А.Н. ВОРОНИН

УДК 519.9

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСОВ

Ключевые слова: *распределение ресурсов, многокритериальная оптимизация, ограничения ресурсов, нелинейная схема компромиссов.*

СОДЕРЖАНИЕ ПРОБЛЕМЫ

В различных сферах управления актуальной является задача распределения ресурсов между отдельными направлениями (объектами), когда обеспечивается наиболее эффективное функционирование объектов при определенных обстоятельствах. Часто эта задача решается субъективно, на основе опыта и профессиональной квалификации лица, принимающего решение (ЛПР). В несложных ситуациях такой подход может оказаться оправданным. Однако при большом количестве направлений (объектов) и в особых случаях резко возрастает цена ошибки управленческого решения. Возникает необходимость разработки формализованных методов поддержки принятия решений для грамотного распределения ресурсов между объектами с учетом всех заданных обстоятельств.

Одним из таких обстоятельств является ограниченность ресурсов. Наиболее распространен случай ограниченности сверху суммарного (глобального) ресурса, подлежащего распределению между отдельными объектами. В работе [1] рассматривается, в частности, задача перераспределения средств при уменьшении ранее запланированного объема финансирования проектов.

В практических случаях ограничения накладываются не только на глобальный ресурс, но и на парциальные ресурсы, выделяемые отдельным объектам. При этом ограничения могут накладываться как снизу, так и сверху. Наиболее интересным представляется случай ограниченности парциальных ресурсов снизу. Этот вид ограничений имеет место во многих предметных областях. Так, медики и физиологи знают, что критическая масса отдельных органов и тканей, допустимая для поддержания жизнедеятельности организма, составляет для печени 15 % нормального объема, почек — 25 %, эритроцитов — 35 %, легких — 45 %, объема циркулирующей плазмы — 70 %. Снижение объемов меньше указанных ограничений снизу приводит к необратимым изменениям в организме.

В настоящей статье рассматривается задача оптимизации распределения глобального ресурса при ограничениях снизу, накладываемых на парциальные ресурсы.

Рассмотрим пример. Для выполнения нескольких авиарейсов в разные города аэропорт располагает определенным ресурсом топлива, подлежащим распределению между самолетами. Для каждого рейса существует нижний предел, меньше которого выделять топливо бессмысленно — самолет просто не долетит до пункта назначения. Если же данный рейс получает топливо сверх нижнего предела, то у него появляется возможность свободного маневрирования по эшелонам, обхода грозового фронта, ухода на запасной аэродром и т.п. В этом и состоит суть ограничения снизу для каждого парциального ресурса. Нетрудно увидеть, что сумма таких ограничений для всех парциальных ресурсов представляет собой ограничение снизу для глобального ресурса.

Проблема заключается в построении адекватной целевой функции для оптимизации процесса распределения ресурсов в условиях их ограниченности. Стандартное равномерное распределение в данном случае неприемлемо, так как может поставить некоторые объекты на грань невозможности их функционирования, в то время как другие объекты получают неоправданно большой ресурс.

В настоящей работе для решения рассматриваемой проблемы используется подход многокритериальной оптимизации с применением нелинейной схемы компромиссов [2, 3].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поскольку проблема распределения ресурсов актуальна для различных предметных областей, изложим постановку задачи в общем виде.

Заданы подлежащий распределению глобальный ресурс R, а также $n \geq 2$ объектов, каждому из которых выделяется парциальный ресурс

$$r_i \in X_r^{\circ} = \{r_i \mid 0 \leq r_i \leq R, \; i \in [1,n]\}. \tag{1}$$

При этом выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = R. \tag{2}$$

Для каждого объекта известна (или определяется методом экспертных оценок) предельно допустимая величина выделяемого ресурса B_i, меньше которой данный объект функционировать не может. Таким образом, задается система ограничений снизу

$$r_i \geq B_i, \; \sum_{i=1}^{n} B_i \leq R, \; i \in [1,n]. \tag{3}$$

В случае невыполнения условия (3) задача не имеет решения.

