УДК 519.872

А.З. МЕЛИКОВ, Л.А. ПОНОМАРЕНКО

МНОГОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ЭРЛАНГА С РАНДОМИЗИРОВАННОЙ СТРАТЕГИЕЙ ДОСТУПА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В КОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЯХ

Ключевые слова: *многомерная модель Эрланга, рандомизированная стратегия доступа, показатели качества обслуживания, метод расчета, коммуникационные сети.*

ВВЕДЕНИЕ

Модель А.К. Эрланга [1] более ста лет широко используется для анализа различных технических систем обслуживания. Ее научная ценность существенно возросла после появления классического результата И.Н. Коваленко [2], доказавшего инвариантность стационарного распределения этой модели относительно вида функции распределения времени обслуживания вызовов при фиксированном среднем. В дальнейшем это подтвердили и другие авторы (см., например, [3] и список литературы к этой статье).

Особенно целесообразно применение указанной модели в коммуникационных сетях [4]. В настоящее время активно исследуются модели с разнотипными вызовами, т.е. многомерные модели Эрланга, поскольку современные сети мультисервисные. Интенсивно исследуется также более сложный класс многомерных моделей — многоскоростные модели Эрланга. Достаточно подробный список литературы по этим моделям можно найти в работах [5, 6], а также в монографиях [7–9].

Показатели качества обслуживания (Quality of Service — QoS) в многомерных моделях Эрланга существенным образом зависят от принятой стратегией доступа (Call Admission Control — CAC) разнотипных вызовов в каналы системы. Эти стратегии обычно вводятся в целях удовлетворения заданных ограничений на показатели QoS разнотипных вызовов и коэффициента использования дефицитных ресурсов (каналов) системы. Иногда критерием качества являются экономические показатели, связанные с работой изучаемой модели. Некоторые постановки задач нахождения оптимальной CAC и методы их решения можно найти в [5–11].

В настоящей статье предложен аналитический подход к расчету показателей QoS для многомерной модели Эрланга с рандомизированной CAC при различных средних времен обслуживания разнотипных вызовов.

1. ОПИСАНИЕ СТРАТЕГИИ ДОСТУПА И МЕТОД РАСЧЕТА

Рассматривается система обслуживания, описываемая многомерной моделью Эрланга $M_K|M_K|N|N$, в которой вызовы i-го типа (i-вызовы) имеют интенсивность поступления λ_i, а среднее время их обслуживания равно μ_i^{-1}, $i=1,\ldots,K$. В данной системе используется рандомизированная стратегия доступа. Для этого определяется матрица доступа размера $K \times N$, элементы которой задают правила приема разнотипных вызовов в зависимости от их типа и количества занятых каналов. Вводятся вероятности $\alpha_i(n)$, $i=1,\ldots,K$, $n=0,\ldots,N-1$, при этом $\alpha_i(N)=0$ для любого $i=1,\ldots,K$. Величина $\alpha_i(n)$ обозначает вероятность принятия i-вызова на обслуживание, если в момент его поступления число занятых каналов системы равно n; с дополнительной вероятностью $1-\alpha_i(n)$ этот вызов теряется. Отметим, что из данной стратегии в частных случаях можно получить ряд известных стратегий доступа. Рассмотрим некоторые из них.

1. Если $\alpha_i(n)=1$ для любого $i=1,\ldots,K$ и $n=0,\ldots,N-1$, то получается полнодоступная стратегия доступа (Complete Sharing — CS).

2. Пусть параметры $\alpha_i(n)$ определяются следующим образом:

$$\alpha_i(n)=\begin{cases}1, & \text{если } n\le N_i,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \tag{1}$$

где $1\le N_K\le N_{K-1}\le\ldots\le N_1=N$, $i=1,\ldots,K$.

Тогда при определенных значениях параметров N_i, $i=1,\ldots,K$, из (1) получаются различные многопараметрические САС, основанные на схеме резервирования каналов, которые широко используются в коммуникационных сетях (см. [12–14] и списки литературы к этим статьям).

Проблема состоит в нахождении основных показателей QoS данной системы — вероятностей потери вызовов каждого типа и коэффициента использования каналов.

