УДК 519.872

И.Н. КОВАЛЕНКО, И.Н. КУЗНЕЦОВ

ОЦЕНКА ВКЛАДА НЕМОНОТОННЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ОТКАЗ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ НА ПЕРИОДЕ ЗАНЯТОСТИ

Ключевые слова: *система обслуживания, смесь экспоненциальных распределений, марковский граф переходов, монотонный отказ, асимптотическая оценка.*

Асимптотический анализ является одним из основных подходов, применяемых в математической теории надежности, для получения вероятностных характеристик высоконадежной системы. Первые результаты по асимптотическому анализу дублированных систем принадлежат Б.В. Гнеденко [1, 2]. Весомый вклад в развитие асимптотических методов анализа высоконадежных систем, поведение которых описывается регенерирующим процессом, внесли А.Д. Соловьев и его ученики [3–5]. Существенно более общие схемы рассматривали И.Н. Коваленко [6, 7], В.В. Анисимов [8] и многие другие.

В схеме регенерирующего процесса была доказана асимптотическая экспоненциальность распределения времени до первого момента потери требования в системе обслуживания [3]. Параметр экспоненциального распределения зависит как от среднего времени интервала занятости, так и от вероятности q отказа системы на интервале занятости — промежутке времени, когда в системе присутствует хотя бы одно требование. Если средняя продолжительность интервала занятости легко аппроксимируется средним временем обслуживания одного требования, то вычисление вероятности q является весьма сложной задачей [9–12]. В основу практически всех асимптотических методов оценки q положен принцип монотонных отказов, сформулированный в работе [13]. При сохранении высокой точности оценки данный подход позволяет существенно упростить расчеты надежности систем.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем принцип монотонных отказов. Вводится понятие монотонного отказа (здесь и в далее под отказом системы обслуживания понимаем потерю требования). Монотонным называется такой отказ, при котором с момента начала интервала занятости и до отказа системы не было обслужено ни одно из требований, т.е. на протяжении всего интервала занятости наблюдался монотонный рост числа требований в системе. Все остальные отказовые траектории являются немонотонными. Следовательно, $q = q_0 + q_1$, где q_0 и q_1 — вероятности монотонного и немонотонного отказов соответственно. Для высоконадежной системы типичной является такая ситуация: если в интервале занятости произошел отказ системы, то с вероятностью, близкой к единице, этот отказ произошел по монотонной траектории, т.е.

$$q_1 = o(q_0). \tag{1}$$

Оценить вероятность q_0 намного легче, чем q_1. Усилия многих исследователей были направлены на выявление условий, гарантирующих выполнение соотношения (1). Остановимся на двух наиболее значимых результатах.

Рассмотрим систему $M / G / m / r$ (пуассоновский поток с интенсивностью λ; m — число обслуживающих приборов; r — число мест для ожидания; время обслуживания имеет функцию распределения $B_\varepsilon(x)$, зависящую от малого параметра $\varepsilon > 0$; обслуживание проводится в порядке поступления; отказ системы понимается как потеря требования).

Обозначим $\alpha_k(\varepsilon) = \int\limits_0^\infty x^k dB_\varepsilon(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ В работе [9] доказано, что условие

$$\frac{\alpha_{m+r+1}(\varepsilon)}{\alpha_1^{m+r}(\varepsilon)} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 \tag{2}$$

является достаточным для выполнения соотношения (1).

В работе [11] удалось существенно понизить моментные условия, в частности получена верхняя оценка $\bar{q}_1$ для q_1:

$$q_1 \le \bar{q}_1 = O(\lambda^{r+1} \alpha_1^{m-1}(\varepsilon) \alpha_{r+2}(\varepsilon)). \tag{3}$$

В настоящей статье исследуется система $M / G / m / r$, в которой распределение длительности обслуживания является смесью двух экспоненциальных распределений, т.е.

$$B(x) = u \cdot (1 - e^{-\mu_1 x}) + v \cdot (1 - e^{-\mu_2 x}), \ u + v = 1, \ \mu_1 > 0, \ \mu_2 > 0.$$

Предполагая, что $\mu_1 \to \infty$, $v \to 0$, $\lambda = \text{const}$, $\mu_2 = \text{const}$, в статье получены необходимые и достаточные условия для выполнения соотношения (1). Проведено также сравнение этих условий с достаточными условиями, полученными в теоремах А.Д. Соловьева и И.Н. Коваленко (соотношения (2) и (3)). Кроме того, определены условия, при выполнении которых $q_0 = o(q_1)$, т.е. преимущественный вклад в отказ системы вносят немонотонные траектории.

