

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ КОНСОЛИДАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Ключевые слова: математическое моделирование, неклассические модели, консолидация, релаксация, системы дифференциальных уравнений в частных производных, нелинейные краевые задачи, численные решения, асимптотика решений.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи моделирования динамики распределенных пространственно-временных консолидационных процессов в деформируемых насыщенных пористых средах актуальны, в первую очередь, в связи с прикладными проблемами охраны окружающей среды, в частности с проблемами обеспечения условий экологически безопасной эксплуатации таких инженерных объектов, как поверхностные накопители промышленных и бытовых стоков, а также других гидротехнических сооружений [1–5]. На практике нередко указанные накопители заполняются концентрированными солевыми растворами, привело к необходимости поиска и разработки эффективных методик для математического моделирования динамики консолидационных процессов с учетом явления солепереноса и некоторых других факторов [2–4]. К таким факторам, прежде всего, относятся релаксационные явления, имеющие место для ряда фильтрационных процессов в деформируемой среде и обусловленные различными причинами [2]. В частности, изучение релаксационных эффектов в математических моделях консолидационных процессов диктуется необходимостью учета влияния на процесс сложной внутренней структуры растворов и порового пространства [6–8]. Следует отметить, что в известных к настоящему времени работах (см., например, [1–8]) моделирование динамики консолидационных процессов в насыщенных солевыми растворами деформируемых средах выполнялось применительно к классической математической модели пористой среды [9]. В данной работе построена математическая модель, описывающая динамику консолидационного процесса насыщенной солевым раствором трещиновато-пористой [10] среды с учетом межфазного массообмена, что позволяет более адекватно моделировать динамику указанного процесса, например, в случае искусственно нарушенных (горные удары, взрывы) горных пород. В рамках этой модели разработаны методика и алгоритм численного моделирования динамики процесса фильтрационной консолидации насыщенного солевым раствором трещиновато-пористого пласта, расположенного на непроницаемом основании, изложены результаты соответствующих численных экспериментов и приведены выводы качественного характера. Рассматривается также задача учета эффектов памяти в математической модели фильтрационной консолидации трещиновато-пористой среды.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим нестационарный одномерный по пространственной переменной x консолидационный процесс насыщенного солевым раствором трещиновато-по-

ристого [10] массива под действием мгновенно приложенной нагрузки заданной интенсивности в условиях изотермичности. Используем обобщение фильтрационного закона Дарси на случай фильтрации солевых растворов в трещинах [3]

$$u_x = -k_1 \frac{\partial H}{\partial x} + \nu \frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad (1)$$

где H — избыточный напор в трещинах, C_1 — концентрация солей в трещинах, u_x — скорость фильтрации, k_1 — коэффициент фильтрации для трещин, ν — коэффициент осмоса.

Для получения уравнения, описывающего динамику полей избыточных напоров в трещинах и блоках, используем линеаризованные уравнения неразрывности для трещин и блоков [10]

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{k_1}{C_v^{(1)}} \frac{\partial H}{\partial t} - q = 0, \quad (2)$$

$$\frac{k_2}{C_v^{(2)}} \frac{\partial H_1}{\partial t} + q = 0, \quad (3)$$

где H_1 — напор в блоках, k_2 — коэффициент фильтрации в блоках, $C_v^{(1)}$, $C_v^{(2)}$ — коэффициенты консолидации [5] для трещин и блоков соответственно, $q = \alpha(H_1 - H)$, q , α — величина и коэффициент перетока.

