

ДВУМЕРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С ОТРАЖЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ключевые слова: *оптические системы, обратная связь, параболические уравнения, бифуркация, центральные многообразия, устойчивость, буферность.*

ВВЕДЕНИЕ

Оптические системы с двумерной обратной связью [1, 2] демонстрируют широкие возможности исследования процессов зарождения и развития диссипативных структур. Обратная связь позволяет воздействовать на динамику системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами. Нелинейный интерферометр с зеркальным отражением поля в двумерной обратной связи — наиболее простая оптическая система, в которой реализуется нелокальный характер взаимодействия световых полей. В этом случае экспериментально установлено многообразие оптических структур, выявлена зависимость их количества и форм от коэффициента диффузии [3–5].

Математической моделью оптических систем с двумерной обратной связью являются полулинейные параболические уравнения с преобразованиями пространственных переменных. В данной работе исследуется задача Неймана на квадрате для параболического уравнения с преобразованием отражения пространственной переменной. Рассматриваются вопросы существования, устойчивости и асимптотической формы ее пространственно неоднородных стационарных решений, возникающих из пространственно однородного решения. Следуя [6], строится иерархия упрощенных моделей указанной задачи. Этот подход позволяет осветить вопросы развития и взаимодействия стационарных структур при значительном отклонении бифуркационного параметра от бифуркационных значений. Полученные при этом результаты согласуются с результатами численного исследования исходной задачи [3–5]. Отметим, что родственные задачи в одномерном случае рассматривались в [2, 7, 8].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На квадрате $P = \left\{ (x, y): \left(-\frac{\pi}{2} < x, y < \frac{\pi}{2} \right) \right\}$ рассмотрим краевую задачу [1, 3, 4]

$$\partial_t u(x, y, t) + u(x, y, t) = D\Delta u(x, y, t) + K(1 + \gamma \cos u(-x, y, t)), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\partial_x u \left(-\frac{\pi}{2}, y, t \right) = \partial_x u \left(\frac{\pi}{2}, y, t \right) = \partial_y u \left(x, -\frac{\pi}{2}, t \right) = \partial_y u \left(x, \frac{\pi}{2}, t \right) = 0. \quad (2)$$

Задача (1), (2) моделирует динамику фазовой модуляции $u(x, y, t)$ световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием отражения координат в двумерной обратной связи. Здесь Δ — оператор Лапласа, $D > 0$ — эффективный коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $0 < \gamma \leq 1$ — контрастность интерференционной картины, $K > 0$ — коэффициент, пропорциональный интенсивности светового потока.

Обозначим $H = L_2(P)$ гильбертово пространство измеримых на P функций. Шкалу пространств, порожденную оператором $-\Delta$ при граничных условиях (2),

обозначим H^s , $s \in Z_+$. Норма в пространстве H^s , $s \in Z_+$, определяется формулой $\|u\|_s^2 = \langle (-\Delta)^s u, u \rangle + \langle u, u \rangle$. Здесь $\langle *, * \rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H .

В данной работе рассматриваются вопросы существования, формы и устойчивости в метрике пространства H^1 пространственно неоднородных стационарных решений задачи (1), (2), бифурцирующих из пространственно однородных решений $u(t, x) = w$, т.е. из решений уравнения

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \quad (3)$$

С ростом K количество существующих корней этого уравнения неограниченно растет, причем при $K \rightarrow \infty$ их состав постоянно обновляется: рождаются новые состояния равновесия и исчезают старые. В этой связи фиксируем какую-либо гладкую ветвь решений

$$w = w(K), \quad 1 + K\gamma \sin w(K) \neq 0 \quad (4)$$

уравнения (3). Затем линеаризуем задачу (1), (2) на $w(K)$:

$$\dot{u} + \mathfrak{L}u = 0,$$

где

$$\mathfrak{L} = 1 - D\Delta - \Lambda Q, \quad Qu(x, y) = u(-x, y), \quad \Lambda = \Lambda(K) = -K\gamma \sin w(K). \quad (5)$$

Линейный оператор \mathfrak{L} с областью определения H^2 , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве H , — самосопряженный оператор. Методом Фурье устанавливается следующая лемма.

