x^r L)^{-1}] \|_{X\to X} ,$$

$$W \le \| V^k [(1/x^r L)^{-1}] \|_{X\to X} .$$

Доказательство. Согласно свойству нормы оператора в пространстве $X = C_{[a,b]}$ справедливо неравенство

$$\| V^k [(1/x^r \cdot L)^{-1} [\mathrm{cheb}(i, z(x))]] \|_X \le \| V^k [(1/x^r \cdot L)^{-1}] \|_{X\to X} \| \mathrm{cheb}(i, z(x)) \|_X .$$

Согласно определению многочленов Чебышева справедливы тождества

$$\| \mathrm{cheb}(i, z(x)) \|_{C[a,b]} = \| \mathrm{cheb}(i, x) \|_{C[-1,1]} = \| \cos(ix) \|_{C[0,\pi]} = 1 .$$

Поэтому имеет место первое из неравенств, доказываемых в следствии 2. Из этого неравенства следует второе доказываемое неравенство.

Рассмотрим наиболее важный для практики случай.

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и только один из коэффициентов $\tau_1(n), \ldots, \tau_{m-p}(n)$ (20) отличен от нуля — $\tau_i(n) \ne 0$.

Тогда справедливы тождества

$$u(x) - u_p(x) = \tau_i(n) W_i(x), \tag{40}$$

$$y(x) - y_n(x) = \tau_i(n) V^k [W_i(x)], \tag{41}$$

$$\| y(x) - y_n(x) \|_X = |\tau_i(n)| \| V^k [W_i(x)] \|_X . \tag{42}$$

Доказательство. В рассматриваемом случае тождество (33) принимает вид (40) и тождество (34) — вид (41). Тождество (42) следует из тождества (41) согласно свойству нормы

$$\| \tau_i(n) V^k [W_i(x)] \|_X = |\tau_i(n)| \| V^k [W_i(x)] \|_X .$$

Пример 1 (иллюстрация эффективности теоремы 2). Результатом решения задачи Коши для уравнения Бесселя (22), (23) на отрезке $[-4, 4]$ по алгоритму 1 с параметром $n = 2, \ldots, 22$ являются многочлен y_n (5) и один отличный от нуля коэффициент дополнительного многочлена $\tau = \tau(n)$. Этот коэффициент принимает следующие значения:

$$\{\tau(2i) = \tau(2i+1),\ i = 1, \ldots, 15\} = \{0.67, -0.2, 0.028, -0.0021,$$
$$9.2\cdot 10^{-5}, -2.8\cdot 10^{-6}, 5.9\cdot 10^{-8}, -9.6\cdot 10^{-10}, 1.2\cdot 10^{-11}, -1.24\cdot 10^{-13},$$
$$1.05\cdot 10^{-15}, -7.4\cdot 10^{-18}, 4.4\cdot 10^{-20}, -2.3\cdot 10^{-22}, 10^{-24}\}. \tag{43}$$

С возрастанием параметра n алгоритма 1 этот коэффициент регулярно убывает:

$$|\tau(2i)| = |\tau(2i+1)| = o(q^i), \ q \approx 0.01.$$

Функция $W_i(x) = (1/x^r \cdot L)^{-1}[\mathrm{cheb}(i, z(x))]$ является решением уравнения

$$L[u] = x^r \cdot \mathrm{cheb}(i, z(x)), \ z(x) = 2(x-a)/(b-a) - 1. \tag{44}$$

Первообразная $V^k[(1/x^r \cdot L)^{-1}[\mathrm{cheb}(i, z(x))]]$ этой функции является решением задачи Коши

$$D[y] = x^r \cdot \mathrm{cheb}(i, z(x)), \ \ y(0) = 0, \ldots, \ y^{(k-1)} = 0. \tag{45}$$

В случае решения задачи Коши для уравнения Бесселя (22), (23) на отрезке $[-4, 4]$ алгоритм 1 имеет параметр $r = 1$ и функция $V^2[W_i(x)]$ является решением системы уравнений

$$xy'' + y' + xy = x \cdot \mathrm{cheb}(i, x/4), \ \ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0.$$

Норма этой функции в пространствах $C_{[-4, 4]}$ и $X = C^2_{[-4, 4]}$ принимает следующие значения:

$$\{||V^2[W_{2i}(x)]||_{C_{[-4,4]}}\}_{i=1}^{10} = \{0.8, 1, 0.7, 0.5, 0.3, 0.24, 0.2, 0.14, 0.11, 0.09\},$$

$$||V^2[W_{2i}(x)]||_X = ||V^2[W_{2i+1}(x)]||_X = 1 + \beta_{2i}, \tag{46}$$

$$\{\beta_{2i}\}_{i=1}^{10} = \{-0.12, 1.1, 0.65, 0.43, 0.3, 0.22, 0.17, 0.13, 0.11, 0.085\}.$$