Из соотношений (2) и (3) с учетом соотношения (1) получаем уравнение для определения полей избыточных напоров в трещинах в виде [8]

$$\tau_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(H + \tau_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(C_1 + \tau_2 \frac{\partial C_1}{\partial t} \right), \quad (4)$$

где

$$\tau_1 = \frac{k_1 k_2}{\alpha(k_1 C_v^{(2)} + k_2 C_v^{(1)})},$$

$$\tau_2 = \frac{k_2}{\alpha C_v^{(2)}}, \quad C_v = \frac{k_1 C_v^{(1)} C_v^{(2)}}{k_1 C_v^{(2)} + k_2 C_v^{(1)}}, \quad \mu = \nu C_v k_1^{-1}. \quad (5)$$

Следует отметить, что уравнение фильтрационной консолидации трещиновато-пористой среды относительно избыточного напора в трещинах (уравнение (4)) формально совпадает с полученным ранее в [8] уравнением консолидации пористой среды в условиях релаксационности фильтрационного процесса, однако в рассматриваемом случае дополнительно реализуется возможность вычисления параметров релаксации τ_1, τ_2 согласно соотношениям (5), которые определяют и физический смысл указанных параметров.

При выводе уравнений для определения полей концентраций солевого раствора в случае фильтрации в трещиновато-пористой среде воспользуемся уравнениями материального баланса для трещин и блоков в виде

$$\sigma_1 \frac{\partial C_1}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} = \gamma(C_2 - C_1), \quad (6)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial C_2}{\partial t} + \frac{\partial q'_x}{\partial x} = -\gamma(C_2 - C_1), \quad (7)$$

где C_1, C_2 — концентрации солей соответственно в трещинах и блоках, σ_1 — пористость трещин, σ_2 — пористость блоков, γ — константа скорости массообмена. При этом потоки концентрации в трещинах и блоках q_x, q'_x , учитывая диффузионный и конвективный перенос, выражаются соотношениями [9]

$$q_x = u_x C_1 - D_1 \frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad q'_x = -D_2 \frac{\partial C_2}{\partial x}, \quad (8)$$

где D_1, D_2 — коэффициенты диффузии для трещин и блоков соответственно.

Из соотношений (6), (7) с учетом (8) и (1) получаем систему уравнений фильтрационно-конвективной диффузии в трещиновато-пористой среде в виде

$$\sigma_1 \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial C_1}{\partial x} - v \left(\frac{\partial C_1}{\partial x} \right)^2 + C_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k_1 H - v C_1) + \gamma (C_2 - C_1), \quad (9)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial C_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} - \gamma (C_2 - C_1). \quad (10)$$

Система уравнений (4), (9), (10) образует искомую математическую модель процесса фильтрационной консолидации трещиновато-пористых сред, насыщенных соевыми растворами. Отметим, что в отличие от случая релаксационной фильтрации в пористой среде [8] уравнения для определения полей концентраций в рассматриваемом случае не являются интегро-дифференциальными, что существенно упрощает задачу моделирования процесса.

В рамках построенной математической модели изучение динамики процесса фильтрационной консолидации трещиновато-пористого массива мощности l , расположенного на непроницаемом основании, сводится к решению в области $(0, 1) \times (0, +\infty)$ следующей нелинейной краевой задачи:

$$\tau_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(H + \tau_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(C_1 + \tau_2 \frac{\partial C_1}{\partial t} \right), \quad (11)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + u \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial C_1}{\partial x} - v \left(\frac{\partial C_1}{\partial x} \right)^2 + C_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (uH - vC_1) + \gamma (C_2 - C_1), \quad (12)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial C_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} - \gamma (C_2 - C_1), \quad (13)$$

$$H(0, t) = 0, \quad H_x(1, t) = 0, \quad H(x, 0) = 1, \quad H_t(x, 0) = 0, \quad (14)$$

$$C_1(0, t) = 1, \quad C_{1x}(1, t) = 0, \quad C_1(x, 0) = 0, \quad (15)$$

$$C_2(0, t) = c^*, \quad C_{2x}(1, t) = 0, \quad C_2(x, 0) = c^*. \quad (16)$$

Здесь введены безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$x' = \frac{x}{l}, \quad t' = \frac{t}{T}, \quad H' = \frac{H}{H_0}, \quad C'_1 = \frac{C_1}{C_1^{(0)}}, \quad C'_2 = \frac{C_2}{C_1^{(0)}}, \quad C'_v = \frac{C_v T}{l^2},$$