С учетом (3) выражение (1) преобразуется к виду

$$r_i \in X_r = \{r_i \mid B_i \leq r_i \leq R, \; i \in [1, n]\}.$$

Ставится задача: определить такие парциальные ресурсы $r_i^* \in X_r, \; i \in [1, n]$, при которых выполняются условия (2), (3) и приобретает экстремальное значение некоторая целевая функция $Y(r), \; r = \{r_i\}_{i=1}^{n}$, вид которой следует выбрать и обосновать.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Ресурсы $r_i, \; i \in [1, n]$, имеют двоякую природу. С одной стороны, их можно рассматривать как независимые переменные, т.е. аргументы оптимизации целевой функции $Y(r)$. С другой стороны, для каждого объекта логично стремление максимизировать свой парциальный ресурс и уйти как можно дальше от опасного ограничения B_i для повышения эффективности своего функционирования. Исходя из этого ресурсы $r_i \geq B_i, \; i \in [1, n]$, могут рассматриваться как частные критерии качества функционирования соответствующих объектов. С учетом (2) и (3) эти критерии являются ограниченными снизу, неотрицательными и противоречивыми (увеличение одного ресурса возможно только за счет уменьшения других).

Как показано в работе [2], изложенные предпосылки позволяют выбрать в качестве целевой функции $Y(r)$ скалярную свертку частных критериев по нелинейной схеме компромиссов (НСК). Механизм НСК разработан для минимизируемых критериев. Чтобы использовать его в данном случае, необходимо установить способ экстремизации целевой функции как минимизацию и применить монотонное (теорема Гермейера) преобразование, приводящее максимизируемые критерии к виду минимизируемых. Таким преобразованием могут быть обратные величины

$$y_i = 1 / r_i, \; A_i = 1 / B_i, \; i \in [1, n].$$

Очевидно, что критерии $y_i(r_i)$ ограничены сверху величинами $A_i, \; i \in [1, n]$.

Концепция нелинейной схемы компромиссов основана на принципе «подальше от ограничений». Предполагается, что согласно функции полезности ЛПР оцениваются предпочтительными те решения, которые дают большее удаление критериев от опасных ограничений. Скалярная свертка $Y(r)$ представляет собой модель функции полезности и включает в себя в явном виде разность $A_i - y_i$ как характеристику напряженности ситуации принятия решения. Это позволяет «штрафовать» критерии за приближение к своим ограничениям. Тогда целевая функция приобретает классический вид скалярной свертки по нелинейной схеме компромиссов в унифицированной форме для минимизируемых критериев [2]

$$Y(r) = \sum_{i=1}^{n} A_i [A_i - y_i(r)]^{-1}.$$

Скалярная свертка выступает как инструмент композиции критериев для различных альтернатив $r \in X_r$, и задача векторной оптимизации распределения ограниченных ресурсов с учетом ограничения для аргументов приобретает вид

$$r^* = \arg \min_{r \in X_r} Y(r) = \arg \min_{r \in X_r} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{B_i} \left(\frac{1}{B_i} - \frac{1}{r_i} \right)^{-1}, \; \sum_{i=1}^{n} r_i - R = 0. \tag{3}$$

Задачу (3) можно решать как аналитически, используя необходимое условие экстремума целевой функции (метод неопределенных множителей Лагранжа), так и численными методами, если аналитическое решение оказывается затруднительным.

ПРОГРАММА ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Для решения широкого спектра оптимизационных задач в работе [2] разработана и изложена программа векторной оптимизации TURBO-OPTIM. Программа выполнена на языке Borland C++3.1 с использованием библиотеки Turbo Vision, что обеспечивает эффективное применение ресурсов ЭВМ, стандартизованную и удобную среду для пользователя, простоту модификации и отладки.