Перейдем к описанию предложенного метода решения поставленной нами задачи. Пусть состояние системы описывается K-мерным вектором $\boldsymbol{m}=(m_1,\ldots,m_K)$, где m_i указывает число i-вызовов в системе, $i=1,\ldots,K$. Тогда фазовое пространство состояний (ФПС) соответствующей K-мерной цепи Маркова (ЦМ) определяется так:

$$S:=\left\{\boldsymbol{m}:m_i=\overline{0,N},\ \sum_{i=1}^{K}m_i\le N\right\}. \tag{2}$$

Здесь и ниже запись $a:=b$ означает, что a определяется выражением b. Согласно введенной стратегии доступа неотрицательные элементы Q-матрицы данной цепи определяются из следующих соотношений:

$$q(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}')=\begin{cases}\lambda_i\alpha_i(n), & \text{если } \sum_{i=1}^{K}m_i=n,\ \boldsymbol{m}'=\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_i,\\ m_i\mu_i, & \text{если } \boldsymbol{m}'=\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e}_i,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{e}_i$ — i-й ортвектор K-мерного евклидового пространства, $i=1,\ldots,K$.

При любых положительных значениях параметров входящих трафиков все состояния являются сообщающимися и, следовательно, система является эргодической. Стационарную вероятность состояния $\boldsymbol{m}\in S$ обозначим $p(\boldsymbol{m})$. Искомые показатели QoS определяются стационарными вероятностями состояний. Пусть P_i — вероятность потери i-вызовов, $i=1,\ldots,K$, и N_{av} указывает среднее число занятых каналов соты. Тогда с помощью теоремы PASTA [15] получаем, что указанные вероятности потери определяются следующим образом:

$$P_i:=\sum_{n=0}^{N}(1-\alpha_i(n))\sum_{\boldsymbol{m}\in S_n}p(\boldsymbol{m}), \tag{4}$$

где $S_n:=\left\{\boldsymbol{m}\in S:\sum_{i=1}^{K}m_i=n\right\}$, $n=0,1,\ldots,N$.

Среднее число занятых каналов системы запишем так:

$$N_{av}:=\sum_{n=1}^{N}n\sum_{\boldsymbol{m}\in S_n}p(\boldsymbol{m}). \tag{5}$$

Основная проблема при расчете характеристик (4) и (5) состоит в вычислении $p(\boldsymbol{m})$, $\boldsymbol{m}\in S$, так как для данной модели не удается найти явное решение соответствующей системы уравнений глобального равновесия (СУГР) для стационарных вероятностей состояний. Это затрудняет решение рассматриваемой проблемы при больших размерностях ФПС (2).

В связи с этим здесь предлагается другой подход, основанный на использовании того факта, что показатели QoS (4) и (5) легко определяются через вероятности укрупненных состояний S_n, $n = 0, 1, \dots, N$, которые объединяют микросостояния из ФПС (2) с одинаковым числом занятых каналов. Иными словами, нужные нам характеристики можно определить с помощью следующих вероятностей укрупненных состояний:

$$\pi(n) := \sum_{\boldsymbol{m} \in S_n} p(\boldsymbol{m}), \quad n = 0, 1, \dots, N. \tag{6}$$

Очевидно, что

$$\sum_{n=0}^{N} \pi(n) = 1. \tag{7}$$

Итак, с учетом (4)–(7) выполним следующие соотношения:

$$P_i := \sum_{n=0}^{N} (1 - \alpha_i(n)) \pi(n), \quad i = 1, \dots, K; \tag{8}$$

$$N_{av} := \sum_{n=1}^{N} n\pi(n). \tag{9}$$

Таким образом, без определения стационарного распределения исходной модели можно вычислить показатели QoS (4), (5), если удается определить величины $\pi(n)$, $n = 0, 1, \dots, N$. С этой целью рассмотрим следующее расщепление ФПС (2):

$$S = \bigcup_{n=0}^{N} S_n, \quad S_n \bigcap S_{n'} = \varnothing, \quad n \neq n', \tag{10}$$

где множества S_n определены выше (см. формулу (4)), т.е. класс состояний S_n содержит такие микросостояния $\boldsymbol{m} \in S$, в которых число занятых каналов равно n, $n = 0, 1, \dots, N$.