МАРКОВСКИЙ ГРАФ ПЕРЕХОДОВ

Поведение системы на интервале занятости описывается двухмерной цепью Маркова, состояния которой задаются в виде $v = (s, k)$, где s — общее число требований в системе, k — число требоваий с длительностью обслуживания I типа (с интенсивностью обслуживания μ_1), находящихся в процессе обслуживания. Множество всех возможных состояний задается в виде

$$E = \{(s, k) : 0 \le s \le m + r + 1, \ 0 \le k \le \min(m, s)\}.$$

Состояние $(0,0)$ является начальным, а все состояния (s,k) при $s=m+r+1$ — отказовыми (поглощающими). При этом q_0 — вероятность перехода из $(0,0)$ в множество отказовых состояний по одной из траекторий с монотонно возрастающей первой компонентой, а q_1 — вероятность отказа системы по одной из отказовых траекторий (естественно, без возвращения в состояние $(0,0)$). Марковский граф переходов для рассматриваемой системы приведен на рис. 1 (переходы, связанные с изменениями числа требований I типа, изображены стрелками по горизонтали, соответственно поступление или окончание обслуживания требований II типа показано стрелками по вертикали).

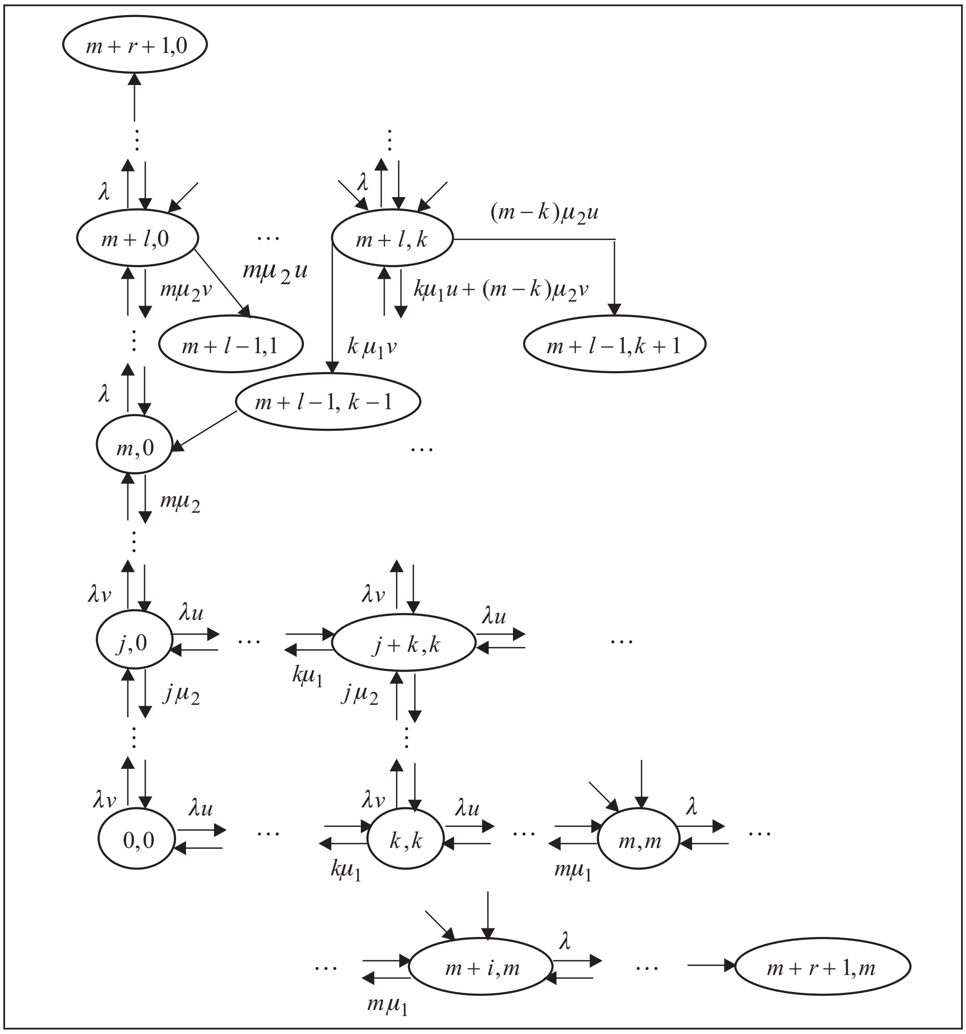

Рис. 1

Марковский граф переходов позволяет определить вероятности перехода цепи Маркова (вероятность перехода из (s,k) в (s_1,k_1) обозначим $\mathbf{P}\{(s,k)\to(s_1,k_1)\}$; здесь и далее символ $O(\cdot)$ используем для обозначения величин одного порядка):

- если $s\le m-1$, то

$$\mathbf{P}\{(s,0)\to(s+1,0)\}=\frac{\lambda v}{\lambda+s\mu_2}=O(v),\ \mathbf{P}\{(s,0)\to(s+1,1)\}=\frac{\lambda u}{\lambda+s\mu_2}=O(1),$$