Из тождеств (43) и (46) следует, что оценка (42) погрешности решения задачи Коши для ЛДУМКО (22), (23) по алгоритму 1 (произведение коэффициентов (43) и (46)) тождественна норме погрешности (26) решения задачи Коши для ЛДУМКО (22), (23) по алгоритму 1 в пространстве $C_{[-4, 4]}$, т.е. имеют место тождества

$$||V^2[W_{2i}(x)]||_{C[-4,4]}\,\tau(2i) = ||J_0 - y_{2i}||_{C_{[-4,4]}}, \ \ i = 1, \ldots, 9.$$

Из этих тождеств можно сделать следующее заключение.

Вывод 3. Оценки теоремы 2 и следствий к этой теореме конструктивны. Для задачи Коши для уравнения Бесселя эти оценки точны.

Замечание 1. Функция (36) является решением уравнения второго рода

$$W_i(x) = \mathrm{solve}\,(y - M[y] = u_i), \ \text{где} \ M[y] = y - (1/A)L[y],$$

$$u_i = (x^r / A(x))\mathrm{cheb}(i, z(x)), \ \ z(x) = 2(x-a)/(b-a) - 1.$$

Если

$$u_i + M[u_i] + M^2[u_i] + M^3[u_i] + \ldots < \infty,$$

то

$$W_i(x) = u_i + M[u_i] + M^2[u_i] + M^3[u_i] + \ldots$$

Исходя из этого, а также согласно известному тождеству [2, с. 42]

$$2 \cdot \int \mathrm{cheb}(n, x)\,dx = 1/(n+1) \cdot \mathrm{cheb}(n+1, x) - 1/(n-1) \cdot \mathrm{cheb}(n-1, x) \ \ (n > 1)$$

для задачи Коши для ЛДУМКО (1)–(3) часто имеют место тождества

$$M[u_i] = O(1/i), \ \ldots, M^n[u_i] = O(1/i^n),$$

$$W_i(x) = u_i + o(1) = (x^r / A(x))\mathrm{cheb}(i, z(x)) + o(1).$$

ОПТИМАЛЬНОСТЬ АЛГОРИТМА 1 ПО ТОЧНОСТИ

Наилучшее приближение функции Бесселя в пространстве C^2. Отличные от нуля коэффициенты Фурье–Чебышева функции J_0'' на отрезке $[-4, 4]$ — только четные

$$\{a_{2i}(J_0'', [-4, 4]),\ i = 1, \ldots, 10\} = \{0.41, -0.2, 0.028, -0.0021,$$

$$9\cdot 10^{-5}, -2.7\cdot 10^{-6}, 5.7\cdot 10^{-8}, -9.3\cdot 10^{-10}, 1.2\cdot 10^{-11}, -1.2\cdot 10^{-13}\}. \qquad (47)$$

Если параметр i возрастает, то эти коэффициенты регулярно убывают

$$|a_{2i}(J_0'', [-4, 4])| = o(q^i),\ q \approx 0.01.$$

На отрезке $[-4, 4]$ функция $J_0'(x)$ имеет отличные от нуля только нечетные коэффициенты Фурье–Чебышева, и для этих коэффициентов справедливы неравенства

$$|a_{2i+2}(J_0, [-4, 4])| \le |a_{2i+1}(J_0',\ [-4, 4])| \le |a_{2i}(J_0'', [-4, 4])|.$$

Следовательно, в пространстве $X = C^2_{[-4, 4]}$ справедливо тождество

$$\inf_{\{c_0, \ldots, c_n\}} \| J_0(x) - (c_0 + \ldots + c_n \cdot x^n) \|_X = (1 + o(1)) | a_{2i}(J_0'', [-4, 4])|. \qquad (48)$$

Вычислительный эксперимент с алгоритмом 1 в пространстве C^2. Норма погрешности решения задачи Коши для уравнения Бесселя (22), (23) по алгоритму 1 в пространстве $X = C^2_{[-4, 4]}$ регулярно убывает (с ростом параметра n алгоритма 1) и принимает следующие значения:

$$\{ \| J_0 - y_{2i} \|_X = \| J_0 - y_{2i+1} \|_X \}_{i=1}^{10} = \{0.59, 0.42, 0.046, 0.003, 0.00012,$$

$$3.4\cdot 10^{-6}, 6.9\cdot 10^{-8}, 1.1\cdot 10^{-9}, 1.3\cdot 10^{-11}, 1.4\cdot 10^{-13}\}. \qquad (49)$$