$$\nu' = \frac{\nu TC_1^{(0)}}{l^2}, \quad \gamma' = \gamma T, \quad D_1' = \frac{D_1 T}{l^2}, \quad D_2' = \frac{D_2 T}{l^2}, \quad u' = \frac{k_1 H_0 T}{l^2}, \quad (17)$$

$$\mu' = \frac{\mu C_1^{(0)} T}{l^2 H_0}, \quad \tau_i' = \frac{\tau_i}{T} \quad (i=1, 2), \quad c^* = \frac{C_2^{(0)}}{C_1^{(0)}}$$

и знак «штрих» над безразмерными величинами опущен. В соотношениях (17) использованы следующие обозначения: H_0 — начальное значение избыточного напора в трещинах, $C_i^{(0)}$ ($i=1, 2$) — заданные значения концентрации на входе фильтрационного потока в трещинах и блоках соответственно.

МЕТОДИКА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

Кратко изложим методику построения приближенного решения краевой задачи (11)–(16), базирующуюся на совместном использовании комбинации численно-аналитического и численного подходов. Рассмотрим сначала задачу (13), (16) относительно функции $C_2(x, t)$, считая функцию $C_1(x, t)$ известной, и используем предложенный в [11] подход, сочетающий дифференциально-разностный метод с методом суммарных представлений [12]. Вводя в рассмотрение сеточную область $x_i = ih \left(i = \overline{0, m+1}, h = \frac{2}{2m+1} \right)$, поставим в соответствие рассматриваемой задаче в области изображений, определяемых P -трансформациями вида [12]

$$\tilde{f}(t) = P_3^{(m)*} \bar{f}(t)$$

(здесь $P_3^{(m)*}$ — квадратная матрица порядка m , транспонированная по отношению к матрице $P_3^{(m)} = [p_{kj}^{(3)}]_{k,j=1}^m$, определенной в [12]), следующую задачу Коши:

$$\sigma_2 \frac{d\hat{C}_{2_i}(t)}{dt} - \theta_i \hat{C}_{2_i}(t) = \hat{w}_i(t) \quad (i = \overline{1, m}), \quad (18)$$

$$\hat{C}_{2_i}(0) = \hat{C}_{0_i} \quad (i = \overline{1, m}). \quad (19)$$

В соотношениях (18), (19) введены такие обозначения: $\hat{C}_{2_i}(t)$, $\hat{w}_{2_i}(t)$ ($i = \overline{1, m}$) — компоненты векторов

$$\tilde{\bar{C}}_2(t) = P_3^{(m)*} \bar{C}_2(t), \quad \tilde{\bar{w}}(t) = P_3^{(m)*} \bar{w}(t),$$

где

$$\bar{C}_2(t) = [C_{2_1}(t), C_{2_2}(t), \dots, C_{2_m}(t)]^T,$$

$$\bar{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)]^T = \frac{D_2}{h^2} \bar{w}_1 + \gamma \bar{C}_1(t), \quad \bar{w}_1 = (c^*, 0, \dots, 0)^T,$$

$$\bar{C}_1(t) = [C_{1_1}(t), C_{1_2}(t), \dots, C_{1_m}(t)]^T, \quad \theta_i = \frac{D_2}{h^2} (\lambda_i^{(3)} - 2), \quad \hat{C}_{0_i} = c^* \sum_{k=1}^m p_{ki}^{(3)},$$

$\lambda_i^{(3)}$ — элементы диагональной матрицы собственных значений, явные выражения для которых приведены в [12].