$$\mathbf{P}\{(s,0)\to(s-1,0)\}=\frac{s\mu_2}{\lambda+s\mu_2}=O(1),\ \ s\ge 1,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s+1,k)\}=\frac{\lambda v}{\lambda+k\mu_1+(s-k)\mu_2}=O\left(\frac{v}{\mu_1}\right),\quad 1\le k\le s,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s+1,k+1)\}=\frac{\lambda u}{\lambda+k\mu_1+(s-k)\mu_2}=O\left(\frac{1}{\mu_1}\right),\quad 1\le k\le s,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s-1,k)\}=\frac{(s-k)\mu_2}{\lambda+k\mu_1+(s-k)\mu_2}=O\left(\frac{1}{\mu_1}\right),\quad 1\le k\le s,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s-1,k-1)\}=\frac{k\mu_1}{\lambda+k\mu_1+(s-k)\mu_2}=O(1),\quad 1\le k\le s;$$

- если $m\le s\le m+r$, то

$$\mathbf{P}\{(s,0)\to(s+1,0)\}=\frac{\lambda}{\lambda+m\mu_2}=O(1),$$

$$\mathbf{P}\{(s,0)\to(s-1,0)\}=\frac{m\mu_2 v}{\lambda+m\mu_2}=O(v),\quad s\ge m+1,$$

$$\mathbf{P}\{(s,0)\to(s-1,1)\}=\frac{m\mu_2 u}{\lambda+m\mu_2}=O(1),\quad s\ge m+1,$$

$$\mathbf{P}\{(m,0)\to(m-1,0)\}=\frac{m\mu_2}{\lambda+m\mu_2}=O(1),$$

$$\mathbf{P}\{(m,k)\to(m-1,k-1)\}=\frac{k\mu_1}{\lambda+k\mu_1+(m-k)\mu_2}=O(1),\quad 1\le k\le m,$$

$$\mathbf{P}\{(m,k)\to(m-1,k)\}=\frac{(m-k)\mu_2}{\lambda+k\mu_1+(m-k)\mu_2}=O(\frac{1}{\mu_1}),\quad 1\le k\le m,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s+1,k)\}=\frac{\lambda}{\lambda+k\mu_1+(m-k)\mu_2}=O(\frac{1}{\mu_1}),\quad 1\le k\le m,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s-1,k)\}=\frac{k\mu_1 u+(m-k)\mu_2 v}{\lambda+k\mu_1+(m-k)\mu_2}=O(1),\quad 1\le k\le m,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s-1,k-1)\}=\frac{k\mu_1 v}{\lambda+k\mu_1+(m-k)\mu_2}=O(v),\quad 1\le k\le m,$$

$$\mathbf{P}\{(s,k)\to(s-1,k+1)\}=\frac{(m-k)\mu_2 u}{\lambda+k\mu_1+(m-k)\mu_2}=O(\frac{1}{\mu_1}),\quad 1\le k\le m.$$

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ q_0 МОНОТОННОГО ОТКАЗА

Приведенный граф переходов позволяет выделить наиболее вероятные монотонные траектории отказа системы.

1. Вероятность траектории $(0,0)\to(1,0)\to\ldots\to(m+r+1,0)$ имеет порядок $O(v^m)$.