Скорость убывания погрешности (49) тождественна скорости убывания четных коэффициентов Фурье–Чебышева (24) функции J_0'' на отрезке $[-4, 4]$, т.е. имеют место тождества

$$\| J_0 - y_n \|_X / |a_{2[n/2]}(J_0'', [-4, 4])| = (1 + \alpha_{2[n/2]}), \qquad (50)$$

где $\{\alpha_{2i}, i = 1, \ldots, 10\} = \{0.4, 1.1, 0.6, 0.4, 0.3, 0.26, 0.21, 0.17, 0.14, 0.12\}$.

Согласно определению (6) наименьшее значение коэффициента оптимальности метода решения задачи Коши равно единице. Поэтому из тождеств (47)–(50) можно сделать следующее заключение.

Вывод 4. Решение по алгоритму 1 задачи Коши для уравнения Бесселя (22), (23) на отрезке $[-4, 4]$ с параметром n асимптотически наилучшее по точности аппроксимации функции Бесселя J_0 в пространстве $C^2_{[-4, 4]}$ среди алгебраических многочленов порядка n

$$C_n(\text{algorithm}_1, x \cdot y'' + y' + x \cdot y = 0,\ y(0) = 1,\ C^2_{[-4, 4]}) = (1 + o(1))(1 + \alpha_{2[n/2]}).$$

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ОПТИМАЛЬНОСТИ

Теорема 3. Пусть для задачи Коши для ЛДУМКО (1)–(3) (task) выполнены условия теоремы 2 и обратима матрица

$$\{Q_n\} = \{a_i(W_j(x), [a, b]),\ i, j = p+1, \ldots, m\}, \qquad (51)$$

где $p=n-k$, $m=\deg((L[u_p\in P_p]+F+G)/x^r)$, функции $W_j(x)$ определены тождеством (36), $a_i(u,[a,b])$ — коэффициент Фурье–Чебышева порядка i функции u на отрезке $[a,b]$.

Тогда имеют место тождества

$$\{\tau_1(n),\ldots,\tau_{m-p}(n)\}^{\mathrm{T}}=\{Q_n\}^{-1}\{a_{p+1}(u,[a,b]),\ldots,a_m(u,[a,b])\}^{\mathrm{T}}, \tag{52}$$

$$u-u_p=\{Q_n\}^{-1}\{a_{p+1}(u,[a,b]),\ldots,a_m(u,[a,b])\}^{\mathrm{T}}\cdot\{W_{p+1}(x),\ldots,W_m(x)\}, \tag{53}$$

где $u=y^{(k)}$, $u_p=y_n^{(k)}$, $p=n-k$, и в пространстве $X=C^k_{[a,b]}$ справедливы неравенства

$$\|y-y_n\|_X\le\max_{\{i=p+1,\ldots,m\}}\|V^k[W_i(x)]\|_X\cdot V_n\cdot\|u-S_p[u]\|_{L_2(a,b;\rho)}, \tag{54}$$

$$C_n(\mathrm{algorithm}_1,\mathrm{task},C^k_{[a,b]})\le U_n\cdot V_n\max_{\{i=p+1,\ldots,m\}}\|V^k[W_i(x)]\|_X, \tag{55}$$

где коэффициенты правой части имеют следующие значения:

$$V_n=\max_{\{|C_1|+\ldots+|C_{m-p}|=1\}}\|\{Q_n\}^{-1}\{C_1,\ldots,C_{m-p}\}^{\mathrm{T}}\|_{l_2}, \tag{56}$$

$$U_n=\|u-S_p[u]\|_{L_2(a,b;\rho)}/\inf_{\{c_0,\ldots,c_n\}}\|y(x)-(c_0+\ldots+c_nx^n)\|_X. \tag{57}$$

Доказательство. Согласно теореме 2 имеет место тождество (33). Функционал $a_i(u,[a,b])$ — линейный. Поэтому тождество (33) эквивалентно системе тождеств

$$a_i(u,[a,b])-a_i(u_p,[a,b])=$$
$$=a_i(W_{p+1}(x),[a,b])\tau_1(n)+\ldots+a_i(W_m(x),[a,b])\tau_{m-p}(n),\ i=0,1,\ldots$$