Решая задачу Коши (18), (19) и переходя в область оригиналов, получаем решение (при известном C_1) дифференциально-разностной задачи, соответствующей задаче (13), (16), в виде

$$C_{2_i}(t) = f_i(t) + \sum_{k=1}^m \int_0^t C_{1_k}(\tau) G_{ik}(t-\tau) d\tau \quad (i = \overline{1, m}), \quad (20)$$

где

$$f_i(t) = c^* \sum_{v=1}^m p_{iv}^{(3)} \left[\sum_{k=1}^m p_{kv}^{(3)} e^{\frac{\theta_v t}{\sigma_2}} + \frac{\sigma_2 D_2}{h^2} \theta_v^{-1} p_{1v}^{(3)} \left(1 - e^{-\frac{\theta_v t}{\sigma_2}} \right) \right], \quad (21)$$

$$G_{ik}(t-\tau) = \frac{\gamma}{\sigma_2} \sum_{v=1}^m p_{kv}^{(3)} p_{iv}^{(3)} e^{-\frac{\theta_v(t-\tau)}{\sigma_2}}. \quad (22)$$

Отметим, что с вычислительной точки зрения соотношения (20)–(22) обладают очевидными преимуществами метода суммарных представлений, в частности возможностью выборочного счета в заданных точках области [12].

Аналогичный подход можно применить и к задаче (11), (14), рассматривая ее как краевую задачу относительно неизвестной функции H , при заданном C_1 . Не останавливаясь на соответствующих выкладках, подробно изложенных в [8], приведем окончательный результат. Численно-аналитическое решение указанной задачи имеет вид

$$H_i(t) = F_i(t) + \sum_{k=1}^m \int_0^t C_{1_k}(\tau) S_{ik}(t-\tau) d\tau \quad (i = \overline{1, m}), \quad (23)$$

где функции $F_i(t)$, $S_{ik}(t-\tau)$ ($i, k = \overline{1, m}$) определены в [8].

Для решения задачи (12), (15) относительно функции C_1 целесообразно воспользоваться конечно-разностной схемой, записываемой в обозначениях работы [13], например, в виде

$$\sigma_1 C_{1_t} = \eta \hat{C}_{1_{\bar{x}\bar{x}}} + u^+ \hat{C}_{1_x} + u^- \hat{C}_{1_{\bar{x}}} + \hat{C}_1 (uH - \nu C_1)_{\bar{x}\bar{x}} + \gamma (C_2 - \hat{C}_1), \quad (24)$$

где

$$u^\pm = \frac{1}{2} (w \pm |w|), \quad w = uH_0 - \nu C_{1_0}, \quad \eta = \frac{D_1}{1+R}, \quad R = \frac{h|w|}{2D_1},$$

h — шаг сетки по геометрической переменной.

С учетом изложенного сформулируем комбинированный алгоритм для приближенного решения исходной краевой задачи (11)–(16).

1. Зная значения H и C_2 на предыдущем временном слое, вычисляем значение C_1 на данном временном слое в соответствии с разностной схемой (24).

2. С учетом найденного C_1 на рассматриваемом временном слое вычисляем значения H и C_2 на этом слое согласно явным зависимостям (20), (23).

3. Этим решение задачи на данном временном слое завершается. Переходим на следующий временной слой и повторяем вычисления начиная с шага 1.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА

На рис. 1, 2 приведены некоторые графические результаты (в безразмерных переменных (17)) численного моделирования динамики изотермического кон-

солидационного процесса, насыщенного соевым раствором трещиновато-пористого массива конечной мощности (расположенного на непроницаемом основании) для случая наличия массообмена вида неравновесной адсорбции растворимых веществ в соответствии с изложенным алгоритмом.