Утверждение 1. Если в системе удовлетворяется условие локального баланса, то стационарные вероятности укрупненных состояний определяются так:

$$\pi(n) = \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{K} \rho_j \alpha_j(i) \right) \pi(0), \quad n = 1, \dots, N, \tag{11}$$

где $\pi(0) = \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{K} \rho_j \alpha_j(i) \right) \right)^{-1}$, $\rho_i := \lambda_i / \mu_i$, $i = 1, \dots, K$. Здесь и в дальнейшем принимается, что $\sum_{i=a}^{b} x_i := 0, \prod_{i=a}^{b} x_i := 1$, если $a > b$.

Для доказательства утверждения потребуется следующая лемма.

Лемма. Если в системе удовлетворяется условие локального баланса, то имеют место соотношения

$$\sum_{i=1}^{K} \rho_i \alpha_i(n-1) \pi(n-1) = n\pi(n), \quad n = 1, \dots, N. \tag{12}$$

Доказательство. Используем схему, предложенную в работе [16]. Поскольку в системе удовлетворяется условие локального баланса, то с учетом соотношений (3) получаем, что система уравнений локального равновесия для состояний $m \in S_n$, $n = 1, \dots, N$, имеет следующий вид:

$$\rho_j \alpha_j(n-1) p(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{e}_i) = \begin{cases} m_j p(\boldsymbol{m}), & \text{если } i = j, \\ (m_j + 1) p(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j), & \text{если } i \neq j. \end{cases} \tag{13}$$

Суммируя обе части (13) по всем возможным $i \in \{1, \ldots, K\}$ и $\boldsymbol{m} \in S_n$ и учитывая, что состояния $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{m} - \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j$ входят в один и тот же класс S_n, находим

$$\sum_{i,j=1}^{K} \sum_{\boldsymbol{m} \in S_n} \rho_j \alpha_j (n-1) p(\boldsymbol{m} - e_i) = \sum_{i=1}^{K} \sum_{\boldsymbol{m} \in S_n} m_i \, p(\boldsymbol{m}). \tag{14}$$

Левую часть (14) представим следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^{K} \sum_{\boldsymbol{m} \in S_n} \rho_j \alpha_j (n-1) p(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{K} \rho_j \alpha_j (n-1) \sum_{i=1}^{K} \sum_{\boldsymbol{m} \in S_n} p(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{e}_i) =$$
$$= \sum_{j=1}^{K} \rho_j \alpha_j (n-1) \pi(n-1). \tag{15}$$

В последних преобразованиях при перегруппировке членов суммы существенным образом учитывалось соотношение (6), а также следующий факт: для всех состояний $\boldsymbol{m} \in S_n$, $n = 0, 1, \ldots, N$, величина $\sum_{j=1}^{K} \rho_j \alpha_j (n)$ одинаковая.

Внутреннюю сумму в правой части (14) преобразуем следующим образом:

$$\sum_{\boldsymbol{m} \in S_n} m_i \, p(\boldsymbol{m}) = \sum_{\boldsymbol{m} \in S_n} m_i \frac{p(\boldsymbol{m})}{\pi(n)} \pi(n). \tag{16}$$

Из определения условной вероятности имеем

$$P(\boldsymbol{m} \mid n) = P\left(\boldsymbol{m} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{K} m_i = n \right) = \begin{cases} \dfrac{p(\boldsymbol{m})}{\pi(n)}, & \text{если } \boldsymbol{m} \in S_n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{17}$$

Тогда из (16) с учетом (17) получим

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{\boldsymbol{m} \in S_n} m_i \, p(\boldsymbol{m}) = \sum_{i=1}^{K} \left(\sum_{\boldsymbol{m} \in S_n} m_i P(\boldsymbol{m} \mid n) \right) \pi(n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{K} E(m_i | n) \pi(n) = E\left(\sum_{i=1}^{K} m_i \middle| n \right) \pi(n) = n\pi(n), \tag{18}$$

где $E(\cdot | \cdot)$ — знак условного математического ожидания.

Следовательно, с учетом (14), (15) и (18) заключаем, что справедливы соотношения (12).

Доказательство утверждения 1. Из соотношений (12) с учетом условия нормировки (7) убеждаемся в справедливости формул (11).