Лемма 1. Оператор \mathfrak{L} в пространстве H имеет полную ортогональную систему собственных функций

$$e_{2k+1, 2s+1}(x, y) = \sin(2k+1)x \sin(2s+1)y, \quad e_{2k+1, 2s}(x, y) = \sin(2k+1)x \cos 2sy,$$

$$e_{2k, 2s+1}(x, y) = \cos 2kx \sin(2s+1)y, \quad e_{2k, 2s}(x, y) = \cos 2kx \cos 2sy, \quad k, s = 0, 1, 2, \dots,$$

соответствующих собственным значениям

$$\lambda_{2k+1, s} = 1 + D((2k+1)^2 + s^2) + \Lambda, \quad \lambda_{2k, s} = 1 + D((2k)^2 + s^2) - \Lambda.$$

Выберем теперь K так, чтобы выполнялось следующее условие.

Условие 1. $\Lambda = \Lambda(K) < -1$.

Проблема реализуемости этого условия исследована в [9, 10].

Если $D > D_{1,0} = -(1 + \Lambda)$, то согласно лемме 1 $w = w(K)$ — устойчивое решение задачи (1), (2). При убывании параметра D и его прохождении через значение

$D_{1,0}$ решение $w = w(K)$ теряет устойчивость. Обозначим $D_{2k+1, s} = \frac{D_1}{(2k+1)^2 + s^2}$,

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$, $s = 1, 2, 3, \dots$. Если $D_{1,1} < D < D_{1,0}$, то индекс неустойчивости

[11, гл. 6.4] решения $w = w(K)$ равен 1. Индекс неустойчивости решения w повышается на единицу при уменьшении D и его прохождении через $D_{2k+1, s}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $s = 0, 1, 2, \dots$. Параметр D далее принимается в качестве бифуркационного. Чтобы подчеркнуть зависимость \mathfrak{L} , $\lambda_{k, s}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $s = 0, 1, 2, \dots$, от параметра D , иногда будем обозначать их $\mathfrak{L}(D)$, $\lambda_{k, s}(D)$ соответственно.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Преобразование $u = w + v$ приводит задачу (1), (2) к виду

$$\dot{v} = \mathfrak{L}(D)v + \mathfrak{R}(Qv). \quad (6)$$

Справедливо следующее равенство:

$$\Re(v) = \frac{1}{2} \Lambda_1 v^2 - \frac{1}{6} \Lambda v^3 + O(v^4), \quad \Lambda_1 = -\Lambda \operatorname{ctg} w. \quad (7)$$

В качестве фазового пространства уравнения, т.е. его пространства начальных условий, примем пространство H^1 . Отметим, что уравнение в пространстве H^1 порождает непрерывную полугруппу.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1. Существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < D_{1,0} - D < \delta$ задача (1), (2) имеет два стационарных пространственно неоднородных решения $u_{1,0}^\pm(x, D) = w + v_{1,0}^\pm(x, D)$, где

$$v_{1,0}^\pm = \pm \left(\frac{\lambda_{1,0}}{c_{1,0}} \right)^{1/2} \sin x + \frac{\lambda_{1,0}}{c_{1,0}} \frac{\Lambda_1}{4} \left(\frac{1}{\lambda_{0,0} - 2\lambda_{1,0}} - \frac{1}{\lambda_{2,0} - 2\lambda_{1,0}} \cos 2x \right) \pm \\ \pm \frac{1}{24} \left(\frac{\lambda_{1,0}}{c_{1,0}} \right)^{3/2} \left(\frac{3\Lambda_1^2}{\lambda_{2,0} - 2\lambda_{1,0}} - \Lambda \right) \frac{1}{\lambda_{3,0} - 3\lambda_{1,0}} \sin 3x + r^\pm(x, D).$$

Здесь $r^\pm(x, D) = O((D_{1,0} - D)^{3/2})$,

$$c_{1,0} = -\frac{1}{4} \Lambda_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_{0,0} - 2\lambda_{1,1}} + \frac{1}{2(\lambda_{2,0} - 2\lambda_{1,1})} \right) + \frac{1}{8} \Lambda.$$

Решения $u_{1,0}^\pm(x, D)$ экспоненциально устойчивы.