Для коэффициента Фурье–Чебышева порядка i многочлена u_p справедливо тождество $a_i(u_p,[a,b])$ при $i>p$. Поэтому тождества этой системы с номером $i=p+1,\ldots,m$ образуют подсистему

$$\{a_{p+1}(u,[a,b]),\ldots,a_m(u,[a,b])\}^{\mathrm{T}}=\{Q_n\}\{\tau_1(n),\ldots,\tau_{m-p}(n)\}^{\mathrm{T}}.$$

Матрица $\{Q_n\}$ этой подсистемы обратима по условию теоремы. Поэтому тождество (52) является решением этой подсистемы. Тождество (53) является подстановкой (52) в тождество (33).

Из (52) непосредственно следует неравенство

$$(|\tau_1(n)|+\ldots+|\tau_{m-p}(n)|)^2\le V_n^2(a_{p+1}(u,[a,b])^2+\ldots+a_m(u,[a,b])^2).$$

Сумма в правой части этого неравенства не убывает с ростом числа слагаемых

$$a_{p+1}(u,[a,b])^2+\ldots+a_m(u,[a,b])^2\le a_{p+1}(u,[a,b])^2+\ldots+a_m(u,[a,b])^2+\ldots$$

Для правой части этого неравенства согласно определению ряда Фурье–Чебышева функции u на отрезке $[a,b]$ справедливо тождество

$$a_{p+1}(u,[a,b])^2+\ldots+a_m(u,[a,b])^2+\ldots=\|u-S_p[u]\|^2_{L_2(a,b;\rho)}.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$|\tau_1(n)|+\ldots+|\tau_{m-p}(n)|\le V_n\|u-S_p[u]\|_{L_2(a,b;\rho)}.$$

Из этого неравенства и неравенства (35) непосредственно следуют неравенство

$$\| y - y_n \|_X \le \max_{\{i=p+1,\ldots,m\}} \| V^k [W_i(x)] \|_X \, (|\tau_1(n)| + \ldots + |\tau_{m-p}(n)|)$$

и неравенство (54).

Неравенство (55) следует из неравенства (54) и тождеств (56), (57).

Следствие 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и последовательности $\{\| V^k [W_i(x)] \|_X\}_{i=0}^{\infty}$, $\{V_i\}_{i=k}^{\infty}$, $\{U_i\}_{i=k}^{\infty}$ сходятся в пространстве $X = C_{[a,b]}^k$, т.е. для коэффициентов (36), (56), (57) имеют место соотношения (38), а также

$$\lim_{n\to\infty} V_n = V < \infty, \tag{58}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = U < \infty. \tag{59}$$

Тогда коэффициент оптимальности (6) решения задачи Коши для ЛДУМКО (1)–(3) по алгоритму 1 в пространстве $X = C_{[a,b]}^k$ ограничен и

$$\lim_{n\to\infty} C_n(\text{algorithm}_1, (1), (2)\, C_{[a,b]}^k) = U \cdot V \cdot W < \infty. \tag{60}$$

Доказательство. Неравенство (60) непосредственно следует из неравенств (55), (38), (58), (59).

Рассмотрим наиболее важный для практики случай.

Теорема 4. Пусть:

— выполнены условия теоремы 2;

— только один из коэффициентов $\{\tau_1(n), \ldots, \tau_{m-p}(n)\}$ (20) отличен от нуля;

— $\tau_i(n) \ne 0$;

— производная порядка k решения системы уравнений (1), (2) $u = y^{(k)}$ имеет коэффициент Фурье–Чебышева

$$a_{p+i}(u, [a,b]) \ne 0.$$

Тогда в пространстве $X = C_{[a,b]}$ справедливы тождества

$$(u(x) - u_p(x)) / a_{p+i}(u, [a,b]) = W_{p+i}(x) / a_{p+i}(W_{p+i}(x), [a,b]), \tag{61}$$

$$\| (u(x) - u_p(x)) \|_X / | a_{p+i}(u, [a,b]) | = \| W_{p+i}(x) \|_X / | a_{p+i}(W_{p+i}(x), [a,b]) |. \tag{62}$$

Доказательство. Если выполнены условия следствия 3, то имеет место тождество (40). Коэффициент Фурье–Чебышева порядка $p+i$ тождества (40) имеет вид

$$a_{p+i}(u, [a,b]) = a_{p+i}(W_{p+i}(x)\tau_i(n)).$$

Если $\tau_i(n) \ne 0$ и $a_{p+i}(u, [a,b]) \ne 0$, то $a_{p+i}(W_{p+i}(x), [a,b]) \ne 0$ и справедливо тождество $\tau_i(n) = a_{p+i}(u, [a,b]) / a_{p+i}(W_{p+i}(x)\tau_i(n))$. Тождество (61) является результатом подстановки этого тождества в (40). Тождество (62) непосредственно следует из тождества (61) и свойств нормы.