Как отмечалось выше, из предложенной стратегии в частных случаях можно получить ряд классических стратегий доступа. Действительно, если в формулах (11) положить $\alpha_i(n) = 1$ для любого $i = 1, \ldots, K$ и $n = 0, \ldots, N-1$, то получим известное распределение для числа занятых каналов в классической модели Эрланга:

$$\pi(n) = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{\rho^i}{i!} \right), \quad n = 0, 1, \ldots, N; \quad \rho := \sum_{i=1}^{K} \rho_i. \tag{19}$$

После выполнения определенных алгебраических преобразований можно убедиться, что для многопараметрической САС (см. (1)) стационарное распределение укрупненных состояний вычисляется по формулам

$$\pi(n) = \frac{\pi(0)}{n!} \prod_{i=m+1}^{K} \left(\rho - \sum_{j=i}^{K} \rho_j \right)^{N_i - N_{i+1}} \left(\rho - \sum_{l=m+1}^{K} \rho_l \right)^{n - N_m}, \tag{20}$$

$$\text{если } N_{m+1} < n < N_m, \ m = 1, \ldots, K,$$

где $N_{K+1} := 0$ и $\pi(0)$ находится из условия нормировки (7).

Теперь предположим, что в системе не удовлетворяется условие локального баланса. Тогда можно использовать следующий подход. С учетом соотношений (3) получаем, что СУГР для состояний $\boldsymbol{m} \in S_{n-1}$ имеет следующий вид:

$$\left(\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \alpha_i (n-1) + \sum_{i=1}^{K} m_i \mu_i \right) p(\boldsymbol{m}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \alpha_i (n-2)\, p(\boldsymbol{m} - e_i) + \sum_{i=1}^{K} (m_i + 1)\, \mu_i \, p(\boldsymbol{m} + e_i). \qquad (21)$$

Для простоты записи здесь предполагается, что фигурирующие в (21) состояния $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m} - \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{e}_i$ входят в ФПС (2); в противном случае соответствующие члены приравниваются нулю.

Суммируя обе части (21) по всем возможным $\boldsymbol{m} \in S_{n-1}$, после приведения подобных членов с учетом структуры СУГР находим

$$\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \alpha_i (n-1) \sum_{\boldsymbol{m} \in S_{n-1}} p(\boldsymbol{m}) = \sum_{i=1}^{K} \sum_{\boldsymbol{m} \in S_n} m_i \mu_i \, p(\boldsymbol{m}). \qquad (22)$$

Уравнение (22) с учетом (6) перезапишем так:

$$\pi(n-1) \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \alpha_i (n-1) = \sum_{i=1}^{K} \sum_{\boldsymbol{m} \in S_n} m_i \mu_i \, p(\boldsymbol{m}). \qquad (23)$$

Из (23) при $\mu_i = \mu_j$, $i, j = 1, \ldots, K$, получаются уравнения (12). Даже в случаях, когда интенсивности обслуживания разнотипных вызовов отличаются несущественно, для расчета показателей QoS системы может использоваться описанная выше вычислительная процедура. А в случаях, когда интенсивности обслуживания разнотипных вызовов существенно отличаются один от другого, можно использовать различные схемы «унификации» («усреднения») их значений, а затем — предложенную процедуру. Так, с практической точки зрения наибольший интерес представляет использование следующих трех общих значений:

1) $\mu := \max\{\mu_1, \ldots, \mu_K\}$;
2) $\mu := \min\{\mu_1, \ldots, \mu_K\}$;
3) $\mu = \dfrac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{K} \rho_i$, где $\Lambda := \sum_{i=1}^{K} \lambda_i$.

Отметим, что для каждой схемы (этих и других) «усреднений» точность используемых приближений можно исследовать численно, так как аналитического решения не существует. При этом для моделей малой размерности точное решение может быть найдено и из СУГР.

2. ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛИ В КОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЯХ

Изучаемая здесь модель широко применяется в системах передачи и обработки разнотипных сообщений. Ниже рассматривается лишь два примера и некоторые частные случаи.

Сначала обратимся к модели беспроводной сети передачи речевых вызовов и вызовов данных [13]. Краткое описание данной модели состоит в следующем.