Схема доказательства теоремы такова, как и при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть выполнено условие 1. Существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < D_{1,1} - D < \delta$ задача (1), (2) имеет два стационарных пространственно неоднородных решения $u_{1,1}^\pm(x, y, D) = w + v_{1,1}^\pm(x, y, D)$, где

$$v_{1,1}^\pm = \pm \left(\frac{\lambda_{1,1}}{c_{1,1}} \right)^{1/2} \sin x \sin y + \frac{\lambda_{1,1}}{c_{1,1}} \frac{\Lambda_1}{4} \left(\frac{1}{\lambda_{0,0} - 2\lambda_{1,1}} - \frac{1}{\lambda_{2,0} - 2\lambda_{1,1}} \cos 2x - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda_{0,2} - 2\lambda_{1,1}} \cos 2y + \frac{1}{\lambda_{2,2} - 2\lambda_{1,1}} \cos 2x \cos 2y \right) \pm \\ \pm \frac{1}{64} \left(\frac{\lambda_{1,1}}{c_{1,1}} \right)^{3/2} \left(\left(\left(\frac{2}{\lambda_{2,0} - 2\lambda_{1,1}} + \frac{1}{\lambda_{2,2} - 2\lambda_{1,1}} \right) \right) \Lambda_1^2 - 2\Lambda \right) \frac{\sin 3x \sin y}{\lambda_{3,1} - 3\lambda_{1,1}} + \\ + \left(\left(\frac{2}{\lambda_{0,2} - 2\lambda_{1,1}} + \frac{1}{\lambda_{2,2} - 2\lambda_{1,1}} \right) \Lambda_1^2 - 2\Lambda \right) \frac{\sin x \sin 3y}{\lambda_{1,3} - 3\lambda_{1,1}} - \\ - \left(\frac{\Lambda_1^2}{\lambda_{2,2} - 2\lambda_{1,1}} - \frac{\Lambda}{3} \right) \frac{\sin 3x \sin 3y}{\lambda_{3,3} - 3\lambda_{1,1}} + r^\pm(x, y, D). \quad (8)$$

Здесь $r^\pm(x, y, D) = O((D_{1,1} - D)^{3/2})$,

$$c_{1,1} = -\frac{1}{32} \Lambda_1^2 \left(\frac{4}{\lambda_{0,0} - 2\lambda_{1,1}} + \frac{2}{\lambda_{2,0} - 2\lambda_{1,1}} + \frac{2}{\lambda_{0,2} - 2\lambda_{1,1}} - \frac{1}{\lambda_{2,2} - 2\lambda_{1,1}} \right) + \frac{3}{32} \Lambda. \quad (9)$$

Решения $u_{1,1}^\pm(x, y, D)$ неустойчивы с индексом неустойчивости, равным 1.

Доказательство теоремы основано на методе центральных многообразий [12, 13]. Существование центрального многообразия однопараметрического семейства уравнений в окрестности $(D_{1,1}, 0) \in (\mathbb{R}, H^1)$ доказывается так же, как и в [14]. Следуя [13, см. 6.2], центральное многообразие семейства уравнений представим в виде

$$v = z \sin x \sin y + \frac{1}{2} q_2(x, y, D) z^2 + \frac{1}{6} q_3(x, y, D) z^3 + \dots, \quad (10)$$

где q_2, q_3, \dots — функции из пространства H^1 . На указанном центральном многообразии уравнение принимает вид

$$\dot{z} = -\lambda_{1,1}(D)z + c_{1,1}(D)z^3 + \dots \quad (11)$$

Для того чтобы найти коэффициенты разложений (10), (11), подставим (10), (11) в (6) и затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z . Согласно лемме 1 и равенству (7) относительно q_2 имеем уравнение

$$(\mathfrak{L} - 2\lambda_{1,1})q_2 = \Lambda_1 \sin^2 x \sin^2 y.$$

В силу леммы 1 оно имеет единственное решение

$$q_2 = \frac{1}{24} \Lambda_1 \left(\frac{1}{\lambda_{0,0} - 2\lambda_{1,1}} - \frac{\cos 2x}{\lambda_{2,0} - 2\lambda_{1,1}} - \frac{\cos 2y}{\lambda_{0,2} - 2\lambda_{1,1}} + \frac{\cos 2x \cos 2y}{\lambda_{2,2} - 2\lambda_{1,1}} \right). \quad (12)$$