2. Вероятность траектории $(0,0)\to(1,1)\to\ldots\to(m,m)\to(m+1,m)\to\ldots$ $\ldots\to(m+r+1,m)$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right)$.

3. Вероятность траектории $(0,0) \to (1,0) \to \ldots \to (k,0) \to (k+1,1) \to \ldots$ $\ldots \to (m, m-k) \to (m+1, m-k) \to \ldots \to (m+r+1, m-k)$ при $k = 1, \ldots, m-1$ имеет порядок $O\left(\dfrac{v^k}{\mu_1^{m+r-k}}\right)$.

Поскольку вероятности переходов $(s,k) \to (s+1,k)$ при $0 < s < m$, $0 < k \le s$ имеют порядок $O\left(\dfrac{v}{\mu_1}\right)$, то вероятности монотонных траекторий другого типа имеют более высокий порядок малости по сравнению с приведенными выше.

Определим порядок вероятности q_0 монотонного отказа в зависимости от соотношений между v и μ_1. Рассмотрим два случая.

- Величины v и μ_1 изменяются таким образом, что $v \to 0$, $\mu_1 \to \infty$ и $v^m \mu_1^{m+r} \ge c$ для некоторого $c > 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\mu_1^{m+r}} \le \frac{v^m}{c}.$$

Если дополнительно предположить, что $v\mu_1 \le d$ для некоторого $d < \infty$, то

$$\frac{v^k}{\mu_1^{m+r-k}} = \frac{1}{\mu_1^{m+r}} (v\mu_1)^k \le \frac{d^k}{c} v^m, \quad k = 1, \ldots, m-1.$$

Отсюда

$$q_0 = O(v^m). \tag{4}$$

Если $v\mu_1 \to \infty$, то наиболее вероятной является траектория при $k = m-1$:

$$\frac{v^{m-1}}{\mu_1^{r+1}} = v^m \frac{1}{v\mu_1} \frac{1}{\mu_1^r} = o(v^m).$$

Поэтому также имеет место соотношение (4).

- Величины v и μ_1 изменяются таким образом, что $v \to 0$, $\mu_1 \to \infty$ и $v^m \mu_1^{m+r} \to 0$. Тогда

$$v^m = o\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right).$$

Поскольку $v\mu_1 = (v^m \mu_1^{m+r})^{\frac{1}{m}} \left(\dfrac{1}{\mu_1}\right)^{\frac{r}{m}} \to 0,$

$$\frac{v^k}{\mu_1^{m+r-k}} = \frac{1}{\mu_1^{m+r}} (v\mu_1)^k = o\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right), \quad k = 1, \ldots, m-1.$$

Поэтому

$$q_0 = O\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right). \tag{5}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Предположим, что $\nu \to 0$, $\mu_1 \to \infty$, $\mu_2 = \text{const}$. Соотношение $q_1 = o(q_0)$ имеет место тогда и только тогда, когда ν и μ_1 изменяются таким образом, что

$$\nu^m \mu_1^{m+r} \to 0\,. \tag{6}$$

Если условие (6) выполнено, то

$$q_0 = \frac{\lambda^{m+r}}{m!\, m^r} \frac{1}{\mu_1^{m+r}} + o\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right). \tag{7}$$

Необходимость. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что $q_1 = o(q_0)$ и соотношение (6) не выполнено. Это означает, что $q_0 = O(\nu^m)$ (см. (4)). Такой порядок имеет вероятность следующей монотонной отказовой траектории: $(0,0) \to (1,0) \to \ldots \to (m+r+1, 0)$. Этот же порядок имеет немонотонная траектория вида $(0,0) \to (1,0) \to (2,1) \to (1,0) \to (2,0) \to \ldots$ $\ldots \to (m+r+1, 0)$, что противоречит условию $q_1 = o(q_0)$.

Достаточность. Как показано выше, условие (6) гарантирует выполнение равенства $q_0 = O\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right)$ (см. (5)). При этом лишь вероятность монотонной траектории $(0,0) \to (1,1) \to \ldots \to (m,m) \to (m+1,m) \to \ldots \quad \ldots \to (m+r+1, m)$ имеет указанный порядок. Вероятности всех остальных монотонных траекторий имеют более высокий порядок малости. Покажем, что $q_1 = o(q_0)$. Для этого построим оценку сверху для q_1.