Изолированная сота мультисервисной сети обработывает речевые вызовы и вызовы данных. В ней различается четыре типа вызовов: хендовер речевые вызовы (hv-вызовы), новые речевые вызовы (ov-вызовы), хендовер-вызовы данных (hd-вызовы) и новые вызовы данных (od-вызовы). Каждая сота имеет $N > 1$ радиоканалов. Они используются совместно пуассоновскими потоками hv-, ov-, hd- и od-вызовов. Интенсивность x-вызовов равна λ_x, $x \in \{hv, ov, hd, od\}$. Средняя интенсивность обработки одного речевого вызова (нового или хендовер) равна μ_v, а соответствующий показатель для вызовов данных (новых или хендовер) равен μ_d.

В этой системе вводится следующая многопараметрическая стратегия доступа. Определяется три параметра: N_{od}, N_{hd} и N_{ov}, удовлетворяющие неравенству $0 < N_{od} \le N_{hd} \le N_{ov} \le N$. Для предложенной стратегии применяются следующие правила приема разнотипных вызовов:

• если в момент поступления *x*-вызова число занятых каналов системы не больше N_x, то он принимается на обслуживание; в противном случае получает отказ, $x \in \{hd, od, ov\}$;

• если в момент поступления hv-вызова имеется хотя бы один свободный канал системы, то он принимается на обслуживание; в противном случае получает отказ.

Ранее эта модель с использованием различных численных методов исследовалась в работах [13, 17]. Здесь с применением предложенного выше подхода можно получить аналитические результаты для рассмотренной модели. Действительно, данная стратегия доступа является частным случаем описанной выше рандомизированной стратегии, если в ней положить $K = 4$ и параметры $\alpha_i(n)$ определить аналогично (1). Тогда с применением алгоритма (21) можно доказать, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Стационарные вероятности укрупненных состояний в данной модели при $\mu_v = \mu_d$ определяются так:

$$\pi(n) = \begin{cases} \dfrac{\pi(0)}{n!}\rho^n, \text{ если } 1 \le n \le N_{od} - 1, \\ \dfrac{\pi(0)}{n!}\rho^{N_{od}}(\rho - \rho_{od})^{m - N_{od}}, \text{ если } N_{od} \le n \le N_{hd} - 1, \\ \dfrac{\pi(0)}{n!}\rho^{N_{od}}(\rho - \rho_{od})^{N_{hd} - N_{od}}\rho_v^{m - N_{hd}}, \text{ если } N_{hd} \le n \le N_{ov} - 1, \\ \dfrac{\pi(0)}{n!}\rho^{N_{od}}(\rho - \rho_{od})^{N_{hd} - N_{od}}\rho_v^{N_{ov} - N_{hd}}\rho_{hv}^{n - N_{ov}}, \text{ если } N_{ov} \le n \le N. \end{cases} \tag{24}$$

Здесь $\rho_{od} := \lambda_{od} / \mu_d$, $\rho_{hd} := \lambda_{hd} / \mu_d$, $\rho_{ov} := \lambda_{ov} / \mu_v$, $\rho_{hv} := \lambda_{hv} / \mu_v$, $\rho_v := \rho_{ov} + \rho_{hv}$, $\rho_d := \rho_{od} + \rho_{hd}$, $\rho := \rho_v + \rho_d$.

Далее вероятности потери разнотипных вызовов определяются так:

$$P_x = \sum_{n=N_x}^{N} \pi(n), \ x \in \{od, hd, ov, hv\}, \ N_{hv} := N. \tag{25}$$

Среднее число занятых каналов соты определяется с помощью (9). Из формул (9), (24) и (25) видно, что процесс вычисления показателей QoS существенно упрощается по сравнению с численными методами [13, 17]. Отметим высокую точность предложенных в работе [17] приближенных алгоритмов. Напомним, что указанные алгоритмы применимы для моделей сот, в которых выполняются следующие условия: $\lambda_v >> \lambda_d$, $\mu_v >> \mu_d$.