Перейдем к уравнению

$$\frac{1}{6} (\mathfrak{L} - 3\lambda_{1,1})q_3 + c_{1,1}(D) \sin x \sin y = -\frac{1}{2} \Lambda_1 \sin x \sin y q_2 + \frac{1}{6} \Lambda \sin^3 x \sin^3 y, \quad (13)$$

где q_2 удовлетворяет равенству (12). Разрешимость уравнения (13) в пространстве H^1 в классе гладких по параметру D в окрестности точки $D_{1,1}$ функций приводит к выбору $c_{1,1}(D)$ согласно (9). Уравнению (13) при указанном выборе $c_{1,1}(D)$ удовлетворяет функция

$$q_3 = \left(\frac{3\Lambda_1^2}{\lambda_{2,0} - 2\lambda_{1,1}} - \Lambda \right) \frac{\sin 3x \sin y}{\lambda_{3,1} - 3\lambda_{1,1}} + \left(\frac{3\Lambda_1^2}{\lambda_{0,2} - 2\lambda_{1,1}} - \Lambda \right) \frac{\sin x \sin 3y}{\lambda_{1,3} - 3\lambda_{1,1}} - \left(\frac{3\Lambda_1^2}{\lambda_{2,2} - 2\lambda_{1,1}} - \frac{\Lambda}{3} \right) \frac{\sin 3x \sin 3y}{\lambda_{3,3} - 3\lambda_{1,1}}. \quad (14)$$

Отметим, что уравнение относительно q_4 имеет единственное решение. Из условия разрешимости уравнения относительно q_5 в пространстве H^1 в классе гладких по параметру D функций находим коэффициент при z^5 в (11). Как известно, процесс последовательного определения коэффициентов в (10), (11) неограниченно продолжим. Полученные при этом разложения асимптотически сходятся в окрестности $(D_{1,1}, 0) \in (\mathbb{R}, H^1)$ [13, см. 6.2].

Рассмотрим теперь уравнение (11). Из условия 1 следует, что $c_{1,1}(D) < 0$ при малых $D_{1,1} - D$. Следовательно, в семействе уравнений (11) при $D = D_{1,1}$ имеет место суперкритическая бифуркация *вилка* и из тривиальной особой точки ответвляется две экспоненциально устойчивые особые точки

$$z^\pm = \pm \left(\frac{\lambda_{1,1}(D)}{c_1(D)} \right)^{1/2} + O((D_1 - D)^{3/2}). \quad (15)$$

Итак, в семействе уравнений (6) имеет место суперкритическая бифуркация рождения при $D = D_{1,1}$ пары неустойчивых с индексом неустойчивости 1 пространственно неоднородных стационарных решений [13, см. 6.2]. В силу (10), (12), (14), (15) для указанных решений справедливо равенство (8).

Теорема доказана.

Аналогичные рассуждения позволяют доказать существование пар $u_{2k+1,s}^\pm$, $k = 0, 1, \dots$, $s = 0, 1, 2, \dots$, пространственно неоднородных стационарных решений задачи (1), (2), бифурцирующих из w при прохождении параметра D через $D_{2k+1,s}$, получить их асимптотические представления и указать их индекс неустойчивости. Подчеркнем, что, используя равенство (принцип подобия [10])

$$v_{m(2k+1),ms}^\pm(x, y, D) = v_{(2k+1),s}^\pm(mx, my, m^2 D), \quad m = 2, 3, \dots, \quad (16)$$

можно упростить процесс построения стационарных решений задачи (1), (2).

3. АППРОКСИМАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Вопрос о развитии стационарных решений $u_{2k+1,s}^\pm$, $k = 0, 1, \dots$, $s = 0, 1, 2, \dots$, задачи (1), (2) при уменьшении параметра D от $D_{2k+1,s}$ рассмотрим при $\Lambda_1 = 0$. Исследование этого случая приводит к модельной задаче

$$\dot{v} = \mathfrak{L}(D)v + (Qv)^3. \quad (17)$$

Для анализа динамики $v_{1,0}^\pm(x, D)$ при уменьшении D от $D_{1,0}$ построим приближенные галеркинские аппроксимации уравнения (17) в виде

$$v = \sum_{k=0}^4 z_{2k+1} \sin(2k+1)x. \quad (18)$$

В результате получим градиентную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_{2k+1} = -\frac{\partial G_{1,0}(z, D)}{\partial z_{2k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (19)$$

где $z = (z_1, z_3, \dots, z_9)$,

$$\begin{aligned} G_{1,0}(z, D) = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 \lambda_{2k+1}(D) z_{2k+1}^2 + \frac{3}{16} \sum_{k=0}^4 z_{2k+1}^4 + \frac{1}{4} (z_1^3 z_3 + z_3^3 z_9) + \\ & + \frac{3}{4} \sum_{k=0}^4 z_{2k+1}^2 \sum_{s=k+1}^4 z_{2s+1}^2 - \frac{3}{4} z_1^2 (z_3 z_5 + z_5 z_7 + z_7 z_9) + \\ & + \frac{3}{4} z_1 (z_3^2 z_5 - z_3^2 z_9 + z_3 z_5 z_7 - z_3 z_5 z_9 + z_3 z_7 z_9) + \frac{3}{4} z_3 (z_5^2 z_7 + 2z_5 z_7 z_9). \end{aligned}$$

Потенциальная функция $G_{1,0}(z, D)$ ограничена снизу. Следовательно, решения системы ограничены на положительной полуоси. Аттракторами системы (19)

являются ее стационарные точки. Как известно, стационарные точки градиентных систем — узлы и седла.

Перейдем теперь к анализу однопараметрической системы (19). Из ее нулевого решения при $D = D_{1,0}$ в результате суперкритической бифуркации *вилка* ответвляется пара устойчивых стационарных решений $\tilde{z}^\pm(D) = \pm(\tilde{z}_1(D), \dots, \tilde{z}_9(D))$, $\tilde{z}_1(D) > 0$. Непрерывная ветвь $\tilde{z}^+(D)$ существует на $(0, D_{1,0})$. Отметим ее особенности: $\tilde{z}_1(D) > \tilde{z}_3(D) > \dots > \tilde{z}_9(D) > 0$ для всех $D \in (0, D_{1,0})$; $\tilde{z}_{2s+1}(D)$, $s = 0, 1, \dots, 4$, — монотонно убывающие ограниченные функции. Родившись устойчивыми, стационарные точки $\tilde{z}^\pm(D)$ сохраняют устойчивость при убывании D от $D_{1,0}$. При этом прослеживается тенденция к сближению точек спектра семейства $\tilde{z}^+(D)$ и отходе наибольшей ее точки от нуля при уменьшении D .

Обратимся теперь к вопросу о характере бифуркации семейства уравнений (19) в окрестности точки $(D_{3,0}, 0)$. Как и выше, в результате суперкритической бифуркации *вилка* из нулевого решения системы (19) ответвляется пара стационарных решений $\tilde{z}^\pm(D) = \pm(0, \tilde{z}_3(D), 0, 0, \tilde{z}_9(D))$ с индексом неустойчивости 1. Матрица устойчивости точки $\tilde{z}^+(D)$ блочно-диагональная. Один из ее блоков размерности 3 имеет одно положительное собственное значение, которое при $D = D_3$ переходит на отрицательную полуось. Следовательно, пара стационарных решений $\tilde{z}^\pm(D)$ при $D = \tilde{D}_3$ обретает устойчивость по типу обмен устойчивостью. Отметим, что обретенная решением $\tilde{z}^\pm(D)$ устойчивость сохраняется при дальнейшем уменьшении D . Итак, есть основания предполагать, что индекс неустойчивости решения $v_{3,0}(x, D)$ в процессе уменьшения D изменяется.