Пусть (s,k) — одно из допустимых состояний системы, $0 < s \le m+r$, $0 \le k \le \min(m,s)$. Траекторию системы вида $(s,k) \to (s_1,k_1) \to \ldots \to (s_n,k_n) \to$ $\to (s,k)$, $n \ge 1$, $0 < s_i \le m+r$, $0 \le k_i \le \min(m, s_i)$, $(s_i,k_i) \ne (s,k)$, $i = 1,\ldots,n$, назовем (s,k)-циклом. Обозначим $\Gamma(s,k)$ множество всех (s,k)-циклов, а Γ — множество всех отказовых траекторий, т.е. траекторий вида $\gamma = (0,0) \to (s_1,k_1) \to \ldots$ $\ldots \to (s_n,k_n)$, $n \ge m+r+1$, $0 < s_i \le m+r$, $0 \le k_i \le \min(m, s_i)$, $i = 1,\ldots,n-1$, $s_n = m+r+1$. Пусть $\gamma \in \Gamma$ — произвольная отказовая траектория. Сформулируем алгоритм приведения данной траектории к виду γ^*, который назовем каноническим.

1. В траекторию γ^* включаем переход $(0,0) \to (s_1,k_1)$.

2. Если (s,k) — последнее состояние траектории γ, включенное в траекторию γ^*, то положим $N(s,k) = 0$ (счетчик циклов в состоянии (s,k)).

3. Просматриваем все состояния (s_j,k_j) траектории γ после состояния (s,k). Если не существует j такого, что $(s_j,k_j) = (s,k)$, то в траекторию γ^* включаем состояние траектории γ, непосредственно следующее за (s,k). Если это состояние является отказовым, то процедура выполнения алгоритма закончена. В противном случае возвращаемся на шаг 2 с новыми значениями s и k.

4. Если j — первое значение, для которого $(s_j,k_j) = (s,k)$, то полагаем $N(s,k) := N(s,k) + 1$ (символ $:=$ означает, что новое значение переменной есть функция ее старого значения). При этом в траекторию γ^* включается траектория $\gamma^{(N(s,k))}(s,k) = \{(s,k) \to \ldots \to (s_j,k_j) = (s,k)\} \in \Gamma(s,k)$. Далее переходим на шаг 3 алгоритма.

В результате работы алгоритма любая отказовая траектория γ может быть представлена в виде

$$\gamma^* = \{(0,0) \to (w_1, l_1) \to \gamma^{(1)}(w_1, l_1) \to \ldots \to \gamma^{(N(w_1,l_1))}(w_1, l_1) \to \ldots$$
$$\ldots \to (w_t, l_t) \to \gamma^{(1)}(w_t, l_t) \to \ldots \to \gamma^{(N(w_t,l_t))}(w_t, l_t) \to (s_n, k_n)\}, \tag{8}$$

где $(w_i, l_i) \neq (w_j, l_j)$ при $i \neq j$, $N(w_i, l_i) \geq 0$ и $\gamma^{(j)}(w_i, l_i) \in \Gamma(w_i, l_i)$. При этом переходы типа $(w, l) \to (w, l)$ игнорируются.

Например, если $m = 2$, $r = 1$ и $\gamma = \{(0,0) \to (1,0) \to (2,1) \to (1,1) \to (2,1) \to \to (3,1) \to (2,1) \to (1,1) \to (2,2) \to (1,1) \to (2,2) \to (3,2) \to (4,2)\}$, то $\gamma^* = \{(0,0) \to \to (1,0) \to (2,1) \to \gamma^{(1)}(2,1) \to \gamma^{(2)}(2,1) \to (1,1) \to \gamma^{(1)}(1,1) \to (2,2) \to (3,2) \to (4,2)\}$, где $\gamma^{(1)}(2,1) = \{(2,1) \to (1,1) \to (2,1)\}$, $\gamma^{(2)}(2,1) = \{(2,1) \to (3,1) \to (2,1)\}$, $\gamma^{(1)}(1,1) = = \{(1,1) \to (2,2) \to (1,1)\}$.