Частным случаем данной модели является моносервисная модель, изученная в [14]. В ней обслуживаются пуассоновские потоки новых и хендовер-вызовов одного класса сообщений. Интенсивность *x*-вызовов равна λ_x, $x \in \{o, h\}$. Если в момент поступления *h*-вызова имеется хотя бы один свободный канал, то он принимается, и для его обслуживания назначается один из свободных каналов, в противном случае *h*-вызов теряется. Поступивший *o*-вызов принимается с вероятностью $\alpha(n)$, если в момент поступления такого вызова число занятых каналов равно n, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, $\alpha(N) := 0$; с дополнительной вероятностью $1 - \alpha(n)$ поступивший *o*-вызов блокируется. Интенсивность обслуживания новых (хендовер) заявок равна μ_o (μ_h), при этом, вообще говоря, $\mu_o \ne \mu_h$.

На основе предложенного метода получим следующий алгоритм вычисления значений искомых показателей QoS:

$$P_h = \pi(N), \tag{26}$$

$$P_0 = \sum_{n=0}^{N}(1-\alpha(n))\pi(n), \tag{27}$$

где

$$\pi(n) = \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha(i)\rho_o + \rho_h)\pi(0),\ \pi(0) = \left(\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}(\alpha(j)\rho_o + \rho_h)\right)^{-1}. \tag{28}$$

Исходя из некоторых эвристических соображений, формулы (26)–(28) были предложены в работе [14], однако там авторы предполагали, что разработанный выше алгоритм приближенный. Здесь мы показали, что он точный.

Теперь рассмотрим модель интегральной сети передачи узкополосных речевых вызовов (v-вызовы) и широкополосных вызовов данных (d-вызовы) [9]. Краткое описание данной модели состоит в следующем.

Рассматриваемая интегральная сеть передачи речи и данных содержит $N > 1$ идентичных и параллельных каналов. Трафик узкополосных v-вызовов описывается пуассоновским законом со средним λ_v, при этом каждый вновь поступивший v-вызов требует для обслуживания (передачи) лишь один канал. Трафик широкополосных d-вызовов представляет собой пуассоновский поток со средним λ_d. При этом каждый вновь поступивший d-вызов требует одновременно b, $1 < b < N$, каналов, и все каналы одновременно начинают и завершают обслуживание данного вызова. Время обслуживания v-вызовов (d-вызовов) имеет экспоненциальное распределение со средним μ_v (μ_d). Предложенная стратегия доступа определяется следующим образом. Если в момент поступления d-вызова число свободных каналов не меньше b, то он принимается на обслуживание; в противном случае поступивший вызов блокируется с вероятностью единица. Если в момент поступления v-вызова число занятых каналов равно n, то он принимается с вероятностью $\alpha(n)$, $0 \le \alpha(n) \le 1$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, а с дополнительной вероятностью блокируется; при этом $\alpha(N) := 0$. При конкретных значениях введенных параметров $\alpha(n)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, можно получить ряд известных стратегий доступа [9].

Утверждение 3. Стационарные вероятности укрупненных состояний в рассмотренной модели при $\mu_v = \mu_d$ определяются так:

$$\pi(n) = r_n \pi(0),\ \ n = 0, 1, \ldots, N, \tag{29}$$

где $\pi(0) = \left(\sum_{n=0}^{N} r_n\right)^{-1}$, а параметры r_n, $n = 0, 1, \ldots, N$, определяются из следующих рекуррентных соотношений:

$$r_n = \begin{cases} \dfrac{\rho_v^n}{n!}\cdot\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}\alpha(j), & \text{если } 0 \le n \le b-1, \\ \dfrac{1}{n}(\rho_v \alpha(n-1) r_{n-1} + b\rho_d r_{n-b}), & \text{если } b \le n \le N, \end{cases} \tag{30}$$

где $\rho_x := \lambda_x / \mu_x$, $x \in \{v, d\}$.