Замечание 2. Для целой функции y в пространстве $X = C_{[a,b]}^k$ часто справедливо тождество

$$\inf_{\{c_0,\ldots,c_n\}} \| y(x) - (c_0 + \ldots + c_n x^n) \|_X =$$

$$= \inf_{\{c_0,\ldots,c_n\}} \| (y(x) - (c_0 + \ldots + c_n x^n))^{(k)} \|_{C[a,b]} = (1 + o(1)) \, | a_{i+n-k}(y^{(k)}, [a,b]) |.$$

Следовательно, если задача Коши для ЛДУМКО (1)–(3) удовлетворяет условиям теоремы 4 и решение этой задачи является целой функцией с указанными выше свойствами, то справедливо тождество

$$(1+o(1))C_n(\text{algorithm}_1, D[y]+G=0, \text{init\_cond}(y,0), C^k_{[a,b]}) =$$

$$= \| (u(x)-u_p(x)) \|_X / | a_{p+i}(u,[a,b]) | = \| W_{p+i}(x) \|_X / | a_{p+i}(W_{p+i}(x),[a,b]) |,$$

т.е. правая часть тождества (62) является эффективной оценкой коэффициента оптимальности (6) алгоритма 1 на этой задаче в пространстве $C^k_{[a,b]}$.

Пример 2 (иллюстрация эффективности теоремы 4). Коэффициент правой части тождества (62) для задачи Коши для уравнения Бесселя (22), (23) принимает следующие значения:

$$1/a_{2i}(W_{2i}(x),[-4,4]) = 1-\delta_{2i},$$
$$\{\delta_{2i}\}_{i=1}^{11} = \{0.62, 0.0058, -0.016, 0.0076, 0.022, 0.028, 0.03, 0.03, 0.03, 0.029, 0.028\}. \quad (63)$$

Произведение этого коэффициента и коэффициента $\| W_{2i}(x) \|_{C[-4,4]}$ из (46) тождественно главной части коэффициента оптимальности (6) решения по алгоритму 1 задачи (22), (23) в пространстве $C^2_{[-4,4]}$ (50)

$$\| W_{2i}(x) \|_{C_{[-4,4]}} 1/a_{2i}(W_{2i}(x),[-4,4]) = 1+\alpha_{2i}, \ i=1,\ldots,11.$$

Из этих тождеств можно сделать следующее заключение.

Вывод 5. Правая часть тождества (62) является конструктивной оценкой коэффициента оптимальности (6) решения по алгоритму 1 задачи Коши для ЛДУМКО (1)–(3) в пространстве $C^k_{[a,b]}$, и эта оценка является асимптотически точной.

Замечание 3. Для примера 1 (в соответствии с замечанием 1) имеют место тождества

$$W_n(x) = \text{cheb}(n, x/4) + o(1), \ a_n(W_n(x),[-4,4]) = 1+o(1).$$

Если на отрезке $[a,b]$ многочлен A уравнения (1) не имеет нулей (отличных от точки нуль), то, как правило, главная часть матрицы Q_n (51) является диагональной матрицей и имеет элементы главной диагонали

$$a_i(x^r / A(x)\text{cheb}(i-r+t, z(x)),[a,b]), \ t = \text{deg\_nul}(A).$$

Матрица, обратная этой диагональной матрице, является диагональной и имеет элементы главной диагонали $1/a_i(x^r / A(x)\text{cheb}(i-r+t, z(x)),[a,b])$.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ

СКА не выполняют преобразования п. 2 алгоритма 1. Поэтому построим алгоритм, имеющий только алгебраические преобразования, и докажем его эквивалентность алгоритму 1.

Алгоритм 3.

Вход. $D[y]+G=0$ (1), y_{k-1} (7), $[a,b]$, n.

Выход. Многочлен y_n (5).

Преобразования.