Обозначим $\overline{\Gamma}$ множество отказовых траекторий вида

$$\bar{\gamma} = \{(0,0) \to (w_1, l_1) \to \ldots \to (w_t, l_t) \to (s, k)\}, \tag{9}$$

где $(w_i, l_i) \neq (w_j, l_j)$ при $i \neq j$, $s = r + m + 1$. Очевидно, что таких траекторий может быть лишь конечное число. В основе каждой траектории вида (8) лежит траектория из множества $\overline{\Gamma}$.

Согласно предположению теоремы вероятность лишь одной траектории из множества $\overline{\Gamma}$ имеет тот же порядок, что и q_0: $\bar{\gamma}^{(0)} = \{(0,0) \to (1,1) \to \ldots \ldots \to (m, m) \to (m+1, m) \to \ldots \to (m + r + 1, m)\}$.

Обозначим $q(\gamma)$ вероятность прохождения системой траектории γ, а через

$$Q(s, k) = \sum_{\gamma \in \Gamma(s,k)} q(\gamma)$$

— вероятность возникновения циклической траектории с начальным состоянием (s, k). Оценим вероятность $Q(s, k)$ для всех возможных значений s и k.

Если $(s, k) = (j, j)$, $1 \leq j \leq m$, то вероятность перехода системы по цепочке $(j, j) \to (j-1, j-1) \to \ldots \to (0,0)$ стремится к единице при $\mu_1 \to \infty$. Поэтому $Q(s, k) \to 0$. Если $(s, k) = (j, m)$, $m + 1 \leq j \leq m + r$, то, рассуждая аналогично, получаем, что $Q(s, k) \to 0$ при $v \to 0$ и $\mu_1 \to \infty$.

Рассмотрим состояние (s, k), $1 \leq s \leq m$, $1 \leq k < s$. Вероятность перехода системы по цепочке $(s, k) \to (s-1, k-1) \to \ldots \to (s-k, 0) \to (s-k-1, 0) \to \ldots \to (0,0)$ можно оценить снизу как $h(s,k) \simeq \left(\frac{\mu_2}{\lambda + \mu_2}\right)^{s-k}$ (символ $\simeq$ означает равенство с точностью до $o(1)$). Поэтому $Q(s, k) \leq 1 - h(s, k) < 1$. Для состояния (s, k), $m + 1 \leq s \leq m + r$, $1 \leq k < m$, вероятность перехода по цепочке $(s, k) \to (s-1, k) \to \ldots \ldots \to (m, k) \to (m-1, k-1) \to \ldots \to (m-k, 0) \to (m-k-1, 0) \to \ldots \to (0,0)$ не меньше, чем $h(m, k)$. Поэтому $Q(s, k) \leq 1 - h(m, k) < 1$. Обозначив $h = \left(\frac{\mu_2}{\lambda + \mu_2}\right)^m$, получим

$$Q(s, k) \leq 1 - h + o(1) \tag{10}$$

для всех состояний (s, k).

Оценим сверху вероятность q_1 немонотонного отказа. Рассмотрим два множества немонотонных траекторий: множество A, состоящее из немонотонных траекторий вида (8), в основе которых лежит монотонная траектория $\bar{\gamma}^{(0)}$; множество B, содержащее все другие траектории.

Вероятность перехода системы по монотонной траектории $\bar{\gamma}^{(0)}$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right)$. В каждом из $m+r$ состояний $(1,1),\ldots,(m,m)$, $(m+1,m),\ldots$ $\ldots,(m+r,m)$ возможны циклы. Если N_i — количество циклов в состоянии $(i,\min(i,m))$, то $N_1+\ldots+N_{m+r}\geq 1$ (иначе траектория была бы монотонной). Поэтому для вероятности $q_1(A;\bar{\gamma}^{(0)})$ немонотонной траектории из множества A имеет место очевидное соотношение

$$q_1(A;\bar{\gamma}^{(0)})\leq O\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right)\sum_{\substack{N_i\geq 0,\, i=1,\ldots,m+r,\\ N_1+\ldots+N_{m+r}=1}}\prod_{j=1}^{m+r}[Q(j,\min(j,m))]^{N_j}=o\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right)$$

(с учетом, что все $Q(j,\min(j,m))\to 0$).