Следовательно, с учетом (30) находим, что искомые показатели QoS определяются из следующих соотношений:

$$P_v = \pi(0)\sum_{n=0}^{N}(1-\alpha(n))\, r_n; \quad P_d = r_N \pi(0); \qquad N_{av} = \pi(0)\sum_{n=1}^{N} n r_n.$$

Отметим, что рассмотренные здесь формулы позволяют без особых вычислительных трудностей осуществить достоверный анализ показателей QoS изучаемых моделей любой размерности в любом диапазоне изменения значений нагрузочных параметров разнотипных трафиков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложен аналитический подход к анализу многомерной модели Эрланга, в которой принята рандомизированная стратегия доступа. Этот подход легко адаптируется и для многоскоростной модели Эрланга. В отличие от известных численных методов он не требует генерации большого фазового пространства состояний модели, и, следовательно, нахождение искомых показателей QoS осуществляется с помощью явных формул.

Аналогичная модель в частном случае, когда все вызовы идентичные по времени обслуживания, исследовалась в работе [12]. Из результатов настоящей статьи легко получить результаты, изложенные в [12]. Применение результатов в коммуникационных сетях позволяет существенно облегчить решение ряда задач по их анализу и оптимизации [13]. Доказано, что полученные ранее результаты для беспроводных сетей связи, которые считались приближенными [14], на самом деле являются точными. Они позволяют формулировать и решать различные задачи оптимизации многомерной модели Эрланга, в частности задачи выбора надлежащих значений параметров введенных CAC, поддерживая заданный уровень качества обслуживания разнотипных вызовов. Эти задачи могут быть предметом дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erlang A.K. The theory of probabilities and telephone conversations // Nyt Tidsskrift for Matematik. — 1909. — **B-20**. — P. 33–39.
2. Kovalenko I.N. On independence of stationary distributions of the form of the service time distribution law // Probl. Pered. Inform. — 1963. — N 11. — P. 104–113.
3. Burman D.Y., Lehoczky J.P., Lim Y. Insensitivity of blocking probabilities in a circuit-switched network // J. Appl. Probab. — 1984. — **21**, N 4. — P. 850–859.
4. Iversen V.B. Handbook "Teletraffic Engineering and Network Planning". — Denmark, Lyndby: Techn. Univ. of Denmark, 2010. — 623 p.
5. Kelly F.P. Loss networks // Ann. Appl. Probab. — 1991. — **1**, N 3. — P. 319–378.
6. Melikov A.Z. Computation and optimization methods for multi-resource queues // Cybernetics and Systems Analysis. — 1996. — **32**, N 6. — P. 821–836.
7. Ross K.W. Multi-service loss models for broadband telecommunications networks. — New York: Springer-Verlag, 1995. — 343 p.
8. Башарин Г.П. Лекции по математической теории телетрафика. — М.: Изд-во РУДН, 2009. — 341 с.
9. Меликов А.З., Пономаренко Л.А., Паладюк В.В. Телетрафик. Модели, методы, оптимизация. — Киев: ИПК «Политехника», 2007. — 256 с.
10. Moretta B., Ziedins I. Admission controls for Erlang's loss system with service times distributed as a finite sum of exponential random variables // J. Appl. Math. and Decision Sci. — 1998. — **2**, N 2. — P. 119–132.
11. Choi S., Kwon T., Choi Y., Naghshineh M. Call admission control for multimedia services in mobile cellular networks: A Markov decision approach // Proc. 5th IEEE Comp. Com. Symp., France, 2000. — P. 594–599.
12. Fang Y. Thinning schemes for call admission control in wireless networks // IEEE Trans. Comp. — 2003. — **52**, N 5. — P. 685–687.
13. Ogbonmwan S.E., Wei L. Multi-threshold bandwidth reservation scheme of an integrated voice/data wireless network // Comp. Com. — 2006. — **29**, N 9. — P. 1504–1515.
14. Fang Y., Zhang Y. Call admission control schemes and performance analysis in wireless mobile networks // IEEE Trans. Vehicular Technology. — 2002. — **51**, N 2. — P. 371–382.
15. Wolff R.W. Poisson arrivals see time averages // Oper. Res. — 1992. — **30**, N 2. — P. 223–231.
16. Kaufman J.S. Blocking in shared resource environment // IEEE Trans. Com. — 1981. — **10**, N 2. — P. 1474–1481.
17. Kim C.S., Melikov A.Z., Ponomarenko L.A. Numerical investigation of a multi-threshold access strategy in multiservice cellular wireless networks // Cybernetics and Systems Analysis. — 2009. — **45**, N 5. — P. 680–691.

Поступила 07.06.2010