Для работы с программой необходимо выполнить следующие этапы:

— выделить такой набор частных критериев, чтобы все они принимали неотрицательные значения и требовали минимизации;

— определить допустимое предельное значение для каждого критерия;

— выделить набор параметров (независимых переменных), от которых зависят частные критерии;

— определить диапазон изменения каждого параметра (минимальное, стартовое и максимальное значения);

— задать ограничения для параметров, имеющие вид неравенств $g_j(r) \le 0$, $j \in [1, k]$, где k — количество ограничений;

— определить вид зависимости частных критериев от параметров.

Программа позволяет решать задачи оптимизации для следующих случаев связи частных критериев с аргументами оптимизации (параметрами):

- критерии выражаются через параметры явно, известны аналитические зависимости;
- критерии являются некоторыми функционалами, и для расчета их значений требуется решение системы дифференциальных уравнений;
- зависимости критериев от параметров неизвестны, и для определения значений параметров необходимо проведение экспериментов;
- значения критериев можно получить, выполнив написанную пользователем программу;
- существует таблица зависимости частных критериев от параметров.

В каждом случае программа представляет пользователю средства нахождения минимума обобщенного критерия, построенного по нелинейной схеме компромиссов, одним из методов оптимизации: 1) метод симплекс-планирования в модификации Нелдера–Мида; 2) нелокальный метод нелинейного программирования (дуальный метод оптимизации).

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

В конструкторское бюро поступил заказ на проектирование и изготовление полунатурных макетов самолетов трех видов ($n = 3$): пассажирский лайнер, транспортный самолет и спортивно-тренировочный самолет. Для выполнения заказа обеспечено финансирование общим объемом $R = 10$ млн грн (все числовые данные условны).

Экономическими расчетами определены минимальные объемы финансирования отдельных проектов, ниже которых проектирование невозможно:

$$r_1 \ge B_1 = 2 \text{ млн грн}; \; r_2 \ge B_2 = 1 \text{ млн грн}; \; r_3 \ge B_3 = 0.5 \text{ млн грн}.$$

Ставится задача: используя программу векторной оптимизации TURBO-OPTIM, найти компромиссно-оптимальные значения парциальных объемов финансирования r_1^*, r_2^* и r_3^* для проектирования и изготовления полунатурных макетов пассажирского лайнера, транспортного самолета и спортивного самолета.

В соответствии с этапами работы с программой устанавливаем режим «аналитика», метод оптимизации «симплекс-планирование» (по умолчанию) и далее вводим числовые данные: $r_{1\,\min} = B_1 = 2$, $r_{1\,\text{start}} = 3$, $r_{1\,\max} = R = 10$; $r_{2\min} = B_2 = 1$, $r_{2\text{start}} = 3$, $r_{2\,\max} = 10$; $r_{3\,\min} = B_3 = 0.5$, $r_{3\text{start}} = 3$, $r_{3\,\max} = 10$; $r_1 + r_2 + r_3 - 10 = 0$; $y_1 = 1/r_1$, $y_2 = 1/r_2$, $y_3 = 1/r_3$; $y_{1\,\max} = A_1 = \dfrac{1}{B_1} = 0.5$, $y_{2\,\max} = A_2 = \dfrac{1}{B_2} = 1$, $y_{3\,\max} = A_3 = \dfrac{1}{B_3} = 2$.

Далее даем команду «выполнить», и программа определяет искомые значения парциальных объемов финансирования по проектам

$$r_1^* = 4945000 \text{ грн}; \; r_2^* = 3083000 \text{ грн}; \; r_3^* = 1972000 \text{ грн}.$$

Полученный результат соответствует унифицированной версии свертки по нелинейной схеме компромиссов, которая применяется для широкого использования. Для учета индивидуальных предпочтений ЛПР в программе содержится соответствующая опция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин А.Н. Векторная оптимизация иерархических структур // Проблемы управления и информатики. — 2004. — № 6. — С. 26–34.
2. Воронин А.Н., Зиатдинов Ю.К., Козлов А.И. Векторная оптимизация динамических систем. — Киев: Техніка, 1999. — 284 с.
3. Воронин А.Н. Нелинейная схема компромиссов в многокритериальных задачах оценивания и оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 4. — С. 106–114.

Поступила 25.11.2009