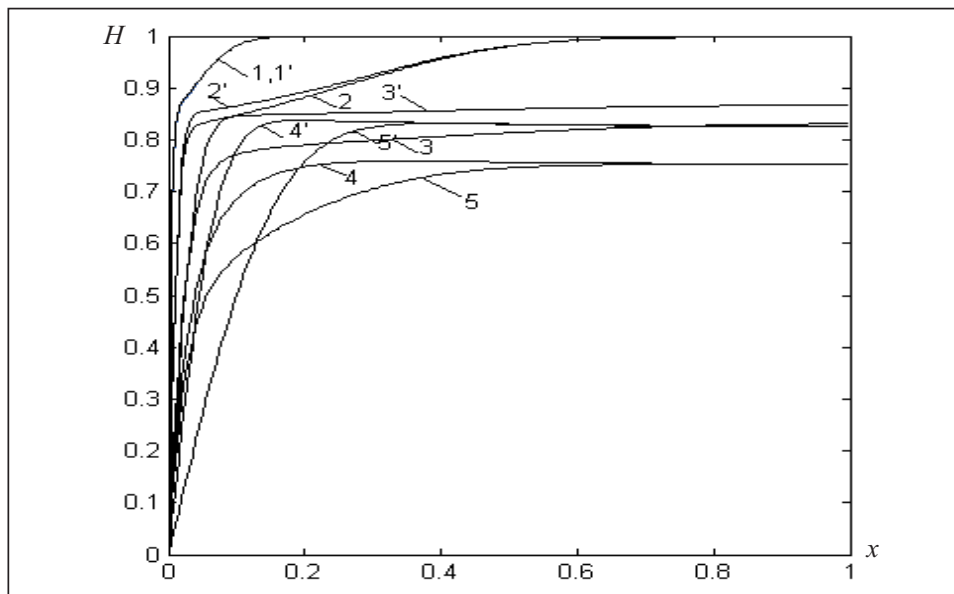


Рис. 1. Графики поведения полей избыточных напоров в пористой ($I'-5'$) и трещиноватой ($I-5$) средах при аномальной осмотической фильтрации; $t = 0,01$ ($1, 1'$); $t = 0,1$ ($2, 2'$); $t = 0,4$ ($3, 3'$); $t = 1,2$ ($4, 4'$); $t = 5,1$ ($5, 5'$)

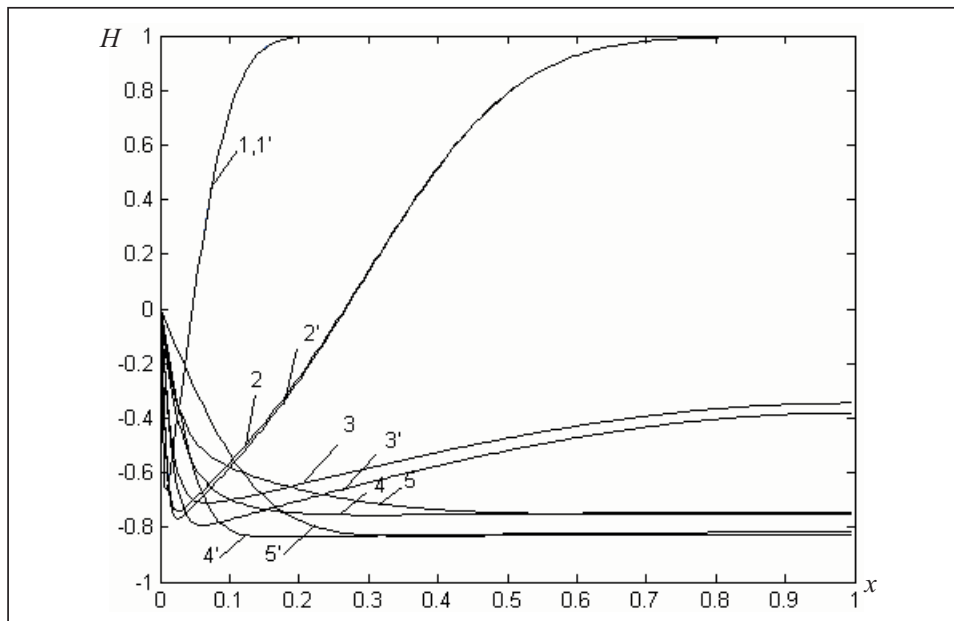


Рис. 2. Графики поведения полей избыточных напоров в пористой ($I'-5'$) и трещиноватой ($I-5$) средах при нормальной осмотической фильтрации; $t = 0,006$ ($1, 1'$); $t = 0,062$ ($2, 2'$); $t = 0,376$ ($3, 3'$); $t = 1,128$ ($4, 4'$); $t = 4,887$ ($5, 5'$)

Результаты численных экспериментов, выполненных для входных данных из [3], позволяют сделать следующие выводы о характере поведения полей избыточных напоров в трещиновато-пористых массивах, насыщенных соевыми

растворами и деформирующихся в условиях наличия нормальной или аномальной осмотической фильтрации.