Согласно проведенному выше анализу на промежутке $(0, D_{1,0})$ существует пара стационарных решений $v_{1,0}^\pm(x, D)$ уравнения (17). Имеет место следующее приближенное равенство:

$$v_{1,0}^\pm(x, D) \approx \sum_{k=0}^4 \tilde{z}_{2k+1}(D) \sin(2k+1)x. \quad (20)$$

Рассмотрим теперь в пространстве H^1 уравнение

$$v = \mathfrak{L}(D)v + 3 \left(\sum_{k=0}^4 \tilde{z}_{2k+1}(D) \sin(2k+1)x \right)^2 Qv, \quad (21)$$

полученное линеаризацией уравнения (17) на приближенном решении (20). Анализ устойчивости уравнения (21) начнем с построения его галеркинской аппроксимации в виде

$$v = \sum_{k=0}^4 z_{2k+1} \cos 2kx. \quad (22)$$

В результате получим линейную систему уравнений, которая определяется симметричной матрицей $B(D)$. Спектр $\sigma(B(D))$ матрицы $B(D)$ зависит от Λ . Существует $\hat{\Lambda}$, $\hat{\Lambda} \approx -1,85$, такое, что при $\Lambda > \hat{\Lambda}$ спектр $\sigma(B(D))$ принадлежит отрицательной полуоси для всех $D \in (0, D_{1,0})$. Если же $\Lambda < \hat{\Lambda}$, то найдется $\hat{D} = \hat{D}(\Lambda)$ такое, что одна из точек спектра $\sigma(B(D))$ переходит при $D = \hat{D}$ на положительную полуось и остается на ней при дальнейшем уменьшении D .

Проведенный анализ позволяет предположить, что при уменьшении D стационарные решения $v_{1,0}^\pm(x, D)$ сохраняют устойчивость, если $\Lambda > \hat{\Lambda}^*$, $\hat{\Lambda}^* \approx -1,85$. Если $\Lambda < \hat{\Lambda}^*$, то решения $v_{1,0}^\pm(x, D)$ теряют устойчивость при уменьшении параметра D и его прохождении через некоторое критическое значение.

Рассмотрим теперь вопрос об эволюции $v_{1,1}^{\pm}(x, y, D)$ при уменьшении параметра D . Полагая

$$v = \sum_{k,s=0,1,2} z_{2k+1,2s+1} \sin(2k+1)x \sin(2s+1)y, \quad (23)$$

методом Галёркина получим градиентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_{2k+1,2s+1} = -\frac{\partial G_{1,1}(z, D)}{\partial z_{2k+1,2s+1}}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (24)$$

Представление $G_{1,1}$ ввиду его громоздкости опустим. Бифуркационный анализ однопараметрического семейства уравнений (24) приводит к следующим результатам. При уменьшении параметра D и его прохождении $D = D_{1,1}$ имеет место суперкритическая бифуркация *вилка* и из нуля ответвляется две непрерывные ветви устойчивых стационарных решений $\pm\{\tilde{z}_{2k+1,2s+1}(D), k, s = 0, 1, 2\}$, определенных на $(0, D_{1,1})$. Следовательно, из нулевого решения уравнения при $D = D_{1,1}$ ответвляется пара стационарных решений $v_{1,1}^{\pm}(x, y, D)$, $v_{1,1}^{-}(x, y, D) = v_{1,1}^{+}(-x, y, D)$ такая, что имеет место следующее приближенное равенство:

$$v_{1,1}^{+}(x, y, D) \approx \sum_{k,s=0,1,2} \tilde{z}_{2k+1,2s+1}(D) \sin(2k+1)x \sin(2s+1)y. \quad (25)$$

Для анализа на устойчивость этого приближенного решения уравнения (17) рассмотрим в пространстве H^1 соответствующее линейаризованное уравнение

$$\dot{v} = \mathfrak{L}(D)v + 3 \left(\sum_{k,s=0,1,2} \tilde{z}_{2k+1,2s+1}(D) \sin(2k+1)x \sin(2s+1)y \right)^2 Qv. \quad (26)$$

Аппроксимация Галёркина уравнения (26) в виде

$$v = \sum_{k=0}^2 z_{2k+1} \sin(2k+1)x \quad (27)$$

приводит к системе линейных дифференциальных уравнений с симметричной матрицей. Ее спектр при малых $D_{1,1} - D > 0$ содержит одну точку на положительной полуоси. При уменьшении D указанная точка спектра монотонно приближается к нулю и затем переходит на отрицательную полуось. Указанное поведение спектра матрицы дает основание для следующего заключения. Решение $v_{1,1}^{+}(x, y, D)$ рождается неустойчивым с индексом неустойчивости 1.