1. Вычислить оператор $D[y]+G$ уравнения (1).
2. Вычислить порядок k оператора $D[y]+G$.
3. Вычислить порядок $p=n-k$ многочлена u_p (20).
4. Вычислить многочлен $u_p \in P_p$ (13).
5. Вычислить многочлен

$$V^k[u_p \in P_p] + y_{k-1}. \quad (64)$$

6. Преобразовать многочлен (64) оператором $D[y]+G$ в многочлен (12).
7. Вычислить число r (11).
8. Вычислить многочлен (17).
9. Вычислить порядок m (16) многочлена (17) — параметр уравнения (14).
10. Вычислить дополнительный многочлен (15) с параметрами m (16) и $p = n-k$ на отрезке $[-1, 1]$.

$$(E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[-1,1]) = \tau_1 \text{cheb}(p+1, x) + \ldots + \tau_{m-p} \text{cheb}(m, x).$$

Этот многочлен имеет символьные коэффициенты, т.е. $\tau_1, \ldots, \tau_{m-p} \in \text{Atom}$.

11. Вычислить многочлен $z(x)$ (19).
12. Вычислить дополнительный многочлен (15)

$$(E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[a, b]) = \text{subs}(x = z(x), \quad (E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[-1,1])).$$

13. Вычислить аппроксимацию по a-методу левой части уравнения (10)

$$(D[V^k[u_p \in P_p] + y_{k-1}] + G) / x^r + (E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[a, b]). \tag{65}$$

14. Вычислить систему уравнений

$$S = \{t_i (D[V^k[u_p \in P_p] + y_{k-1}] + G) / x^r + (E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[a, b])\}_{i=0}^{m}, \tag{66}$$

где $t_i(P)$ — коэффициент монома порядка i полинома P.

15. Решить систему уравнений S (66) и вычислить значения

$$\{c_0(n), \ldots, c_p(n), \ \tau_1(n), \ldots, \tau_{m-p}(n)\} = Coef = \text{solve}(S) \tag{67}$$

коэффициентов $c_0, \ldots, c_p$ многочлена $u_p \in P_p$ и коэффициентов $\tau_1, \ldots, \tau_{m-p}$ многочлена $(E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[a, b])$.

16. Преобразовать коэффициенты $c_0(n), \ldots, c_p(n)$ (67) в многочлен

$$u_p = \text{ser}(Coef) = c_0(n) + \ldots + c_p(n) x^p. \tag{68}$$

17. Вычислить первообразную порядка k многочлена u_p (68)

$$y_n = \text{algorithm}_3 (D[y] + G = 0, \text{init\_cond}(y, 0), [a, b], n) = V^k[u_p] + y_{k-1},$$

т.е. искомую аппроксимацию решения y (4) задачи Коши для ЛДУМКО (1)–(3).

Лемма 2. Уравнения (66) являются линейными и алгебраическими.

Доказательство. Функционал t_i — линейный. Поэтому левая часть уравнения i системы (66) имеет вид

$$t_i (D[V^k[u_p \in P_p]] / x^r) + t_i ((D[y_{k-1}] + G) / x^r) + t_i (E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[a, b])$$

и справедливо тождество

$$t_i (E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[a, b]) = t_i (\text{cheb}(p+1, z(x))) \tau_1 + \ldots + t_i (\text{cheb}(m, z(x))) \tau_{m-p}.$$

Оператор $D[y]$ — линейный. Поэтому первое слагаемое уравнения i системы (66) имеет вид

$$t_i (D[V^k[u_p \in P_p]] / x^r) = t_i (D[V^k[1]] / x^r) c_0 + \ldots + t_i (D[V^k[x^p]] / x^r) c_p.$$

Следовательно, уравнения системы (66) являются алгебраическими и линейными относительно коэффициентов $c_0(n), \ldots, c_p(n), \tau_1(n), \ldots, \tau_{m-p}(n)$.

Теорема 5. Алгоритм 3 эквивалентен алгоритму 1.

Доказательство. Левая часть уравнения (14) является многочленом (65) порядка m (16). Следовательно, уравнение (14) эквивалентно системе уравнений (66) и решение u_p (20) уравнения (14) тождественно преобразованию (68) решения (67) системы уравнений (66).

Преобразование 5 алгоритма 1 тождественно преобразованию п. 17 алгоритма 3.

ПРОГРАММИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА 3 В СИСТЕМЕ APS [6]

Структура данных на входе.

1. ЛДУМК (1) имеет вид

$$\mathtt{A*dif(y,k)+\ldots+C*y+G=0},$$

где коэффициенты `A,…,C,G` являются многочленами переменных `x` и `y`. Они являются атомами системы APS [6].