1. Имеет место характерное общее подобие поведения кривых избыточных напоров в случае фильтрационной консолидации трещиновато-пористых и пористых сред (рис. 1, 2).

2. В случае аномальной осмотической фильтрации имеет место запаздывание рассеивания полей избыточных напоров в процессе консолидации насыщенного солевым раствором пористого массива по сравнению с соответствующим трещиновато-пористым, причем с течением времени запаздывание становится более выраженным у непроницаемой подошвы массива по сравнению с его кровлей (рис. 1).

3. В случае нормальной осмотической фильтрации характер распределения полей избыточных напоров в трещиновато-пористой и пористой средах существенно отличается от указанного выше: избыточные напоры около кровли массива, уменьшаясь, принимают отрицательные значения и на начальных стадиях уплотнения массива около его кровли наблюдается явление переуплотнения, а около подошвы массив недоуплотнен (нестабилизированное состояние массива). В дальнейшем, с течением времени, вся толща массива переходит в состояние переуплотнения при сохранении свойства запаздывания рассеивания поля избыточных напоров в пористой среде по сравнению с трещиноватой (рис. 2).

ОБ УЧЕТЕ ЭФФЕКТОВ ПАМЯТИ В КОНСОЛИДАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Переходя к построению соответствующей математической модели с учетом эффектов памяти, модифицируем закон фильтрации солевых растворов в трещинах (1) следующим естественным образом:

$$u_x + \tau_u \frac{\partial u_x}{\partial t} = -k_1 \frac{\partial H}{\partial x} + \nu \frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad (25)$$

где τ_u — время релаксации скорости фильтрации. Тогда из соотношений (2), (3), а также (25) получаем уравнение для избыточного напора в математической модели релаксационной (с учетом эффектов памяти) консолидации насыщенного солевым раствором трещиновато-пористой среды в виде

$$\begin{aligned} & \tau_1 \tau_u \frac{\partial^3 H}{\partial t^3} + (\tau_1 + \tau_u) \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = \\ & = C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(H + \tau_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(C_1 + \tau_2 \frac{\partial C_1}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Соответствующее уравнение для определения концентрации солевого раствора в трещинах на основании (6), (8), (25) запишем в виде

$$\sigma_1 \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (u_x C_1) + \gamma (C_2 - C_1), \quad (27)$$

где

$$u_x(x, t) = \left[u_x(x, 0) - \tau_u^{-1} \int_0^t \left(k_1 \frac{\partial H}{\partial x} - \nu \frac{\partial C_1}{\partial x} \right) e^{\frac{\tau}{\tau_u}} d\tau \right] e^{-\frac{t}{\tau_u}}. \quad (28)$$

Уравнение (10) для определения концентрации солей в блоках остается в рассматриваемом случае неизменным. Таким образом, математическая модель процесса фильтрационной консолидации насыщенного солевым раствором тре-

щииновато-пористого массива с учетом эффектов памяти базируется на соотношениях (26)–(28), (10). В рамках рассматриваемой математической модели динамика полей избыточных напоров при релаксационной консолидации трещиновато-пористого массива единичной мощности, расположенного на непроницаемом основании (в случае отсутствия градиента концентрации), описывается краевой задачей

$$\tau_1 \tau_u \frac{\partial^3 H}{\partial t^3} + (\tau_1 + \tau_u) \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(H + \tau_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) + f(x, t), \quad (29)$$

$$H(0, t) = 0, \quad H_x(1, t) = 0, \quad (30)$$

$$H(x, 0) = 1, \quad H_t(x, 0) = 0, \quad H_{tt}(x, 0) = 0, \quad (31)$$

где $f(x, t)$ — заданная функция источника и введены безразмерные переменные и параметры соотношениями (17). Методом пограничных функций построим асимптотическое приближение решения задачи для избыточного напора (29)–(31) в условиях слабых релаксационных свойств процесса.