При уменьшении параметра D решение $v_{1,1}^{+}(x, y, D)$, увеличиваясь по амплитуде и эволюционируя по форме, обретает устойчивость.

Перейдем теперь к аппроксимации Галёркина уравнения (26) в виде (22). Матрица устойчивости полученной системы при малых $D_{1,1} - D > 0$ устойчивая.

Динамика спектра указанной матрицы зависит от параметра Λ , а именно, существует $\Lambda_{1,1}$ такое, что при $\Lambda > \Lambda_{1,1}$ спектр указанной матрицы остается на отрицательной полуоси. Если же $\Lambda < \Lambda_{1,1}$, то найдется такое значение D , при котором она теряет устойчивость.

Таким образом, есть веские основания утверждать, что существует $\Lambda_{1,1}^* \approx \Lambda_{1,1}$ такое, что если $\Lambda > \Lambda_{1,1}^*$, то решение $v_{1,1}^{+}(x, y, D)$ уравнения (17) сохра-

няет устойчивость при уменьшении D . Если $\Lambda < \Lambda_{1,1}^*$, то решение $v_{1,1}^+(x, y, D)$ теряет устойчивость при некотором значении параметра D . Отметим, что интервал устойчивости $v_{1,1}^+(x, y, D)$ с ростом Λ сужается. Если $\Lambda = 3$, то согласно проведенному численному анализу $v_{1,1}^+(x, y, D)$ — устойчивое решение уравнения (17) при $D \in (0,35, 0,6)$.

Отметим, что функция $v_{1,1}^+(x, y, D)$ при $D \rightarrow 0$ приближается к ступенчатой функции $(1 - \Lambda)^{1/2} \text{Sign}(\sin x \sin y)$. Действительно, положим в (17) $D = 0$. Легко видеть, что $(1 - \Lambda)^{1/2} \text{Sign}(\sin(2k+1)x \sin(2s+1)y)$, $(1 - \Lambda)^{1/2} \text{Sign}(\sin(2k+1)x \cos 2sy)$, $k, s = 0, 1, 2, \dots$, — ее стационарные решения, принадлежащие пространству H . Рассуждая, как и в [8], приходим к заключению, что если $\Lambda > -2$, то все они устойчивы в метрике пространства H . Если $\Lambda < -2$, то указанные решения неустойчивы.

Решение $v_{2k+1,s}^+(x, y, D)$, $k = 0, 1, \dots, s = 0, 1, \dots$, при $D \rightarrow 0$ приближается также к ступенчатым функциям. Отметим, однако, что мы располагаем приближенными представлениями $v_{2k+1,s}^+(x, y, D)$ в виде полиномов Фурье. В этой связи при малых D имеет место явление Гиббса. Приведем в этой связи иллюстрирующие примеры. Если $\Lambda = 2$, $D = 0,07$, то $v_{1,0}^+ = 1,26 \sin x + 0,40 \sin 3x + 0,21 \sin 5x + 0,13 \sin 7x + 0,08 \sin 9x$. График этой функции, рассматриваемой на квадрате P , представлен на рис. 1.

При $\Lambda = 3$, $D = 0,01$ коэффициенты функции, определенной согласно (25), таковы: $\tilde{z}_{1,1} = 2,22$, $\tilde{z}_{3,1} = \tilde{z}_{1,3} = 0,68$, $\tilde{z}_{5,1} = \tilde{z}_{1,5} = 0,34$, $z_{3,3} = 0,21$, $\tilde{z}_{5,3} = \tilde{z}_{3,5} = 0,10$, $z_{5,5} = 0,05$. График указанной функции представлен на рис. 2.