Аналогичное соотношение имеет место и для вероятности немонотонной траектории из множества B. Пусть γ — произвольная траектория из множества B, в основе канонического представления которого лежит траектория $\bar{\gamma}\in\bar{\Gamma}$ вида (9), причем $\bar{\gamma}\neq\bar{\gamma}^{(0)}$. Как было показано выше, вероятность прохождения системы по этой траектории имеет порядок $o\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right)$. Учитывая возможность возникновения циклов, для вероятности $q_1(B;\bar{\gamma})$ немонотонного отказа по траектории, в основе которой лежит $\bar{\gamma}$, имеем

$$q_1(B;\bar{\gamma})\leq o\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right)\sum_{N_i\geq 0,\, i=1,\ldots,t}\prod_{j=1}^{t}[Q(w_j,l_j)]^{N_j}\leq$$

$$\leq o\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right)\sum_{N_i\geq 0,\, i=1,\ldots,t}\prod_{j=1}^{t}[1-h+o(1)]^{N_j}=o\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right).$$

Поскольку множество $\bar{\Gamma}$ содержит лишь конечное число траекторий, то, суммируя по всем траекториям $\bar{\gamma}$, получим $q_1=o\left(\frac{1}{\mu_1^{m+r}}\right)$, что и требовалось доказать. Соотношение (7) следует из соотношений переходных вероятностей цепи Маркова. Теорема доказана.

Следующее утверждение показывает, что в некоторых случаях основной вклад в отказ системы могут вносить немонотонные траектории.

Теорема 2. Предположим, что величины ν, μ_1 и μ_2 изменяются таким образом, что $\nu\to 0$, $\mu_1\to\infty$, $\mu_2\to 0$ и $\nu^m\mu_1^{m+r}\geq c$ для некоторого $c>0$. Тогда $q_0=o(q_1)$.

Доказательство. В условиях теоремы $q_0=O(\nu^m)$, причем указанный порядок достигается на траектории $(0,0)\to(1,0)\to\ldots\to(m+r+1,0)$. Рассмотрим траекторию вида

$$\gamma^{(k)}=\{(0,0)\to(1,0)\to\underbrace{(2,1)\to(1,0)}_{k\ \text{раз}}\to(2,0)\to\ldots\to(m+r+1,0)\}.$$

Вероятность отказа системы по данной траектории определяется выражением

$$p^{(k)} = v \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\lambda v}{\lambda + s\mu_2} \prod_{s=m}^{m+r} \frac{\lambda}{\lambda + m\mu_2} \left(\frac{\lambda u}{\lambda + \mu_2} \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1 + \mu_2} \right)^k .$$

Имеем

$$q_1 \geq \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)} = v^m \prod_{s=1}^{m+r} \frac{\lambda}{\lambda + \mu_2 \min(s, m)} \frac{\lambda u \mu_1}{(\lambda + \mu_2)(\lambda + \mu_1 + \mu_2) - \lambda u \mu_1} =$$

$$= v^m \prod_{s=1}^{m+r} \frac{\lambda}{\lambda + \mu_2 \min(s, m)} \frac{\lambda u \mu_1}{(\lambda + \mu_2)^2 + \lambda v \mu_1 + \mu_1 \mu_2}.$$

Поскольку $q_0 = O(v^m)$ и

$$\frac{\lambda u \mu_1}{(\lambda + \mu_2)^2 + \lambda v \mu_1 + \mu_1 \mu_2} \to \infty$$

при $v \to 0$, $\mu_1 \to \infty$, $\mu_2 \to 0$, то имеем $\frac{q_1}{q_0} \to \infty$ и, следовательно, $q_0 = o(q_1)$. Теорема доказана.

СРАВНЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ q И q_0 С ДОСТАТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Предположим, что $q_1 = o(q_0)$. В этом случае имеет место соотношение (6). Поэтому

$$v\mu_1 = (v^m \mu_1^{m+r})^{\frac{1}{m}} \left(\frac{1}{\mu_1} \right)^{\frac{r}{m}} \to 0. \tag{11}$$