Предположим, что имеет место слабо релаксационный процесс фильтрационной консолидации в деформируемой трещиновато-пористой среде при учете эффектов памяти. Считая параметр релаксации τ_u малым, положим $\tau_u = \tau'_u \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — малый параметр) и перепишем уравнение для напора в виде (знак «штрих» в дальнейшем опущен)

$$\varepsilon \tau_1 \tau_u \frac{\partial^3 H}{\partial t^3} + (\tau_1 + \varepsilon \tau_u) \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(H + \tau_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) + f(x, t). \quad (32)$$

Имея в виду установление взаимосвязи между моделью консолидации в трещиновато-пористой среде с учетом эффектов памяти и рассмотренной выше моделью консолидации в той же среде в рамках линейного закона фильтрации Дарси, будем искать асимптотику решения задачи (32), (30), (31) в виде суммы регулярной и пограничной частей

$$H(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (H_i(x, t) + v_i(x, \tau)) + R_n, \quad (33)$$

где $H_i(x, t)$ ($i = \overline{0, n}$) — члены регулярной части асимптотики, $v_i(x, \tau)$ ($i = \overline{0, n}$) — пограничные функции, служащие для описания погранслоя в окрестности точки $t = 0$, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ — погранслоевая переменная, R_n — остаточный член.

Уравнения для определения регулярной части асимптотики получаются применением стандартной процедуры метода возмущений [14] и имеют вид

$$\tau_1 \frac{\partial^2 H_0}{\partial t^2} + \frac{\partial H_0}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(H_0 + \tau_2 \frac{\partial H_0}{\partial t} \right) + f(x, t), \quad (34)$$

$$\tau_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} + \frac{\partial H_1}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(H_1 + \tau_2 \frac{\partial H_1}{\partial t} \right) - C_v \tau_u \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \left(H_0 + \tau_2 \frac{\partial H_0}{\partial t} \right) \dots, \quad (35)$$

Уравнения для определения погранслоевой части асимптотики $v_i(x, \tau)$ ($i = \overline{0, n}$) получаем в виде

$$\tau_u \frac{\partial^3 v_i}{\partial \tau^3} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial \tau^2} = \tilde{f}(v_{i-1}) \quad (i = \overline{0, n}), \quad (36)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \tilde{f}(v_{-1}) &\equiv 0, \quad \tilde{f}(v_0) = \tau_1^{-1} \left[C_v \tau_2 \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(v_0 + \tau_u \frac{\partial v_0}{\partial \tau} \right) \right], \\ \tilde{f}(v_k) &= \tau_1^{-1} \left[C_v \tau_2 \frac{\partial^3 v_k}{\partial x^2 \partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(v_k + \tau_u \frac{\partial v_k}{\partial \tau} \right) + C_v \frac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial x^2} \right] \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

С учетом вытекающих из (31) условий

$$\left. \frac{\partial^2 v_i}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} = - \left. \frac{\partial^2 H_{i-2}}{\partial t^2} \right|_{\tau=0} \quad (i = \overline{0, n}, \quad H_{-2} = H_{-1} = 0) \quad (37)$$