2. Многочлен y_{k-1} имеет вид `d + … + f*x^(k- 1)`.
3. Отрезок аппроксимации $[a, b]$ определяет список `(a,b)`.
4. Параметр n алгоритма является целым числом.

Структура данных на выходе. Многочлен y_n (21) имеет числовые коэффициенты и естественный вид `d + … + f*x^n`.

APLAN-процедура. Алгебраическая спецификация алгоритма 3:

```
let( LDUMK , Dy = 0 );                   /*  D[y] + G  */
 k := ord_equ( Dy );                 /*  порядок  D[y]  */
 p := n - k;                  /*  \deg( u_p \in P_p )  */
 u_p := main_pol(p);                   /*  u_p \in P_p  */
 y_n := T + n_int( u_p , k ); /*  T + V^k[u_p \in Pp]  */
 Dn := canplf(sub_du(Dy , y_n));        /*  D[y_n] + G  */
 r := deg_nul(canplf(ein_pol(Dn))); /* nul(D[y_n] + G) */
 Dn --> ndiv_x( Dn , r );          /*  (D[y_n]+G)/x^r  */
 m := deg(canplf(ein_pol(Dn)));/* deg((D[y_n]+G)/x^r)  */
 Em := Enl(p, m-p);                        /*  E_{m,p}  */
 z --> canplf( -1 + (2/(arg(interval,2) + (-1)*
    arg(interval,1)) * (x + (-1) * arg(interval,1)) );
 Em --> canplf( subs( x = z, Em ));     /*  E_m(z(x))  */
 Dn --> canplf(Dn + Em); /* (D[y_n]+G)/x^r + E_m(z(x)) */
 S := pol_equ(Dn , m);         /*  СЛАУ - аппр. задачи  */
 Xn := c;    Coef := solve(S);       /*  решение СЛАУ  */
 u_p := ser(p , Coef);     /* аппроксимация  dif(y,k)  */
 y_n := T + n_int( u_p , k );    /*  аппроксимация  y  */
```

Структура выхода операторов APLAN-процедуры. Оператор `main_pol(p)` вычисляет многочлен $u_p \in P_p$ в виде

$$\mathtt{c(0)+c(1)+\ldots+c(p)*x\ \hat{}\ p},$$

где `x` и коэффициенты `c(0),…,c(p)` являются атомами.

Оператор `n_int` преобразует этот многочлен в многочлен $V^k(u_p \in P_p)$, `sub_du(Dy,y_n)` является многочленом $D[V^k(u_p \in P_p)+y_{k-1}]+G$.

Оператор `canplf` преобразует этот многочлен в сумму мономов

$$\mathtt{c(i)*x\ \hat{}\ j\ \$b} \Leftrightarrow bc_i x^j, \tag{69}$$

где `$` — операция умножения терма на число. Параметры принимают значения $i=0,\ldots, p,\ j=0,\ldots, m+r$.

Оператор `Enl` вычисляет многочлен $E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[-1,1]$ вида

$$\texttt{c(p+1)*cheb(p+1,x)+...+c(m)*cheb(m,x)},$$

где коэффициенты `c(p+1),...,c(m)` являются атомами. Многочлены `cheb(i,x)` вычисляет солвер *gr_solve.exe* системы APS. Многочлен $E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[-1,1]$ и его преобразование $E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[a,b]$ имеют порядок m.

Оператор `canplf` преобразует многочлен $E_{m,p} \in H_{m\backslash p}[a,b]$ в сумму мономов (69), где $i = p+1,\ldots,m,\ j = 0,\ldots,m$.

Оператор `pol_equ` преобразует многочлен (65) в уравнения (66) вида

$$\texttt{c(m)\$f+...+c(0)\$e+d=0}.$$

Оператор `solve` вычисляет решение (67) системы уравнений (66) в виде тождеств

$$\texttt{c(0)=h,..., c(p)=r, ..., c(m)=q}.$$

Оператор `ser` преобразует эти тождества в многочлен u_p (68) естественного вида.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ APLAN-ПРОЦЕДУРЫ

Теорема 6. Пусть коэффициенты многочленов и другие константы операндов входа APLAN-процедуры являются целыми или рациональными числами.

Тогда эта процедура вычисляет многочлен y_n (21) без погрешности.

Доказательство. APLAN-процедура имеет известные операторы [5]. Эти операторы в системе APS выполняют арифметические операции с целыми и рациональными числами в арифметике рациональных чисел. Длина числителя и знаменателя рациональных чисел в APS не ограничена. Следовательно, если коэффициенты многочленов, уравнений и значения параметров процедуры являются целыми или рациональными числами, то операторы процедуры выполняют вычисления точно.