Рассмотрим вид, который приобретают достаточные условия эквивалентности q и q_0, полученные на основе соотношений (2) и (3). Для рассматриваемого распределения $B(x)$ k-й момент вычисляется по формуле

$$\alpha_k = u \cdot \frac{k!}{\mu_1^k} + v \cdot \frac{k!}{\mu_2^k}.$$

Поэтому условие (2) принимает вид

$$\frac{\alpha_{m+r+1}}{\alpha_1^{m+r}} = \frac{u \frac{(m+r+1)!}{\mu_1^{m+r+1}} + v \frac{(m+r+1)!}{\mu_2^{m+r+1}}}{(u \frac{1}{\mu_1} + v \frac{1}{\mu_2})^{m+r}} =$$

$$= \frac{(m+r+1)!\, u\, \mu_2^{m+r+1}}{\mu_1 \mu_2 (u \mu_2 + v \mu_1)^{m+r}} + \frac{(m+r+1)!\, v\, \mu_1^{m+r}}{\mu_2 (u \mu_2 + v \mu_1)^{m+r}} \to 0 . \tag{12}$$

В силу (11) первое слагаемое в (12) стремится к нулю при $\mu_1 \to \infty$. Поэтому соотношение (12) выполнено тогда и только тогда, когда $v \cdot \mu_1^{m+r} \to 0$.

Достаточное условие, полученное на основании соотношения (3), имеет вид

$$\frac{\alpha_1^{m-1} \alpha_{r+2}}{q_0} \to 0 .$$

Соотношение $q_1 = o(q_0)$ возможно лишь в случае, когда выполнено равенство (5). Поэтому

$$\mu_1^{m+r}\,\alpha_1^{m-1}\,\alpha_{r+2} = \mu_1^{m+r}\left(u\cdot\frac{1}{\mu_1}+v\cdot\frac{1}{\mu_2}\right)^{m-1}\left(u\cdot\frac{1}{\mu_1^{r+2}}+v\cdot\frac{1}{\mu_2^{r+2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\mu_2^{m+r+1}}(u\,\mu_2+v\,\mu_1)^{m-1}\left(\frac{u\,\mu_2^{r+2}}{\mu_1}+v\cdot\mu_1^{r+1}\right)\to 0$$

тогда и только тогда, когда $v\cdot\mu_1^{r+1}\to 0.$

Полученные условия можно записать следующим образом:

- необходимое и достаточное условие: $(v\mu_1)^m\,\mu_1^r \to 0$ (теорема 1);
- достаточное условие А.Д. Соловьева: $(v\mu_1)\cdot\mu_1^{m+r-1}\to 0;$
- достаточное условие И.Н. Коваленко: $(v\mu_1)\mu_1^r \to 0$.

Очевидно, что условие А.Д. Соловьева является наиболее жестким. В случае однолинейной системы (т.е. при $m=1$) все три условия совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В. О ненагруженном дублировании // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1964. — № 4. — С. 3–12.
2. Гнеденко Б.В. О дублировании с восстановлением // Там же. — 1964. — № 5. — С. 111–118.
3. Соловьев А.Д. Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе // Там же. — 1971. — № 6. — С. 79–89.
4. Гнеденко Д.Б., Соловьев А.Д. Оценка надежности сложных восстанавливаемых систем // Там же. — 1975. — № 3. — С. 89–96.
5. Соловьев А.Д., Карасева Н.Г. Оценка среднего времени жизни восстанавливаемых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. — 1998. — № 5. — С. 25–29.
6. Коваленко И.Н. Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. — М.: Сов. радио, 1980. — 209 с.
7. Kovalenko I.N. Approximation of queues via small-parameter method // Adv. in Queueing. — Boca Raton: CRC Press, 1995. — P. 481–506.
8. Anisimov V.V. Switching processes in queueing models. — Chichester: Wiley-ISTE, 2008. — 352 p.
9. Вопросы математической теории надежности / Е.Ю. Барзилович, Ю.К. Беляев, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко и др. — М.: Радио и связь, 1983. — 376 с.
10. Константинидис Д.Г. Принцип монотонной траектории отказа сложной восстанавливаемой системы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. — 1990. — № 3. — С. 7–13.
11. Коваленко И.Н. Оценка интенсивности потока немонотонных отказов в системе обслуживания $(\le\lambda)/G/m$ // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 9. — С. 1219–1225.
12. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Принцип монотонных отказов и его применение к расчету характеристик надежности структурно сложных систем / Стохастические модели систем. — Киев: Воен. академия ПВО сухопут. войск, 1986. — С. 25–45.
13. Коваленко И.Н. Об оценке надежности сложных систем // Вопр. радиоэлектроники. — 1965. — **12**, № 9. — С. 50–68.

Поступила 24.02.2011