и требования, чтобы функции $v_i(x, \tau)$ были функциями погранслойного типа по переменной τ , решение соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения вида (36) при $i = \overline{0, 3}$ получаем в виде

$$\begin{aligned} v_0(x, \tau) &\equiv v_1(x, \tau) \equiv 0, \quad v_2(x, \tau) = - \left. \frac{\partial^2 H_0}{\partial t^2} \right|_{t=0} \tau_u^2 e^{-\frac{\tau}{\tau_u}}, \\ v_3(x, \tau) &= \tau_u^2 \left[\frac{1}{\tau_u} \int_0^\tau e^{\frac{s}{\tau_u}} \tilde{f}(v_2(x, s)) ds - \left. \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} \right|_{t=0} \right] e^{-\frac{\tau}{\tau_u}} + \\ &\quad + \int_\tau^{+\infty} (s - \tau + \tau_u) \tilde{f}(v_2(x, s)) ds. \end{aligned}$$

Следует отметить, что основной вклад в (33) вносит функция H_0 , а погранслойные поправки начинаются с членов порядка ε^2 . Поскольку главный член регулярной части асимптотики H_0 является решением краевой задачи для уравнения (34), полученного в рамках модели консолидации в трещиновато-пористой среде в предположениях выполнимости классического линейного закона фильтрации, рассматриваемая модель релаксационной (с учетом эффектов памяти) консолидации насыщенной соевым раствором трещиновато-пористой среды в определенном смысле «близка» к изложенной выше соответствующей модели, базирующейся на законе Дарси. Уточняя сказанное, заметим, что, поскольку функция типа погранслоя $v_2(x, \tau)$ «подправляет» решение $H_0(x, t)$ в момент времени $t \in (0, \varepsilon)$, затухая экспоненциально на больших промежутках времени, результаты моделирования консолидационного процесса в рамках модели релаксационной консолидации могут существенно отличаться от соответствующего моделирования консолидационного процесса в условиях закона Дарси лишь для малых значений времени t . Отсюда следует, что учет эффектов памяти в консолидационном процессе в трещиновато-пористой среде оправдан преимущественно на начальной стадии протекания данного процесса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты проведенных в рамках предложенных математических моделей численных экспериментов свидетельствуют о том, что наличие наблюдаемых в процессе расчетов нестабилизированных состояний у деформируемого трещиновато-пористого массива, насыщенного соевым раствором, может отрицательно повлиять на устойчивость гидротехнических, промышленных или гражданских сооружений и привести к негативным экономическим и экологическим последствиям. Отметим также, что приведенное выше решение прямой задачи неклассической теории фильтрационной консолидации насыщенной соевым раствором трещиновато-пористой среды может быть непосредственно использовано в рассматриваемых в рамках имитационного моделирования [15] вопросах оптимального управления консолидационными процессами в деформируемых массивах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. — Київ: Наук. думка, 2007. — 292 с.
2. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. — Київ: Наук. думка, 2005. — 283 с.
3. Власик А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації солевих розчинів. — Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. — 211 с.
4. Власик А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації солевих розчинів в неізотермічних умовах. — Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. — 416 с.
5. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. — М.: Высш. шк., 1991. — 447 с.
6. Булавацький В.М., Скопецький В.В. Системний підхід к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 6. — С. 71–79.
7. Булавацький В.М., Скопецький В.В. Обобщенная математическая модель динамики консолидационных процессов с релаксацией // Там же. — 2008. — № 5. — С. 25–34.
8. Скопецький В.В., Булавацький В.М. Математичне моделювання процесу фільтраційної консолідації масивів, насичених солевими розчинами за умов релаксаційної фільтрації // Доп. НАН України. — 2006. — № 2. — С. 55–61.
9. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рижик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984. — 211 с.
10. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. — 1960. — 24, № 5. — С. 852–864.
11. Глуценко А.А. Один приближенный метод решения нестационарных задач математической физики // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1978. — № 6. — С. 490–494.
12. Polozhii G.N. The method of summary representation for numerical solution of problems of mathematical physics. — Oxford: Pergamon Press, 1965. — 283 p.
13. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
14. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.
15. Антонов А.В. Системный анализ. — М.: Высш. шк., 2004. — 454 с.

Поступила 22.10.2009