Теорема 7. Сложность APLAN-процедуры определяет тождество

$$Q(\text{algorithm}_3(D[y]+G=0, \text{init\_cond}(y,\ 0),[a,b],n)) =$$
$$= O(n^3) + O(n)Q(\text{canplf}, O(n)),$$

где $Q(\text{canplf}, m)$ — сложность преобразования оператором canplf многочлена P: многочлен $\text{canplf}(P)$ представляет сумму мономов вида (69), где $i, j = 0,\ldots,m$.

Доказательство. Рассмотренная процедура является линейной. Следовательно, вычислительная сложность процедуры тождественна сумме вычислительной сложности ее операторов. Операторы процедуры, за исключением оператора canplf, имеют по параметру n полиномиальную сложность:

$$Q(\text{main\_pol}(p), n) = O(n),$$

$$Q(\text{n\_int}(u_p, k), n) = O(n),$$

$$Q(\text{sub\_du}(Dy,\ y_n), n) = O(n^2),$$

$$Q(\text{ein\_pol}(Dn), n) = O(n^2),$$

$$Q(\text{Enl}(p, m-p), n) = O(n^2),$$

$$Q(\text{subs}(x = z, E_m), n) = O(n^2),$$

$$Q(\text{pol\_equ}(Dn, m), n) = O(n)Q(\text{canplf}, O(n)) + O(n^3),$$

$$Q(\text{solve}(S), n) = O(n^3),$$

$$Q(\text{ser}(p, \text{Coef}), n) = O(n).$$

Сложность вычислений по остальным операторам не зависит от параметра n. Следовательно, сумма вычислительной сложности операторов процедуры тождественна доказываемой оценке. Оператор canplf в процедуре преобразует многочлены в сумму мономов вида (69).

Описание задачи Коши (22), (23) на языке APLAN:

```
process[1] := (
    LDUMK := ( x * dif(y , 2) + dif(y , 1) + x * y = 0 );
        T := 1;         interval := (-1 , 1) ;      ...);
```

В результате решения процедурой этой задачи для $n = 2$ получаем

$$\texttt{y\_n=1+x ^ 2 \$ rat(-2,9)} \Leftrightarrow y_n = 1-(2/9)x^2.$$

Построенная выше APLAN-процедура доказывает возможность реализации алгоритма 1 в других СКА. Результаты исследования этой процедуры доказывают эффективность такой реализации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье построен алгебраический алгоритм для решения задачи Коши для ЛДУМКО (1)–(3) на отрезке $[a, b]$. По этому алгоритму в системах компьютерной алгебры вычисляют алгебраический многочлен y_n (5) порядка $n \in N$. Этот многочлен аппроксимирует совместно решение $y = y(x)$, $x \in [a, b]$ и его производные $y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$ оптимально.

Этот алгоритм в случае задачи Коши для ЛДУМКО (1)–(3) решает задачу Дзядыка: на основании a-метода построить эффективные численные методы решения функциональных уравнений.

РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМОВ

Алгоритм 1'. Модификация алгоритма 1. Дополнительный многочлен уравнения (14) имеет ортогональный базис пространства Гильберта $H_{[a, b]}$.

Для алгоритма 1' имеют место аналоги теорем 1–4, где пространство $L_2(a, b; \rho)$ заменено пространством $H_{[a, b]}$.

Алгоритм 3'. Модификация алгоритма 3. Этот алгоритм эквивалентен алгоритму 1'. Дополнительный многочлен уравнений (66) имеет ортогональный базис пространства Гильберта $H_{[a, b]}$.

Модификация APLAN-процедуры для реализации алгоритма 3'. Оператор вычисления многочлена Чебышева заменен оператором вычисления многочлена базиса пространства $H_{[-1,1]}$.

Для оценки погрешности алгоритма 1 в пространстве E_G, где G — область комплексной плоскости, справедливы тождества теорем 2–4.

Для оценки погрешности алгоритма 1' в пространстве E_G справедливы аналоги теорем 2–4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. — М.: Физматгиз, 1957. — 584 с.
2. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. — М.: Наука, 1983. — 384 с.
3. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1988. — 304 с.
4. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 456 с.
5. Денисенко П.Н. Алгебраическое программирование. Учебное пособие / Под ред. А.А. Летичевского. — Кировоград: КННПК, 2002. — 120 с.

Поступила после доработки 07.06.2010