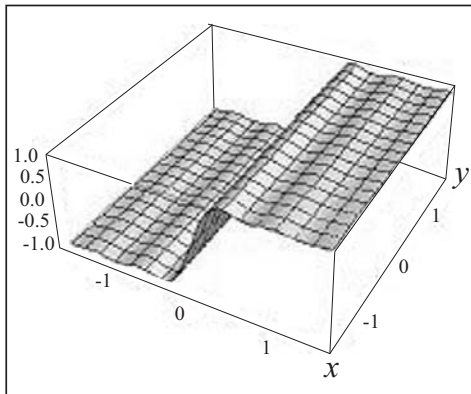


Рис. 1

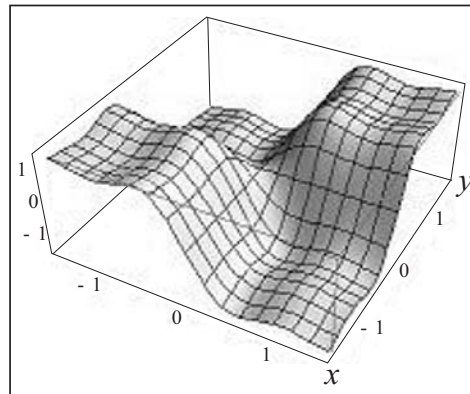


Рис. 2

Отметим, что такого вида структуры («крест») возникают при исследовании двухкомпонентных систем с триггерными свойствами [6, см. 2.2]. Структуры вида, представленных на рис 1, 2, разумеется, без их волнистости, получены численными расчетами в [3–5].

Проведенный выше анализ позволяет предполагать, что в уравнении (17) реализуется явление буферности [10]. В рассматриваемом случае это означает, что за счет выбора D можно обеспечить существование любого фиксированного числа экспоненциально устойчивых стационарных решений. При этом если

$\Lambda < \Lambda^*$, $\Lambda^* \approx -2$, то буферность носит высокомодовый характер. Отметим, что явление буферности в параболических уравнениях с преобразованием пространственной переменной исследовалось в [9, 10, 14–16].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты проведенных в данной работе исследований бифуркаций рождения и эволюции стационарных решений исходной задачи при уменьшении коэффициента диффузии соответствуют результатам, полученным в [3–5]. Установленные здесь особенности динамики стационарных структур могут использоваться как при численном моделировании, так и в реальных экспериментах для организации эффективного управления пространственным профилем светового пучка с помощью начальной фазовой модуляции, выбора коэффициента диффузии, других параметров системы. Из проведенного анализа следует, что применение маломодовых аппроксимаций приводит к правильным результатам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В.Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые принципы оптической обработки информации. — М.: Наука, 1990. — С. 263–325.
2. Разгулин А.В. Нелинейные модели оптической синергетики. — М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2008. — 201 с.
3. Vorontsov M. A., Zheleznykh N. I., Ivanov V. Yu. Transverse interaction in 2-D feedback non-linear optical systems // Opt. and Quant. Electron. — 1988. — 22. — P. 301–318.
4. Воронцов М.А., Железных Н.И. Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с обратной связью // Математическое моделирование. — 1990. — 2, № 2. — С. 31–38.
5. Железных Н.И. Исследование нелинейных управляемых оптических систем с обратной связью: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М., 1991. — 115 с.
6. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Структуры и хаос в нелинейных средах. — М.: Физматлит, 2007. — 485 с.
7. Чушкин В.А., Разгулин А.В. Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отраженным аргументом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. — 2003. — № 2. — С. 13–20.
8. Белан Е.П. Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 5. — С. 95–111.
9. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // Теор. и мат. физика. — 2004. — 140, № 1. — С. 14–28.
10. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.
11. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. — М.: Наука, 1989. — 294 с.
12. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 368 с.
13. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
14. Белан Е.П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Диф. уравнения. — 2004. — 40, № 5. — С. 645–654.
15. Белан Е.П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Журн. мат. физики, аналит. геометрии. — 2005. — 1, № 1. — С. 3–34.
16. Белан Е.П. Оптическая буферность стационарных структур // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 5. — С. 61–75.

Поступила 21.10.2010